Esame di Geometria I (22 Febbraio 2019)

Nome e cognome dello studente: 1

Esercizio 1 Sia $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Stabilire se il sottoinsieme $A_1 := \{X \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : MX = XM\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) Stabilire se il sottoinsieme $A_2 := \{MX - XM : X \in M_{2,2}(\mathbb{R})\}$ è un sottospazio vettoriale di ~~$\mathbb{R}^3$~~. $M_{2,2}(\mathbb{R})$

a) A_1 è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

·) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_1$ perché $M \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

··) Se $X_1, X_2 \in A_1$ allora $X_1 + X_2 \in A_1$ perché

$$M(X_1+X_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributività} \\ \text{pdt matrici}}}{=} MX_1 + MX_2 \underset{\substack{\uparrow \\ X_1 \in A_1 \\ X_2 \in A_2}}{=} X_1 M + X_2 M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{distributività} \\ \text{pdt matrici}}}{=} (X_1+X_2)M$$

···) Se $a \in \mathbb{R}$ e $X_1 \in A_1$ allora $aX_1 \in A_1$

perché $(aX_1)M = a(X_1 M) \underset{\substack{\uparrow \\ X_1 \in A_1}}{=} a(MX_1) = M(aX_1)$

La moltiplicazione per ~~uno~~ scalare commuta con moltiplicazione per matrice

b) A_2 è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

·) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_2$ perché $M\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

··) Se $Y_1 \in A_2$ e $Y_2 \in A_2$ allora $Y_1 + Y_2 \in A_2$.

Infatti $Y_1 \in A_2$ vuol dire che $\exists X_1$ t.c. $Y_1 = MX_1 - X_1 M$

e $Y_2 \in A_2$ vuol dire che $\exists X_2$ t.c. $Y_2 = MX_2 - X_2 M$.

Ma allora $Y_1 + Y_2 = MX_1 - X_1 M + MX_2 - X_2 M \underset{\substack{\uparrow \\ \text{commutatività} \\ \text{somma} \\ \text{e distributività} \\ \text{pdt di matrici}}}{=} M(X_1+X_2) - (X_1+X_2)M$

e quindi $Y_1 + Y_2 \in A_2$

···) Se $a \in \mathbb{R}$ e $Y \in A_2$ allora $aY \in A_2$.

~~perché~~ Infatti $Y \in A_2$ vuol dire che $\exists X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ t.c. $Y = MX - XM$

e allora $aY = a(MX - XM) = M(aX) - (aX)M$ perciò $aY \in A_2$.

OSSERVAZIONE

La funzione $\varphi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definita da $\varphi(X) = MX - XM$ è un'applicazione lineare e si ha $A_1 = \operatorname{Ker} \varphi$ $A = \operatorname{Im} \varphi$

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 2 a) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione 3, sia $\phi : V \to V$ un'applicazione lineare. Sia $v \in V$ tale che v, $v_1 := \phi(v)$ e $v_2 := \phi(v_1)$ sono linearmente indipendenti. Sia inoltre $\phi(v_2) = 5v_2 - 6v_1$. determinare il polinomio caratteristico di ϕ e stabilire se ϕ è diagonalizzabile .

b) Trovare una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I_3 = 0_3$.[1]

a) Per calcolare il polinomio caratteristico di φ scriviamo la matrice rappresentativa di φ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v, v_1, v_2\}$. $\underbrace{}_{M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}}$

La prima colonna contiene le coordinate di $\varphi(v) \overset{0v + 0v_2}{=} v_1$ rispetto a $\mathcal{B}$

La seconda colonna contiene le coordinate di $\varphi(v_1) = 0v + 0v_1 + v_2$ rispetto a $\mathcal{B}$

La terza colonna contiene le coordinate di $\varphi(v_2) = 0v - 6v_1 + 5v_2$ rispetto a $\mathcal{B}$.

Perciò $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è

$P_\varphi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -6 \\ 0 & 1 & \cancel{5} \end{pmatrix} = -\lambda \det \begin{pmatrix} -\lambda & -6 \\ 1 & -\lambda+5 \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = \underline{-\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)}$.

Siccome V ha dimensione 3 e φ ha 3 autovalori (reali) distinti

φ è diagonalizzabile.

b) Osserviamo che nel pto a) l'uguaglianza $\varphi(v_2) = 5v_2 - 6v_1$ si può scrivere come $\varphi(\varphi(\varphi(v))) = 5\varphi(\varphi(v)) - 6\varphi(v)$ cioè

1) $\varphi(\varphi(\varphi(v))) - 5\varphi(\varphi(v)) + 6\varphi(v) = 0$. Applicando φ e $\varphi \circ \varphi$ ai due membri di ottieniamo anche

2) $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(v)))) - 5\varphi(\varphi(\varphi(v))) + 6\varphi(\varphi(v)) = 0$

3) $\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(v))))) - 5\varphi(\varphi(\varphi(\varphi(v)))) + 6\varphi(\varphi(\varphi(v))) = 0$.

1)2)3) dicono che l'applicazione lineare $\varphi\circ\varphi\circ\varphi - 5\varphi\circ\varphi + 6\varphi$ si annulla sugli elementi v, v_1, v_2 che sono una base di V: quindi è l'applicazione lineare nulla.

Sia ora $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare t.c. $\psi(e_1) = e_2$ $\psi(e_2) = e_3$ $\psi(e_3) = -4e_1 - 3e_2 - 2e_3$.

Come nel punto a) si deduce che

$\psi\circ\psi\circ\psi + 2\psi\circ\psi + 3\psi + 4\,\mathrm{id}$ è l'applicazione lineare nulla.

Siccome $\psi = L_A$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\psi\circ\psi\circ\psi - 2\psi\circ\psi + 3\psi + 4\,\mathrm{id} = L_{A^3+2A^2+3A+4I}$

e quindi $A^3 + 2A^2 + 3A + 4I_3 = O_3$.

---

[1] $I_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $0_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 3 a) Quante sono le matrici $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ di rango 2 tali che

$$M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ e } M\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}? \text{ Esibirne una.}$$

b) Quante sono le matrici simmetriche $N \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ di rango 2 tali che

$$N\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ e } N\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}?$$

c) Quante sono le matrici simmetriche $L \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ di rango 2 tali che

$$L\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R}) \text{ e } L\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}?$$

a) Le matrici $M \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ di rango 2 tali che $M\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$, $M\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$ sono quante le applicazioni lineari $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$ e $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi)=2$.

Completiamo $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$ alla base $B=\left\{\overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}, \overset{v_3}{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}\right\}$ di $\mathbb{R}^3$ e ricordiamo che $\forall w \in \mathbb{R}^3$ $\exists!$ applicazione lineare $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c. $\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ $\varphi\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$ $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=w$. Se vogliamo che $\dim(\mathrm{Im}\,\varphi)=2$ basta scegliere $w \in \mathrm{Span}\left\langle\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}\right\rangle$. Quindi le matrici cercate sono infinite. Ponendo $w=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ si trova $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$,

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-1\end{pmatrix}$$

e

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \varphi\left(\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/2\\-1/2\\1/2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\-3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\5\end{pmatrix}.$$

Perciò una possibile M è $\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ 0 & 5 & -1\\ 0 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

b) Non ci sono matrici simmetriche (di rango 2) tali che $N\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\end{pmatrix}$ $N\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$.

Infatti, se N è simmetrica, autovettori relativi ad autovalori distinti di L_N devono essere perpendicolari rispetto al prodotto scalare standard. Nel nostro caso $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 4 e $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore 6. Si ha $6 \neq 4$ e $\left\langle\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1 \neq 0$, cioè $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ non sono perpendicolari.

c) C'è un'unica matrice con le proprietà volute. Siccome L è simmetrica l'applicazione lineare associata L_L è diagonalizzabile. Siccome L ha rango 2, l'applicazione lineare associata ha un autovalore 0.

Siccome L è simmetrica un autovettore di autovalore 0 deve essere perpendicolare agli autovettori $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ di autovalore 1.

Ma lo spazio perpendicolare a $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ ha dimensione 1 ed è generato da $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. Quindi $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ deve essere autovettore di ~~da~~ autovalore 0.

Quindi L ~~è~~ deve essere l'unica matrice la cui applicazione lineare associata manda $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. (Notare che $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ formano base di $\mathbb{R}^3$).

Infine tale L è effettivamente simmetrica perché l'applicazione lineare associata ammette base perpendicolare rispetto al prodotto scalare standard

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 4 a) Stabilire se la funzione $\phi_1 : \mathbb{R}[x]_{\le 2}\times\mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}$ definita da $\phi_1(p(x),q(x)) = p(1)q(1)$ è una forma bilineare simmetrica.

b) Stabilire se la funzione $\phi_2 : \mathbb{R}[x]_{\le 2}\times\mathbb{R}[x]_{\le 2} \to \mathbb{R}$ definita da $\phi_2(p(x),q(x)) = p(1)+q(1)$ è una forma bilineare simmetrica.

c) Se ϕ_i è una forma bilineare simmetrica, calcolarne indice di positività e individuare una base per ogni sottospazio vettorale di $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ su cui la restrizione di ϕ_i è un prodotto scalare.

a) ϕ_1 è forma bilineare simmetrica.

Infatti $\forall\, p(x), p_1(x), p_2(x), q_1(x), q_2(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\le 2}$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ si ha

Bilinearità •) $\phi_1(p_1(x)+p_2(x), q(x)) = (p_1(1)+p_2(1))\,q(1) = p_1(1)q(1)+p_2(1)q(1) = \phi_1(p_1(x),q(x)) + \phi_1(p_2(x),q(x))$

$\phi_1(ap(x),q(x)) = a\,p(1)q(1) = a\,\phi_1(p(x),q(x))$

$\phi_1(p(x), q_1(x)+q_2(x)) = p(1)(q_1(1)+q_2(1)) = p(1)q_1(1)+p(1)\cdot q_2(1) = \phi_1(p(x),q_1(x))+\phi_1(p(x),q_2(x))$

$\phi_1(p(x), b\,q(x)) = p(1)\cdot b\,q(1) = b\,p(1)q(1) = b\,\phi_1(p(x),q(x))$

Simmetria ••) $\phi_1(p(x),q(x)) = p(1)\cdot q(1) = q(1)\,p(1) = \phi_1(q(x),p(x))$

b) ϕ_2 non è forma bilineare simmetrica.

Non è infatti bilineare.

Ad esempio si ha $\phi_2(1,0) = 1+0 = 1$ e $\phi_2(1,1) = 1+1 = 2$

Polinomio costante 1

ma $\phi_2(1,0) = \phi_2(1, 0\cdot 1)$ e se ϕ_2 fosse bilineare dovremmo avere $\phi_2(1,0) = \phi_2(1,0\cdot 1) = 0\,\phi_2(1,1) = 0$.

c) La matrice rappresentativa di ϕ_1 rispetto alla base $\{\overset{v_1}{1}, \overset{v_2}{x}, \overset{v_3}{x^2}\}$ di $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ è

$$\begin{pmatrix} \phi_1(1,1) & \phi_1(1,x) & \phi_1(1,x^2) \\ \phi_1(x,1) & \phi_1(x,x) & \phi_1(x,x^2) \\ \phi_1(x^2,1) & \phi_1(x^2,x) & \phi_1(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Perciò l'indice di positività di ϕ_1 è 1.

Di conseguenza ogni sottospazio di $\mathbb{R}[x]_{\le 2}$ su cui ϕ_1 è definita positiva (cioè è un prodotto scalare) ha al più dimensione 1.

Tali sottospazi sono quelli generati da un solo polinomio $p(x)$ tale che $\phi_1(p(x),p(x))>0$. Siccome, se $p(x) = a+bx+cx^2$, $\phi(p(x),p(x)) = a^2$ le basi cercate sono costituite da un polinomio $p(x) = a+bx+cx^2$ con $a \neq 0$.