Secondo esonero di Geometria I (25 Gennaio 2019)

Nome e cognome dello studente: 1

Esercizio 1 Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $A_t = \begin{pmatrix} t-1 & 4 & 9-t & 4 \\ 0 & 5+t & 0 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ e sia $L_{A_t} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata.

a) Per ogni $t \in \mathbb{R}$ calcolare la dimensione del nucleo di L_{A_t}.

b) Per quali $t \in \mathbb{R}$ esistono una base B_1 di $\mathbb{R}^4$ e una base B_2 di $\mathbb{R}^3$ tali che la matrice rappresentativa di L_{A_t} rispetto alle basi B_1 del dominio e B_2 del codominio sia $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?

a) Si ha $\dim(\mathrm{Ker}(L_{A_t})) = \dim \mathbb{R}^4 - \dim(\mathrm{Im}(L_{A_t})) = 4 - rg(A_t)$.

Siccome $\det\begin{pmatrix} t-1 & 4 & 9-t \\ 0 & 5+t & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = (5+t)(4t-12)$ si ha $rg(A_t) = 3$ se $t \neq 3, -5$.

Nei casi restanti abbiamo

$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 8 & 0 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ e $A_{-5} = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

Siccome $(2\ 4\ 6\ 4) = (0\ 8\ 0\ 2) + 2(1\ -2\ 3\ -4)$, si ha $rg(A_3) = 2$

Siccome $\det\begin{pmatrix} 4 & 14 & 4 \\ 0 & 0 & 12 \\ -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} = -12 \cdot 30 \neq 0$, si ha $rg\, A_{-5} = 3$.

In conclusione, se $t \neq 3$ $\dim \mathrm{Ker}\, L_{A_t} = 1$, se $t = 3$ $\dim \mathrm{Ker}\, L_{A_t} = 2$.

b) Risposta: per ogni $t \neq 3$.

Siccome il rango di un applicazione lineare è pari al rango di una qualsiasi sua matrice rappresentativa, se $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è matrice rappresentativa per L_{A_t}, allora A_t ha rango 3 e per l'esercizio a) deve essere $t \neq 3$.

Viceversa se $t \neq 3$, la matrice ~~A_t~~ A_t ha rango 3, quindi L_{A_t} è suriettiva e $\mathrm{Ker}(L_{A_t})$ ha dimensione 1.

Sia $v_4 \neq 0$ un generatore di $\mathrm{Ker}(L_{A_t})$ e siano $v_1 v_2 v_3 \in \mathbb{R}^4$ tali che v_1, v_2, v_3, v_4 formano una base B_1 di $\mathbb{R}^4$.

Siccome $L_{A_t}(v_4) = 0$ e $L_{A_t} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ è suriettiva

$\underset{\substack{\| \\ w_1}}{L_{A_t}(v_1)}$, $\underset{\substack{\| \\ w_2}}{L_{A_t}(v_2)}$ e $\underset{\substack{\| \\ w_3}}{L_{A_t}(v_3)}$ formano una base B_2 di $\mathbb{R}^3$.

Siccome $L_{A_t}(v_1) = w_1$ $L_{A_t}(v_2) = w_2$ $L_{A_t}(v_3) = w_3$ e $L_{A_t}(v_4) = 0$, la matrice rappresentativa di L_{A_t} rispetto a B_1 e B_2 è

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Nome e cognome dello studente:

In $\mathbb{R}^3$ con la sua struttura spazio euclideo indotta dal prodotto scalare standard, sia r la retta passante per i punti $p_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $p_2 = \begin{pmatrix}3\\8\\-5\end{pmatrix}$ e sia s la retta passante per i punti $q_1 = \begin{pmatrix}-11\\10\\3\end{pmatrix}$ e $q_2 = \begin{pmatrix}-4\\8\\2\end{pmatrix}$.

a) Trovare l'equazione cartesiana di un piano π contenente r e parallelo[1] sia ad r che e ad s.

b) Calcolare la distanza tra r e s.

a) La giacitura di r è generata da $v = p_2 - p_1 = \begin{pmatrix}2\\8\\-6\end{pmatrix}$.
La giacitura di s è generata da $w = q_2 - q_1 = \begin{pmatrix}7\\-2\\-1\end{pmatrix}$.
La giacitura di π ~~contiene sia v che w~~ è generata da v e w, cioè è costituita dai vettori perpendicolari al prodotto vettoriale

$$v \wedge w = \det\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3\\ 2 & 8 & -6\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix} = -20e_1 - 40e_2 - 60e_3 = -20\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Un'equazione cartesiana della giacitura di π è data allora da $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$. Un'equazione cartesiana per π sarà allora della forma $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = d$. Imponendo il passaggio per $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ si ottiene $1 + 2\cdot 0 + 3\cdot 1 = d$ cioè $d = 4$.
Quindi l'equazione cartesiana di π è
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4$.

b) Troviamo il piano π_2 contenente s e parallelo sia a r che ad s. π_2 ha la stessa giacitura di π: perciò a equazione cartesiana della forma $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = d$ e imponendo il passaggio per q_1, si ottiene $-11 + 20 + 9 = d$, cioè $d = 18$.
Come visto a lezione la distanza tra r e s coincide con la distanza tra π e π_2. Essa è data dal modulo della proiezione di un vettore con primo estremo in π e secondo in π_2 sul sottospazio perpendicolare a π_1 e π_2.

[1]Cioè la giacitura di π deve contenere le giaciture di r ed s

Nel nostro caso $\mathrm{dist}(r, s) = \mathrm{dist}(\pi, \pi_2) = \dfrac{\left|\left\langle q_1 - p_1, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle\right|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \ldots$

$$\ldots = \frac{\left|\left\langle \begin{pmatrix}-12\\10\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle\right|}{\sqrt{14}} = \frac{14}{\sqrt{14}}$$

Nome e cognome dello studente:

Sia $A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&6\\1&6&7\end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ Sia $F_A : \mathbb{R}^3 \times R^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica definita ponendo $F_A(X,Y) := X^TAY$ per ogni X e Y in $\mathbb{R}^3$.

a) Determinare rango e indice di positività di F_A.

b) Determinare il massimo tra le dimensioni dei sottospazi di $W \subset \mathbb{R}^3$ tali che la restrizione di F_A a W è la forma bilineare nulla (motivare la risposta).

a) Siccome $\det A = \det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&6\\1&6&7\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&5\\0&5&6\end{pmatrix} = -19$, abbiamo rango$(F_A)$ = rango$(A)=3$

Sappiamo che l'indice di F_A è pari al numero di autovalori positivi dell'applicazione lineare $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ associata alla matrice A. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ i 3 autovalori di L_A (eventualmente con ripetizioni). Siccome $\det A = -19$ abbiamo $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -19$: quindi l'indice di positività di F_A può essere solo 0 oppure 2.

Siccome $Tr(A) = 10 > 0$ abbiamo $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = 10$, perciò l'indice di positività non può essere nullo e quindi è 2.

b) Il massimo cercato è 1.

Da a) segue che la forma di Sylvester della matrice rappresentativa di F_A è $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

Sia $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto a cui la matrice di F_A è $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. Abbiamo $F_A(b_2+b_3, b_2+b_3) = \dots$
$= \underbrace{F_A(b_2,b_2)}_{=1} + 2\underbrace{F_A(b_2,b_3)}_{=0} + \underbrace{F_A(b_3,b_3)}_{=-1} = 0$. Perciò $\langle b_2+b_3 \rangle$ è sottospazio di dimensione 1 su cui F_A è nulla.

Non può esistere inoltre nessun sottospazio $W \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione ≥ 2 tale che F_A ristretta a W sia la forma bilineare nulla: se tale W esistesse, per Grassmann avremmo
$\dim(W \cap \langle b_1, b_2\rangle) = \underbrace{\dim W}_{\geq 2} + \underbrace{\dim\langle b_1,b_2\rangle}_{=2} - \underbrace{\dim(W + \langle b_1,b_2\rangle)}_{\leq 3} \geq 1.$
Ci sarebbe $\underset{\neq 0}{w} \in W \cap \langle b_1, b_2\rangle$ e, siccome F_A ristretta a $\langle b_1, b_2\rangle$ è definita positiva, sarebbe $F_A(w,w) > 0$.

Nome e cognome dello studente:

a) Sia $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'applicazione lineare definita ponendo $\phi(p(x)) := p(0) + p(-1)x + p(1)x^2$ per $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$. Discutere la diagonalizzabilità di ϕ e, se ϕ è diagonalizzabile, esibire una base di autovettori.

b) Sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore non nullo e sia $v^\perp$ il sottospazio vettoriale costituito dai vettori ortogonali a v rispetto al prodotto scalare standard. Discutere la dagonalizzabilità dell'applicazione lineare $L : v^\perp \to v^\perp$ definita ponendo $L(w) := v \wedge w$ per ogni $w \in v^\perp$.

a) Per discutere la diagonalizzabilità di φ, consideriamo la base $B = \{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ e usiamo la matrice rappresentativa $M := M(\varphi)_B^B$ di φ rispetto a B per trovare autovalori ed autovettori.

Siccome
$$\varphi(1) = 1 + 1\cdot x + 1 x^2 = 1 + x + x^2 \quad \text{abbiamo } M^1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\varphi(x) = 0 + (-1)x + 1 x^2 = -x + x^2 \quad // \quad M^2 = \begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$
$$\varphi(x^2) = 0 + (-1)^2 x + (1)^2 x^2 = +x + x^2 \quad // \quad M^3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

cioè $M = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ $\quad P_\varphi(\lambda) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & -1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1 - 1) = (1-\lambda)(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$

Ci sono 3 autovalori distinti: $1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$.

Quindi φ è diagonalizzabile.

Per trovare base di autovettori per φ, cerchiamo prima una base di autovettori per $L_M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. ($L_M(X) := MX$)

L'autospazio di autovalore 1 per L_M è: $\left\{ \text{soluzioni di } \left(M - \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ldots$

$\ldots = \left\{\text{soluzioni di } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0\end{cases}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle.$

L'autospazio di autovalore $\sqrt{2}$ per L_M è: $\left\{\text{soluzioni di } \left(M - \begin{pmatrix}\sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ldots$

$\ldots = \left\{\text{soluzioni di } \begin{cases}(1-\sqrt{2})x_1 = 0\\ x_1 + (-1-\sqrt{2})x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + (1-\sqrt{2})x_3 = 0\end{cases}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\rangle,$

L'autospazio di autovalore $-\sqrt{2}$ per L_M è: $\left\{\text{soluzioni di } \left(M - \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&0&0\\0&-\sqrt{2}&0\\0&0&-\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)X = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = \ldots$

$\ldots = \left\{\text{soluzioni di } \begin{cases}(1+\sqrt{2})x_1 = 0\\ x_1 + (\sqrt{2}-1)x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + x_2 + (\sqrt{2}+1)x_3 = 0\end{cases}\right\} = \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}\right\rangle.$

Una base di autovettori per φ è allora data da

$w_1 := C_B^{-1}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 1 - x + x^2$, $w_2 := C_B^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix} = x + (1+\sqrt{2})x^2$, $w_3 := C_B^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix} = x + (1-\sqrt{2})x^2$

b) L non è diagonalizzabile perché non ci sono autovettori per L in $v^\perp$. Infatti se $w \in v^\perp$, $w \neq 0$, il prodotto vettoriale $v \wedge w$ è un vettore non nullo perpendicolare a w: perciò non è mai un multiplo di w.