ESERCIZIO 1: Sia $a=-\infty$ o $a\in\mathbb{R}$, sia $b\in\mathbb{R}$ o $b=+\infty$.

SIA $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ funzione continua su (a,b).

Sia $\lim_{x\to a} f(x)=l_1$ e $\lim_{x\to b} f(x)=l_2$

Sia $x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)>l_1$ e $f(x_0)>l_2$

Mostrare che $f((a,b))$ ammette massimo.

Svolgimento nel $\boxed{\text{caso}}\ \boxed{a=-\infty,\ b\in\mathbb{R}}$.

Siccome $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l_1<f(x_0)$

$$\boxed{\exists M>0 \quad \text{t.c.} \quad f(x)<f(x_0) \quad \forall x\in(-\infty,-M)}$$

infatti prendendo $\varepsilon=f(x_0)-l_1>0$ nella definizione di limite ho che

$$\exists M>0 \quad \text{t.c.} \quad x\in(-\infty,-M) \Rightarrow l_1-\varepsilon<f(x)<\underset{\underset{l_1+\varepsilon}{\parallel}}{f(x_0)}$$

Siccome $\lim_{x\to b} f(x)=l_2<f(x_0)$

$$\boxed{\exists \delta>0 \quad \text{t.c.} \quad f(x)<f(x_0) \quad \forall x\in(b-\delta,b)}$$

infatti prendendo $\varepsilon=f(x_0)-l_2$ nella definizione di limite ho che

$$\exists \delta>0 \quad \text{t.c.} \left(\begin{matrix} 0\neq|x-b|<\delta \\ x\in(-\infty,b)\end{matrix} \Rightarrow l_2-\varepsilon<f(x)<\underset{\underset{f(x_0)}{\parallel}}{l_2+\varepsilon}\right)$$

$$\text{cioè t.c.} \quad \left(x\in(b-\delta,b) \Rightarrow l_2-\varepsilon<f(x)<f(x_0)\right)$$

Abbiamo

$$(-\infty,b)=(-\infty,-M)\cup[-M,b-\delta]\cup(b-\delta,b)$$

e $x_0\in[-M,b-\delta]$.

$\boxed{\text{Per il teorema di Weierstrass}}$ $f[-M,b-\delta]$ ammette massimo

cioè $\boxed{\exists \bar{x}\in[-M,b-\delta] \quad \text{t.c.} \quad f(\bar{x})=\mathrm{Max}(f([-M,b-\delta]))}$.

$\boxed{f(\bar{x}) \text{ è anche il massimo di } f((a,b))}$.

infatti 1) $f(\bar{x})\in f((a,b))$

2) $f(\bar{x})$ è un maggiorante di $f((a,b))$ cioè $f(\bar{x})\geq f(x)\ \forall x\in(a,b)$

Verifichiamo 2)

Se $x \in (-\infty, -M)$ $\quad f(\bar{x}) \geq f(x_0) > f(x)$

vero perché $x \in (-\infty, -M)$

vero perché $x_0 \in [-M, b-\delta]$ e $f(\bar{x}) = \max f([-M, b-\delta])$

Se $x \in [-M, b-\delta]$ $\quad f(\bar{x}) \geq f(x)$ perché $f(\bar{x}) = \max(f([-M, b-\delta]))$

Se $x \in [b-\delta, b)$ $\quad f(\bar{x}) \geq f(x_0) > f(x)$

vero perché $x \in (b-\delta, b)$

vero perché $x_0 \in [-M, b-\delta]$ e $f(\bar{x}) = \cancel{\max} \; \max f([-M, b-\delta])$

In modo simile si mostra che

se $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$, continua

$\lim_{x \to a} f(x) = l_1$

$\lim_{x \to b} f(x) = l_2$

e $\exists x_0$ t.c. $f(x_0) < l_1$ e $f(x_0) < l_2$

Allora $f(a,b)$ ammette minimo

Esercizio 2

Sia $f:(0,6)\longrightarrow\mathbb{R}$ data da $f(x)=2x^3-15x^2+24x+30$

Determinare $f((0,6))$.

Osservazione 1)

Determinare $f((0,6))$ equivale a determinare l'insieme a determinare l'insieme $\{\alpha\in\mathbb{R}$ tali che l'equazione $f(x)=\alpha$ ammette almeno una soluzione $x\in(0,6)\}$

Osservazione 2) In generale

Per risolvere gli esercizi di questo tipo in cui si chiede l'immagine di una funzione f derivabile su un intervallo rispetto (a,b) basta conoscere $\lim_{x\to a} f(x)=l_1$ $\lim_{x\to b} f(x)=l$ e i valori di f nei punti in cui si annulla la f'.

Svolgimento

Nel nostro caso $\lim_{x\to 0} f(x)=30$, $\lim_{x\to 6} f(x)=66$.

Inoltre $f'(x)=6x^2-30x+24$, perciò $f'(x)=0 \iff x=1$ o $x=4$.

In questi punti i valori di f sono $f(1)=41$ e $f(4)=10$.

Si ha $\sup(f((0,6)))=66$.

Infatti $\sup(f((0,6)))\geq f(x)\ \forall x\in(0,6)$ quindi per confronto $66=\lim_{x\to 6} f(x) \leq \sup(f(0,6))$

e se $\sup(f((0,6)))>66$ esisterebbe $x\in(0,6)$ tale che $f(x)>66$.

Per l'esercizio precedente $f(0,6)$ ammetterebbe massimo. Tale massimo sarebbe >66.

Per il teorema di Fermat i possibili punti di massimo sono 1 e 4.

Siccome $f(1)$ e $f(4)$ sono minori di 66 è assurdo che $f(0,6)$ ammette massimo e quindi è assurdo che esiste $x\in(0,6)$ tale che $f(x)>66$.

Quindi $\sup((f(0,6)))=66$

$\boxed{\text{Inoltre } f(0,6) \text{ non ammette massimo}}$.

Siccome $\sup\left(f((0,6))\right) = 66$, se $f((0,6))$ ammettesse massimo, tale massimo sarebbe 66. Allora per il teorema di Fermat esisterebbe $x \in (0,6)$ t.c.

$f'(x) = 0$ e $f(x) = 66$. Ma $f'(x) = 0 \iff x = 1$ o $x = 4$

e $f(1) = 66$ $f(4) = 66$.

$\boxed{\text{Si ha inoltre } \mathrm{Min}\left(f((0,6))\right) = f(4) = 10}$.

Infatti, per l'esercizio precedente, siccome $f(4) = 10$ e $10 < \lim_{x \to 0} f(x)$

$10 < \lim_{x \to 6} f(x)$

$f((0,6))$ ammette minimo.

Per il teorema di Fermat i possibili minimi sono

$f(4)$ e $f(1)$. Siccome $f(4) = 10 < f(1)$, il minimo è 10.

Per il teorema dei valori intermedi $f(0,6)$ è un intervallo:

Perciò $f((0,6)) = [10, 66)$ FINE SVOLGIMENTO

OSSERVAZIONE 3 (Nel caso di osservazione 2)

In generale, se esiste solo un numero finito di punti $x_1, \dots x_n$ in cui si annulla la derivata si ha

$$\sup\left(f((a,b))\right) = \mathrm{Max}\left\{ \lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x), f(x_1), \dots f(x_n) \right\}$$

$$\mathrm{Inf}\left(f((a,b))\right) = \mathrm{Min}\left\{ \lim_{x \to a} f(x), \lim_{x \to b} f(x), f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n) \right\}$$