Esercizio 1 Calcolare:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(x) + x^2 - x}{\sin^3(x)}.$$

Suggerimento: calcolare il polinomio di Taylor di grado 3 centrato in 0 di $e^{\sin(x)}$ usando i polinomi di Taylor di e^x e $\sin(x)$.

Esercizio 2 Calcolare:

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\sin(x^3) - \sin^3(x)}{x\ln(\cos(x^2))}$$

Esercizio 3 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 6 centrato in 0 di

$$f(x) = \ln(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}))$$

e dedurre le prime sei derivate in 0 di $f(x)$.
Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \cos(x) + e^{\sin(\frac{x}{24})}}{\arctan(\sin(x^6))}$$

Esercizio 4 Calcolare il polinomio di Taylor di grado 5 centrato in 0 di

$$f(x) = \ln(\cos(x)\sqrt{1+x^4})$$

e dedurre le prime 5 derivate di $f(x)$ in 0.
Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - \cos(x) + 1 - \frac{11}{24}x^4}{\sin^3(x)(\cos(x) - 1)}$$

Esercizio 5 Calcolare il limite per $x \to +\infty$ di

1. $5^x(\sin(\pi^{-x}) - \pi^{-x})$
2. $\frac{e^{\frac{1}{x+1}} - \sin(\frac{1}{x+1}) - \frac{x^2+2x+\frac{3}{2}}{x+1}}{tg(\frac{1}{x+3}) - \sin(\frac{1}{x+1})}$
3. $x^2\cos(3x^{-1}) - x(x-1)e^{x^{-1}}$

Suggerimento: anche se $x \to +\infty$ in questi limiti si risolvono usando i polinomi di Taylor. Più precisamente in generale si può usare il seguente

Promemoria Se per $x \to x_0$, $g(x) = T_n(x) + o(x - x_0)^n$ ($T_n(x)$ e'il polinomio di Taylor) allora se per $x \to x_0$ $f(x) = 0$ si ha anche $g(f(x)) = T_n(f(x)) + o(f(x)^n)$.

In alcuni casi è più semplice ricondursi al caso in cui la variabile tende a 0 ponendo $y = 1/x$ (terzo limite).

Esercizio 6 Sia:

$$f(x) = \{ \begin{array}{ccc} x^3(\sin(1/x)) & se & x \neq 0 \\ 0 & se & x = 0 \end{array}$$

È vero che il polinomio di Taylor di grado due di $f(x)$ centrato in 0 è il polinomio nullo?

Esercizio 7 Calcolare $\sqrt{e}$ con errore inferiore a $1/1000$.