

Esercizio 1) Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e sia $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ munito del

prodotto scalare standard $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

a) Stabilire se il sottoinsieme $A := \{X \in \mathbb{R}^3 : MX \in v^\perp\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $B := \{X \in \mathbb{R}^3 : MX \in \text{Span}(X)\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle Mx, v \rangle = 0\}.$

A è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

In fatti $0) \langle M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v \rangle = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v \rangle = 0$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in A$

1) se $x_1, x_2 \in A$, $\langle M(x_1 + x_2), v \rangle = \langle Mx_1 + Mx_2, v \rangle = \dots$

$\xrightarrow{\text{lineare}} \xrightarrow{\text{multiplicazione per } M} \dots = \langle Mx_1, v \rangle + \langle Mx_2, v \rangle \xrightarrow{\text{bilineare}} \xrightarrow{\text{poil } \langle \cdot, \cdot \rangle} = 0 + 0 = 0.$ Perciò $x_1 + x_2 \in A$.

2) Se $x \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\langle M(\alpha x), v \rangle = \langle \alpha Mx, v \rangle = \dots$
 $\xrightarrow{\text{bilineare}} \xrightarrow{\text{di } \langle \cdot, \cdot \rangle} \xrightarrow{\text{lineare}} \xrightarrow{\text{di mult per } M} = \alpha \langle Mx, v \rangle = \alpha \cdot 0 = 0$

b) B è costituito da tutti gli autovettori di M e dal vettore nullo. Siccome la somma di autovettori relativi ad autovaleori distinti non è un autovettore, B non è sottospazio vettoriale.

Più specificamente, nel nostro caso,

• $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in B$ perché $M \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

• $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in B$ perché $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

ma $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \notin B$ perché $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Perciò B non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 1) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Stabilire se il sottoinsieme $A := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : \text{Tr}(AX) = 0\}^1$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $B := \{X \in \mathbb{R}^2 : X^T A X = 0\}^2$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

b) B non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$\parallel \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = 0 \right\}$$

$$\parallel \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 = 0 \right\}$$

$$\parallel \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } (x_1 + 2x_2 + \sqrt{3}x_2)(x_1 + 2x_2 - \sqrt{3}x_2) = 0 \right\}$$

Però B è unione delle 2 rette di equazioni

$$x_1 + (2 + \sqrt{3})x_2 = 0 \quad \text{e} \quad x_1 + (2 - \sqrt{3})x_2 = 0.$$

B non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ perché le due rette non sono coincidenti.

Più specificamente

$$\begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \in B \quad \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \in B \quad \text{ma} \quad \begin{pmatrix} 2 + \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \notin B$$

$$\left(\text{perché } \begin{pmatrix} 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = -8 \neq 0 \right).$$

Quindi B non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$.

¹ $\text{Tr}(AX)$ è la traccia della matrice AX , cioè la somma dei suoi elementi sulla diagonale.

² X^T è il vettore riga ottenuto trasponendo il vettore colonna X .

Esercizio 2) a) Dimostrare che esiste un'unica applicazione lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che
 $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $L\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) Determinare la matrice rappresentativa di L rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia del dominio che del codominio).

c) Quante sono le applicazioni lineari $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tali che
 $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\phi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) Per quanto visto a lezione, assegnare un'applicazione lineare tra spazi vettoriali equivale ad assegnare le immagini degli elementi di una base del dominio. Nel nostro caso basta perciò far vedere che

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Questo è vero perché $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$.

b) Le i -esime colonne delle matrici rappresentative di L rispetto alle base canonica di $\mathbb{R}^3$ (come base sia di dominio che di codominio) contengono le coordinate di $L(e_i)$ rispetto alle base canoniche e_1, e_2, e_3 .

Cioè le i -esime colonne delle matrici cercate $\bar{x} = L(e_i)$.

Siccome $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \cancel{0} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, otteniamo $L(e_1) = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Siccome $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, otteniamo $L(e_2) = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Infine $L(e_3) = L\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Perciò la matrice cercata $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
 Quindi se $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è applicazione lineare tale che $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
 automaticamente sarà $\varphi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quindi è sufficiente chiedere quante sono le applicazioni lineari che soddisfanno $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sono infinite perché, siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, $\forall v \in \mathbb{R}^3$ esiste un'unica applicazione lineare φ
 t.c. $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = v$.

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 3) Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

a) Trovare una matrice invertibile $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.

b) Esiste una matrice invertibile $N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che N^TAN sia diagonale?

c) Occorre diagonalizzare l'applicazione lineare $L_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice A .

Il polinomio caratteristico di L_A è $P_{L_A}(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 0 \\ 6 & 5 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$

Gli autovalori sono 1, 2 e 4, tutti con molteplicità 1.

L'autospazio relativo all'autovalore 1 è

$$V_1 = \left\{ \text{soluzioni di } \left(A - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

L'autospazio relativo all'autovalore 2 è

$$V_2 = \left\{ \text{soluzioni di } \left(A - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \text{soluzioni di } \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 3x_1 = 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

L'autospazio relativo all'autovalore 4 è $V_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Quindi $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ e $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formano una base B di autovettori per L_A .

La matrice rappresentativa di L_A rispetto a B (come base sia di dominio che di codominio) è $M(L_A)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ene si può ottenere anche come prodotto

$$M(L_A)_B = M_{B_{\text{can}}}^B A M_B^{\text{can}} \text{ dove } M_B^{\text{can}} \text{ è la matrice di cambio}$$

coordinate dalla base B alla base canonica e $M_{B_{\text{can}}}^B = (M_B^{\text{can}})^{-1}$.

Possiamo quindi prendere $M = M_B^{\text{can}}$ e nel nostro caso

$$M_B^{\text{can}} \text{ ha per colonne i vettori } v_i \text{ della base } B \text{ cioè } M_B^{\text{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Non esiste una matrice invertibile N t.c. N^TAN sia diagonale.

Per mostrare questo osserviamo che $(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T$: infatti trasponendo l'identità $NN^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ otteniamo $(N^{-1})^T N^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: quindi $(N^T)^{-1} = (N^{-1})^T$.

Se esistesse N avremmo $N^TAN = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ da cui

$$A = N^T^{-1} N^T A N N^{-1} = N^T \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} N^{-1} \text{ e } A \text{ sarebbe simmetrica.}$$

$$\text{Infatti } A^T = (N^T)^{-1} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} N^{-1} = (N^{-1})^T \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} (N^T)^{-1} = N^T \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} N^{-1} = A.$$

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$

- a) Trovare una matrice invertibile $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.
b) Esiste una matrice invertibile $N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che N^TAN sia diagonale?

b) Soluzione alternativa:

Non esiste N invertibile tale che N^TAN sia diagonale.

Sia $F_A: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare associata alla matrice A (quindi A è la matrice rappresentativa di F_A rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3$).

Si come A non è simmetrica, F_A non è forma bilineare simmetrica.

Sappiamo dalle teorie che se N è invertibile la matrice N^TAN è matrice rappresentativa di F_A rispetto ad un'altra base B di $\mathbb{R}^3$. Se N^TAN fosse diagonale, tale matrice rappresentativa sarebbe simmetrica e quindi anche F_A dovrebbe essere simmetrica.

Esercizio 4) Siano $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in$

$M_{3,3}(\mathbb{R})$

- a) A e B sono coniugate? A e C sono coniugate? B e C sono coniugate?
 b) A e B sono congruenti? A e C sono congruenti? B e C sono congruenti?

c) Siccome le matrici date sono simmetriche, ^{vedi} due
 de sono coniugate, e quindi a loro hanno lo
 stesso polinomio caratteristico.

Si ha $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 3 \\ 2 & -\lambda & 4 \\ 3 & 4 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + (2^2+3^2+4^2)\lambda + 2(2 \cdot 3 \cdot 4) = \lambda^3 + 29\lambda + 48$

$P_B(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -3 & 4 \\ -3 & -\lambda & -2 \\ 4 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + ((-3)^2 + (-1)^2 + (-2)^2)\lambda + 2(-2)(3)(-4) = \lambda^3 + 14\lambda + 48$

$P_C(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 3 \\ -2 & -\lambda & 4 \\ 3 & 4 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + ((-2)^2 + (-3)^2 + (-4)^2)\lambda + 2(-2)(3)(4) = \lambda^3 + 29\lambda - 48$

~~Quindi $A \neq B$.~~

Quindi $A \neq B$ non sono coniugate, A e C non sono coniugate e
 A e C non sono coniugate.

b) Siccome A e B sono coniugate, esse sono anche congruenti.

Siccome $\det C = -48 < 0$ e $\det A = 48 > 0$,

A e C non sono congruenti. Infatti l'indice di negatività
 per C deve essere dispari, mentre quello per A deve essere
 pari.

Alternativamente se C fosse ~~congiunta~~ ^{congruente} ad A esisterebbe

una matrice tale che $C = N^T A N$. Allora sarebbe

$\det C = \det(N^T A N) = \det(N^T) \det(A) \det(N) = \det(N)^2 \det A$.

Quindi $\det C$ e $\det A$ avrebbero lo stesso segno.

Alla stessa modo C non è congruente ad A .