II appello di Geometria I sessione estiva 2018-2019 (23 Luglio 2019).

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 1) Sia $S_1 := \{M \in M_{3,3}(\mathbb{R}) : \ rg(M) \leq 2)\} \subset M_{3,3}(\mathbb{R})$ e

sia $S_2 := \left\{ M \in M_{3,3}(\mathbb{R}) : \ M \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} > \right\} \subset M_{3,3}(\mathbb{R})$.

a) Per $i = 1, 2$ stabilire se S_i è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

b) Se S_i è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$, calcolare la sua dimensione.

a) S_1 non è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Infatti $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \in S_1$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} \in S_1$ (hanno rango 2 e 1 rispettivamente)

ma $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ha rango 3 e quindi non appartiene a S_1

S_2 è un sottospazio vettoriale di $M_{3,3}(\mathbb{R})$.

Infatti •) la matrice nulla appartiene a S_2 perché $0\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$

••) Se $M \in S_2$ e $a \in \mathbb{R}$ allora $aM \in S_2$ perché $(aM)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = a\left(M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$ in quanto $M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$.

•••) Se $M \in S_2$ e $N \in S_2$ allora $M+N \in S_2$ perché $(M+N)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + N\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ e siccome $M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$ e $N\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$ anche $M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + N\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \in < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} >$.

b) S_2 ha dimensione 7.

Sia $\varphi : M_{3,3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ la funzione definita da $\varphi(M) := M\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Per le proprietà del prodotto di matrici φ è lineare; inoltre $\varphi\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\varphi\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1/2&0\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\varphi\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1/3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, perciò φ è suriettiva.

Si ha perciò: $\dim Ker(\varphi) = \dim M_{3,3}(\mathbb{R}) + \dim \mathbb{R}^3 = 9-3=6$.

Sia $\psi : S_2 \to \mathbb{R}^3$ la restrizione di φ a S_2.

Si ha $\dim S_2 = \dim Ker\,\psi + \dim Im\,\psi = \dim Ker\,\psi + \dim < \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} > = \ldots$

$\ldots = \dim Ker\,\psi + 1$. Ma $Ker\,\varphi \subseteq S_1$ e quindi $Ker\,\psi = Ker\,\varphi$.

Perciò $\dim S_2 = \dim Ker\,\varphi + 1 = 6+1 = 7$.

Esercizio 2) a) Esibire una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ ortonormale rispetto al prodotto scalare standard e tale che $v_1 \in < \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} >$ e $v_2 \in < \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} >$.

b) Trovare una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $Av_1 = 6v_1$, $Av_2 = 0$ e $Av_3 = -6v_3$.

a) Usando l'ortonormalizzazione di Gram Schmidt si ottiene

$$v_1 = v_1/\|v_1\| = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}>_{st}}{<\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}>_{st}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

e $v_2 = \dfrac{w_2}{\|w_2\|} = \begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Per ottenere v_3 si può continuare con l'algoritmo di ortonormalizzazione oppure porre $v_3 = v_1 \wedge v_2$.

Si ottiene $v_3 = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$.

b) $\{v_1, v_2, v_3\}$ costituisce base ortonormale di autovettori per l'applicazione lineare associata ad A. I rispettivi autovalori sono 6, 0 e -6.

Posto $M = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$ si ha $M^TAM = \begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&-6\end{pmatrix}$ e

quindi (ricorda $M^T = M^{-1}$ perché $\{v_1, v_2, v_3\}$ è base ortonormale)

$A = M\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&-6\end{pmatrix}M^T$. Svolgendo i conti si ottiene

$$A = \begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&0&0\\0&0&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0\\ 12/\sqrt{6} & -6/\sqrt{6} & -6/\sqrt{6}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 4 & 4\\ 4 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Esercizio 3) Sia $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ e sia $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita ponendo, per ogni $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, $\phi(B) := BA$.
1) Mostrare che ϕ è un'applicazione lineare.
2) Trovare una base di autovettori per ϕ.

1) Per mostrare la linearità di ϕ occorre verificare

•) $\forall a \in \mathbb{R}$ e $\forall B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ si ha $\phi(aB) = a\,\phi(B)$

••) $\forall B_1, B_2 \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ si ha $\phi(B_1 + B_2) = \phi(B_1) + \phi(B_2)$.

•) è vero perché $\phi(aB) = (aB)A = a(BA) = a\,\phi(B)$

••) è vero perché $\phi(B_1+B_2) = (B_1+B_2)\cdot A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributività prodotto} \\ \text{di matrici}}}{=} B_1 A + B_2 A = \phi(B_1) + \phi(B_2)$

2) Scriviamo la matrice rappresentativa di ϕ rispetto alla base
$\mathcal{B} = \{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{b_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{b_4} \}$ di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Si ha $\phi(b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0b_1 + 1b_2 + 0b_3 + 0b_4$

$\phi(b_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 4b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 0b_4$

$\phi(b_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0b_1 + 0b_2 + 0b_3 + 1b_4$

$\phi(b_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = 0b_1 + 0b_2 + 4b_3 + 0b_4$.

La matrice cercata è $M(\phi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è

$P_\phi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 4)^2$. Gli autovalori sono 2 e -2 entrambi con molteplicità algebrica 2.

Per descrivere l'autospazio relativo a 2 occorre risolvere il sistema lineare $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lo spazio delle soluzioni di questo sistema è $\left\{ t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Quindi una base per l'autospazio di autovalore 2 per ϕ è $\{ \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} \}$. Per descrivere l'autospazio relativo a -2 occorre risolvere il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lo spazio delle soluzioni è $\left\{ s_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} : s_1, s_2 \in \mathbb{R} \right\}$. Quindi una base per l'autospazio di autovalore -2 è $\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \}$. Una base di autovettori per ϕ è data da

$\{ \overset{=b_1}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{=b_2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{=b_3}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{=b_4}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \}$.

Esercizio 4) Siano $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$ e $N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$.

1) Per $i = 1, 2, 3$ stabilire se esiste una matrice invertibile $M_i \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $M_i^{-1} N_i M_i$ è diagonale.

2) Stabilire se esiste una matrice invertibile $L \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $L^t N_2 L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) •) Non esiste M_1 invertibile tale che $M_1^{-1} N_1 M$ è diagonale.
Il polinomio caratteristico di (dell' applicazione lineare associata a) N_1 è $P_{N_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.
La molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è 2.
La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è
$m_g(1)$ = dimensione spazio delle soluzioni del sistema $\begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-1 & 0 \\ 3 & 2 & 2-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ = ..

$$3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Siccome $\underset{2}{\underset{\shortparallel}{m_a(1)}} \neq \underset{1}{\underset{\shortparallel}{m_g(1)}}$ l'applicazione lineare associata ad N_1 non è ~~[illegible]~~ diagonalizzabile: perciò non $\exists M_1$ invertibile con $M_1^{-1} N_1 M$ diagonale

••) Esiste M_2 invertibile tale che $M_2^{-1} N_2 M_2$ è diagonale.
Questo è vero per il teorema spettrale perché N_2 è simmetrica.

•••) Esiste M_3 invertibile tale che $M_3^{-1} N_3 M_3$ è diagonale.
Il polinomio caratteristico di N_3 è $P_{N_3}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$.
Siccome $N_3 \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e l'applicazione lineare associata ha 3 autovalori reali distinti, tale applicazione lineare è diagonalizzabile.
Quindi $\exists M_3$ invertibile tale che $M_3^{-1} N_3 M_3$ è diagonale.

2) Per la teoria delle forme bilineari simmetriche sappiamo che $\exists L$ invertibile tale che $L^T N_2 L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ se e solo se l'applicazione lineare associata a N_1 ha 1 autovalore negativo e 2 positivi (contati con molteplicità).
Siccome $\det N_2 = \det\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & -23 & -9 \\ 0 & -9 & 1 \end{pmatrix} = -104$, non ci sono autovalori nulli e il numero degli autovalori negativi è dispari (1 o 3).
Siccome $Tr(N_2) = 1+2+10 = 13$, c'è almeno un autovalore positivo.
L'unica possibilità è che ci sia 1 autovalore negativo e 2 positivi.
Perciò $\exists L$ invertibile tale che $L^T N_2 L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.