

**Esercizio 1)** Sia  $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ , sia  $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  e sia  $\mathbb{O} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$  la matrice nulla.

Sia  $S_1 := \{M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : AMA = \mathbb{O}\}$ ,  $S_2 := \{M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : MBM = \mathbb{O}\}$  e sia  $S_3 := \{M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : MM^T = \mathbb{O}\}$ .

Per  $i = 1, 2, 3$  stabilire se  $S_i$  è un sottospazio vettoriale di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ .

$S_1$  è un sottospazio vettoriale di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ .

Infatti  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_1$  perché  $A \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

...  $S_1$   $M_1$  e  $M_2 \in S_1$  anche  $M_1 + M_2 \in S_1$ ,

perché  $A(M_1 + M_2)A = (AM_1 + AM_2)A = AM_1A + AM_2A \overset{\substack{\text{proprietà distributive} \\ \text{prodotto di matrici}}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$   
 $M_1, M_2 \in S_1$

... Se  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $M \in S_1$  allora  $\alpha M \in S_1$ ,

perché  $A(\alpha M)A \overset{\substack{\text{moltiplicazione} \\ \text{per uno scalare} \\ \text{commutative con} \\ \text{prodotto di matrici}}}{=} \alpha AMA = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S_2$  non è un sottospazio vettoriale di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ .

Infatti, ricorrendo  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ac & bc \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_2 \Leftrightarrow \begin{matrix} a^2 = 0 \\ ab = 0 \\ ac = 0 \\ bc = 0 \end{matrix} \therefore$  quindi  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in S_2$  e  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in S_2$

ma  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin S_2$   $\left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

$S_3$  è un sottospazio vettoriale di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ ; più precisamente

$S_3$  consiste delle sole matrici nulle ed è perciò il sottospazio vettoriale nullo di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ . Infatti  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,

cioè  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S_3 \Leftrightarrow \begin{matrix} a^2 + b^2 = 0 \\ ac + bd = 0 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 0 \end{matrix}$  e, ricorrendo a, b, c, d  $\in \mathbb{R}$ , le disuguaglianze  $a^2 + b^2 = 0$  e  $c^2 + d^2 = 0$  implicano  $a = b = c = d = 0$ .

**Esercizio 2)** Sia  $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$  la funzione definita ponendo  
 $\phi(ax^2 + bx + c) := a^2x^2 + b^2x + c^2$  per  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Sia  $\psi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$  la funzione definita ponendo

$\psi(ax^2 + bx + c) := ax^4 + bx^2 + c$  per  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Discutere la linearità di  $\phi$  e  $\psi$ .

La funzione  $\phi$  non è un'applicazione lineare.

Infatti  $\phi(x^2) = x^2$  e  $\phi(2x^2) = 4x^2 \neq 2\phi(x^2)$ .

La funzione  $\psi$  è lineare.

Infatti: 1)  $\forall a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$  si ha

$$\psi((a x^2 + b x + c) + (a' x^2 + b' x + c')) = \psi((a+a')x^2 + (b+b')x + c+c') = \dots$$

$$\dots = (a+a')x^4 + (b+b')x^2 + c+c' = ax^4 + bx^2 + c + a'x^4 + b'x^2 + c' = \dots$$

$$\psi(ax^2 + bx + c) + \psi(a'x^2 + b'x + c')$$

2)  $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$  si ha

$$\psi(\alpha(ax^2 + bx + c)) = \psi(\alpha ax^2 + \alpha bx + \alpha c) = \alpha ax^4 + \alpha bx^2 + \alpha c = \dots$$

$$\dots = \alpha(ax^4 + bx^2 + c) = \alpha \psi(ax^2 + bx + c)$$

Nome e cognome dello studente:

**Esercizio 3)** Sia  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ . Sia  $L : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$  l'applicazione lineare definita ponendo  $L(X) := AX - XA$  per ogni  $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ . Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $L$ .

L'immagine  $\text{Im}(L)$  di  $L$  è costituita da matrici della forma  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  con  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Siccome } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b & a+2b \\ d & c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c-b & d-a-2b \\ a+2c-d & b-c \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ per cui}$$

$$\text{Im } L = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Siccome  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  una base dell'immagine di  $L$  è data da  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Siccome  $\dim M_{2,2}(\mathbb{R}) = 4$  e per cui  $\dim(\text{Ker } L) = \dim M_{2,2}(\mathbb{R}) - \dim \text{Im } L =$

Quindi per trovare una base di  $\text{Ker } L$  basta trovare due matrici non proporzionali di  $\text{Ker } L$ .

$\text{Ker } L = \{ X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : AX = XA \}$  è costituito dalle matrici che commutano con  $A$ , quindi contiene  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  che non sono proporzionali. Quindi una base di  $\text{Ker } L$  è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nome e cognome dello studente:

**Esercizio 3)** Sia  $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ . Sia  $L : M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$  l'applicazione lineare definita ponendo  $L(X) := AX - XA$  per ogni  $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ . Trovare una base del nucleo e una base dell'immagine di  $L$ .

Soluzione lungo un matrice rappresentativa

Prestiamo come base di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$  le matrici  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  nell'ordine dato. Prestiamo  $B$  come base sia del dominio che del codominio di  $L$ . Costruiamo le matrici rappresentative  $M := M(L)_B^B$  del  $L$  rispetto a  $B$ .

Siccome  $L \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

si ha I° colonna  $M^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Siccome  $L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; si ha

II° colonna  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Siccome  $L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  si ha

III° colonna  $M^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

~~Siccome~~  $L \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  si ha

IV° colonna  $M^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . In conclusione  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

Facciamo E.G. su  $M$  si trova  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{III - II \\ IV + II}} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Pivot

Una base dell'immagine di ~~l'applicazione~~ dell'applicazione lineare associata a  $M$  è  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ . Quindi una base dell'immagine di

$L$  è  $\left\{ C_B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Il nucleo dell'applicazione lineare associata ad  $M$  coincide con l'insieme delle soluzioni di  $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Risolvendo questo sistema

si ottiene che le soluzioni sono le quadruple della forma  $\begin{pmatrix} -s+t \\ s \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Quindi una base del nucleo dell'applicazione lineare associata ad  $M$  è  $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ . Una base di  $\text{Ker } L$  è allora

$\left\{ C_B^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C_B^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ ,  
 $\underset{w_1}{\quad}$ 
 $\underset{w_2}{\quad}$

**Esercizio 4)** Quali numeri interi si possono ottenere come rango di una matrice non nulla  $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  tale che  $M^2$  è nulla?

Esiste una matrice  $N \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  di rango 1 tale che  $N^3$  è non nulla e  $N^4$  è nulla?

I numeri interi che si possono ottenere come rango di una matrice non nulla  $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  t.c.  $M^2$  è nulla sono 1 e 2.

Infatti  $M^2$  è la matrice nulla se e solo se l'applicazione lineare associata  $L_{M^2}: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  è l'applicazione lineare nulla. Ma  $L_{M^2} = L_M \circ L_M$ , quindi  $L_{M^2}$  è nulla se e solo se  $\text{Im } L_M \subseteq \text{Ker } L_M$ . Quindi  $\text{rg } M = \dim \text{Im } L_M = \dots = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \text{Ker } L_M = 4 - \dim \text{Ker } L_M \leq 4 - \dim \text{Im } L_M = 4 - \text{rg } M$ .

Da  $\text{rg } M \leq 4 - \text{rg } M$  si deduce  $\text{rg } M \leq 2$ .

Una matrice di rango 1 con qualche nullo è  $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(Si può trovare osservando che l'applicazione lineare che manda  $e_1$  in  $e_2$  ed  $e_2, e_3, e_4$  in 0 ha rango 1 e qualche nullo ed è l'applicazione lineare associata ad  $M_1$ )

Una matrice di rango 2 con qualche nullo è  $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(Si può trovare osservando che l'applicazione lineare che manda  $e_1$  in  $e_2$ ,  $e_3$  in  $e_4$  e  $e_2$  ed  $e_4$  in 0 ha rango 2 e qualche nullo ed è l'applicazione lineare associata a  $M_2$ )

Non esiste una matrice  $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  di rango 1 tale che  $M^3 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Però mostriamo che non esiste un'applicazione lineare  $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$

t.c.  $\text{Im } \varphi$  ha dimensione 1,  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \neq 0$  e  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi = 0$ .

Supponiamo che tale  $\varphi$  esista. Sia  $v$  un generatore di  $\text{Im } \varphi$  (ovvero  $\text{Im } \varphi = \langle v \rangle$ ).

Siccome  $\varphi \circ \varphi \neq 0$  deve essere  $\varphi(v) \neq 0$ , quindi  $\varphi(v)$  è un vettore non nullo di  $\text{Im } \varphi$  e l'esiste  $\alpha \neq 0 \in \mathbb{R}$  t.c.  $\varphi(v) = \alpha v$ .

Ma allora  $(\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi)(v) = \alpha^4 v \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  perciò  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi$  non può essere nulla, contro l'ipotesi che stiamo supponendo.

**Esercizio 4)** Quali numeri interi si possono ottenere come rango di una matrice non nulla  $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  tale che  $M^2$  è nulla?

Esiste una matrice  $N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  tale che  $N^4$  è non nulla e  $N^5$  è nulla?

Solo il numero 1 si può ottenere come rango di una matrice non nulla  $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  t.c.  $M^2$  è nulla.

Infatti  $M^2$  è la matrice nulla se e solo se l'applicazione lineare associata  $L_M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è l'applicazione lineare nulla.

Ma  $L_{M^2} = L_M \circ L_M$ , quindi  $L_{M^2}$  è nulla se e solo se  $\text{Im } L_M \subseteq \text{Ker } L_M$ .

Quindi se  $M^2 = 0$ , dove essere  $\text{rg } M = \dim \text{Im } L_M = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Ker } L_M = \dots$

$\dots = 3 - \dim \text{Ker } L_M \leq 3 - \dim(\text{Im } L_M) = 3 - \text{rg } M$ .

Da  $\text{rg } M \leq 3 - \text{rg } M$  si deduce  $\text{rg } M \leq \frac{3}{2}$ .

Questo esclude che qualsiasi intero diverso da 1 si possa ottenere come rango di una matrice  $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  t.c.  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

1 può effettivamente ottenersi scegliendo  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Non esiste una matrice  $N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$  tale che  $N^4 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $N^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Per verificarlo basta mostrare che non esiste applicazione lineare

$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tale che  $\varphi^4 \neq 0$  e  $\varphi^5 = 0$ .

"  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi$  "  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi \circ \varphi$

Osserviamo che  $\forall n > 0$  si ha  $\text{Im } \varphi^{n+1} \subseteq \text{Im } \varphi^n$ .

Infatti  $\text{Im } \varphi^{n+1} = \varphi^{n+1}(\mathbb{R}^3) = \varphi^n(\varphi(\mathbb{R}^3))$  e  $\varphi(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Perciò  $\dim \text{Im } \varphi^{n+1} = \dim \varphi^n$  ( $\Rightarrow$ )  $\dim(\text{Im } \varphi^{n+1}) = \dim(\text{Im } \varphi^n)$ .

Inoltre se  $\text{Im } \varphi^{n+1} = \text{Im } \varphi^n$  allora  $\forall k > 0$   $\text{Im } \varphi^{n+k} = \text{Im } \varphi^n$ .

Infatti  $\text{Im } \varphi^{n+2} = \varphi(\varphi^{n+1}(\mathbb{R}^3)) = \varphi(\varphi^n(\mathbb{R}^3)) = \varphi^{n+1}(\mathbb{R}^3) = \text{Im } \varphi^{n+1}$

e ripetendo  $k-2$  volte questo ragionamento otteniamo  $\text{Im } \varphi^{n+k} = \text{Im } \varphi^n$ .

Siccome  $\dim \mathbb{R}^3 = 3$  dove esiste  $n_0 \leq 3$  t.c.  $\dim \text{Im } \varphi^{n_0} = \dim \text{Im } \varphi^{n_0+1}$ .

Per questo segue che  $\text{Im } \varphi^{n_0} = \text{Im } \varphi^{n_0+1} = \text{Im } \varphi^{n_0+k} \forall k \in \mathbb{N}$ .

In particolare  $\dim \text{Im } \varphi^4 = \dim \text{Im } \varphi^5$  e quindi se  $\varphi^4 \neq 0$  anche

$\varphi^5 \neq 0$ .