

Giustificare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali.

Consegnare esclusivamente questi due fogli.

1. Sia $\phi: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ c+3d & d+c \end{pmatrix}$.

Sia $\psi: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} ab & cd \\ bc & da \end{pmatrix}$.

Discutere la linearità di ϕ e ψ .

ϕ è lineare. Infatti:

$$1) \forall M, N \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \quad \phi(M+N) = \phi(M) + \phi(N)$$

perché se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ si ha

$$\phi(M) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ c+3d & d+c \end{pmatrix} \quad \phi(N) = \begin{pmatrix} a'+2b' & 0 \\ c'+3d' & d'+c' \end{pmatrix}$$

$$\text{e } \phi(M+N) = \phi\left(\begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a+a'+2(b+b') & 0 \\ c+c'+3(d+d') & d+d'+c+c' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a+2b+a'+2b' & 0 \\ c+3d+c'+3d' & d+c+d'+c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ c+3d & d+c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+2b' & 0 \\ c'+3d' & d'+c' \end{pmatrix} =$$

$$\phi(M) + \phi(N)$$

$$2) \forall M \in M_{2,2}(\mathbb{R}) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{si ha } \phi(\lambda M) = \lambda \phi(M)$$

perché se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha $\phi(M) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ c+3d & d+c \end{pmatrix}$ e

$$\phi(\lambda M) = \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a + 2\lambda b & 0 \\ \lambda c + 3\lambda d & \lambda d + \lambda c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ c+3d & d+c \end{pmatrix} = \lambda \phi(M)$$

ψ non è lineare. Infatti $\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e

$$\psi\left(2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Giustificare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali.

Consegnare esclusivamente questi due fogli.

1. Sia $\phi: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ c+3d & d+c \end{pmatrix}$.

Sia $\psi: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ la funzione definita da $\psi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} ab & cd \\ bc & da \end{pmatrix}$.

Discutere la linearità di ϕ e ψ .

Soluzioni alternative per linearità di ϕ :

Sia $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ base standard di $M_2(\mathbb{R})$.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$

Osserviamo che $(\tilde{C}_B^{-1} \circ L_A \circ C_B)\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \tilde{C}_B^{-1} \circ L_A \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \tilde{C}_B^{-1} \begin{pmatrix} a+2b \\ 0 \\ c+3d \\ d+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ 0 \\ c+3d \\ d+c \end{pmatrix}$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

Quindi $\phi = \tilde{C}_B^{-1} \circ L_A \circ C_B$ e ϕ è lineare perché composizione di applicazioni lineari.

2. Sia $A_1 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} : p(x)(x+x^2) \in \langle x^3, x^4 \rangle\}$, stabilire se A è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.
 Sia $A_2 := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 1} : p(x)p(1) \in \langle x \rangle\}$ stabilire se A è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.
 Se A_i è un sottospazio vettoriale esibirne una base.

A_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Infatti

0) $0(x+x^2) = 0 \in \langle x^3, x^4 \rangle$, quindi $0 \in A_1$

1) Se $p(x) \in A_1$ e $q(x) \in A_1$ anche $p(x)+q(x) \in A_1$ perché

$$(p(x)+q(x))(x+x^2) = p(x)(x+x^2) + q(x)(x+x^2) \in \langle x^3, x^4 \rangle$$

↑
distributività
pdt polinomi

↑
perché i due addendi
sono in $\langle x^3, x^4 \rangle$
in quanto $p(x)$ e $q(x) \in A_1$

2) Se $p(x) \in A_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ anche $\alpha p(x) \in A_1$ perché

$$(\alpha p(x))(x+x^2) = \alpha (p(x)(x+x^2)) \in \langle x^3, x^4 \rangle$$

↑
associatività
pdt polinomi

perché $p(x)(x+x^2) \in \langle x^3, x^4 \rangle$
in quanto $p(x) \in A_1$

A_2 non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$.

perché $x \in A_2$, $1-x \in A_2$ ma $x + (1-x) = 1 \notin A_2$

Una base di A_1 è costituita dal solo monomio x^2 .

Infatti A_1 è costituito dai polinomi del tipo ax^2+bx+c , dove $a, b, c \in \mathbb{R}$,
 tali che $(ax^2+bx+c)(x+x^2) \in \langle x^3, x^4 \rangle$.

Ma $(ax^2+bx+c)(x+x^2) = ax^3 + (a+b)x^3 + (b+c)x^2 + cx$, quindi
 $ax^2+bx+c \in A_1$ se e solo se $\begin{cases} b+c=0 \\ c=0 \end{cases}$ cioè se e solo se $b=c=0$.

Quindi $A_1 = \{ax^2 \mid a \in \mathbb{R}\}$ e x^2 è base per A_1

Nome:

Cognome:

3.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A . Scrivere la matrice rappresentativa

di L_A rispetto alle basi $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel codominio.

Esibire basi del nucleo e dell'immagine di L_A .

La matrice rappresentativa M di L_A rispetto a B_1 e B_2 è $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.
Determiniamo le colonne M^1, M^2, M^3 di M .

M^1 contiene le coordinate di $L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 ,
siccome $L_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha $M^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

M^2 contiene le coordinate di $L_A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 ,
siccome $L_A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha $M^2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

M^3 contiene le coordinate di $L_A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B_2 ,
siccome $L_A \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, si ha $M^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una base dell'immagine di L_A è data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Una base del nucleo di L_A è costituita dal vettore $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Siccome $M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e le prime 2 colonne sono indipendenti, mentre la terza è uguale alle prime, una base dell'immagine $\text{Im}(L_M)$ di L_M è $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$ è una base del nucleo di L_M è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

Se ne deduce che una base dell'immagine di L_A è costituita dai vettori

$C_{B_2}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $C_{B_2}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$. Se ne deduce anche che

una base del nucleo di L_A è costituita dal vettore $C_{B_1}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \dots$
 $= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nome:

Cognome:

3.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ e sia $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad A . Scrivere la matrice rappresentativa

di L_A rispetto alle basi $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel dominio e $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ nel codominio.

Esibire basi del nucleo e dell'immagine di L_A .

Soluzione alternativa. Una base dell'immagine di L_A è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.
 L'immagine di L_A è il sottospazio vettoriale $\langle A^1, A^2, A^3 \rangle$ di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne di A .

Una base di $\langle A^1, A^2, A^3 \rangle$ si ottiene riducendo e scalando A e prendendo le colonne di A che corrispondono e colonne con pivot nella riduzione e scale.

Facciamo eliminazione di Gauss su A

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} - \text{I}]{\text{II} - 2\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II} + \frac{1}{3}\text{II}]{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} - 2\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I} \leftrightarrow \text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Segue che una base dell'immagine di L_A è $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

Una base del nucleo di L_A è $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Infatti Nucleo di $L_A = \{ \text{soluzioni di } Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ \text{soluzioni di } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \\ \text{t.c.} \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_2 - 6x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Però Nucleo di } L_A = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

e $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è base del nucleo di L_A

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \text{ t.c. } t \in \mathbb{R} \right\}$$

4.

Sia $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Esiste una matrice $N_1 \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ tale che $MN_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Esiste una matrice $N_2 \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ tale che $N_2M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Esiste una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$?

Non esiste una matrice N_1 tale che $MN_1 = \text{id}_{5,5}$.
 Se esistesse avremmo $L_M \circ L_{N_1} = L_{M \cdot N_1} = L_{\text{id}_{5,5}} = \text{id}_{\mathbb{R}^5}$ e siccome $\text{id}_{\mathbb{R}^5}$ è suriettiva anche L_M dovrebbe esserlo. Questo è assurdo perché $L_M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ha dominio di dimensione strettamente inferiore al codominio.

Esiste una matrice N_2 tale che $N_2M = \text{id}_{3,3}$.

Le colonne M^1, M^2, M^3 di M sono indipendenti.

Quindi si possono completare ad una base di $\mathbb{R}^5$. Cioè esistono $v_4, v_5 \in \mathbb{R}^5$

t.c. M^1, M^2, M^3, v_4, v_5 costituiscono una base di $\mathbb{R}^5$.

Comunque scegliendo $w_4, w_5 \in \mathbb{R}^3$ esiste ~~l'unica~~ applicazione

lineare $\varphi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $\varphi(M^1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(M^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\varphi(M^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\varphi(v_4) = w_4$
 e $\varphi(v_5) = w_5$

ed esiste $N_2 \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ t.c. $\varphi = L_{N_2}$.

Si ha $\varphi \circ L_M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\varphi \circ L_M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\varphi \circ L_M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Quindi si ha

$L_{N_2} \circ L_M = \varphi \circ L_M = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ e perciò $L_{N_2 \cdot M} = L_{\text{id}_{3,3}}$ e quindi $N_2 \cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Per unicità dell'applicazione lineare con fissati valori su una base)

(Perché $L_A \circ L_B = L_{A \cdot B}$)

(Perché se $L_A = L_B \Rightarrow A = B$)

4.

Sia $M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Esiste una matrice $N_1 \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ tale che $MN_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Esiste una matrice $N_2 \in M_{3,5}(\mathbb{R})$ tale che $N_2M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Esiste una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$?

Non esiste $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ t.c. $A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.
 Tamerano su questo esercizio dopo aver studiato il determinante.

Supponiamo per assurdo che esiste e sia $\varphi = L_A$.
 Osserviamo che $\varphi \circ \varphi(v) = \varphi(\varphi(v)) = -4v$ (perché $\varphi \circ \varphi(v) = L_A \circ L_A(v) = L_{A^2}v = A^2v = -4v$).

Sia $v_1 \neq 0$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ e sia $v_2 := \varphi(v_1)$.

Osserviamo che v_1 e v_2 sono indipendenti (cioè v_2 non è multiplo di v_1) perché se $v_2 = \alpha v_1$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ allora $-3v_1 = \varphi(\varphi(v_1)) = \varphi(\alpha v_1) = \alpha \varphi(v_1) = \alpha v_2 = \alpha^2 v_1$ e quindi $\alpha^2 = -4$ che è assurdo perché $\alpha^2 \geq 0 \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Inoltre $\varphi(v_2) = \varphi(\varphi(v_1)) = -4v_1$. Quindi abbiamo $\varphi(v_1) = v_2$
 $\varphi(v_2) = -4v_1$

Sia ora v_3 tale che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$.

Sarebbe $\varphi(v_3) = av_1 + bv_2 + cv_3$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\varphi(\varphi(v_3)) = \varphi(av_1 + bv_2 + cv_3) = av_2 + b\varphi(v_2) + c\varphi(v_3) = \dots$$

$$av_2 + b(-4v_1) + c(av_1 + bv_2 + cv_3) = (c-a-4b)v_1 + (cb+a)v_2 + c^2v_3$$

ma sappiamo che

$$\varphi(\varphi(v_3)) = -4v_3. \text{ Quindi } -4v_3 = (c-a-4b)v_1 + (cb+a)v_2 + c^2v_3$$

e siccome $\{v_1, v_2, v_3\}$ è base di $\mathbb{R}^3$ otteniamo

$$\begin{cases} c-a-4b=0 \\ cb+a=0 \\ c^2=-4c \end{cases} \text{ e l'ultima è assurda perché } c \in \mathbb{R} \text{ e quindi } c^2 \geq 0.$$