I appello di Geometria I sessione estiva 2018-2019 (11 Giugno 2019).

Nome e cognome dello studente:

Esercizio 1) Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e siano a e b numeri reali.

1) Sia $A_{a,b} := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : \ p(a) = p(b)\}$. Stabilire se $A_{a,b}$ è un sottospazio vettoriale e, in caso di risposta affermativa, trovare una base di $A_{0,1}$.

2) Stabilire se i due sottoinsiemi $B := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : \ (p(1))^2 = (p(2))^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e $C := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : \ (p(1))^3 = (p(2))^3\} \subseteq \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

1) $A_{a,b}$ è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

0) Il polinomio costante nullo vale 0 sia in a che in b, perciò appartiene ad $A_{a,b}$,

1) Se $p(x) \in A_{a,b}$ e $q(x) \in A_{a,b}$ allora $p(x)+q(x) \in A_{a,b}$ perché $p(a)+q(a) = p(b)+q(b)$ poiché $p(a)=p(b)$ e $q(a)=q(b)$,

2) Se $c \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in A_{a,b}$ allora $cp(x) \in A_{a,b}$ perché $c\,p(a) = c\,p(b)$ poiché $p(a)=p(b)$.

Cerchiamo una base per $A_{0,1}$.

Sia $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ con $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Si ha $p(x) \in A_{0,1} \iff p(0) = p(1) \iff \{\delta = \alpha + \beta + \gamma + \delta \iff \{\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Per risolvere questo sistema di un'equazione nelle 4 incognite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ poniamo $\delta = t_1$, $\gamma = t_2$, $\beta = t_3$ e otteniamo $\alpha = -t_2 - t_3$.

Perciò $p(x) \in A_{0,1} \iff p(x)$ è della forma $p(x) = (-t_3 - t_2)x^3 + t_3 x^2 + t_2 x + t_1$ con $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$,

cioè $p(x) = t_3(x^2 - x^3) + t_2(x - x^3) + t_1$ con $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$.

Perciò $A_{0,1} = \langle x^2 - x^3, x - x^3, 1 \rangle$. Inoltre $x^2 - x^3$, $x - x^3$ e 1 sono indipendenti perché $a(x^2 - x^3) + b(x - x^3) + c = 0 \Rightarrow (-a-b)x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \dots$

uguaglianza tra polinomi

$\dots \Rightarrow a = 0,\ b = 0,\ c = 0$.

Segue che $\{\underbrace{x^2 - x^3}_{v_1}, \underbrace{x - x^3}_{v_2}, \underbrace{1}_{v_3}\}$ è base per $A_{0,1}$.

2) B non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Infatti, il polinomio $p(x) := 2x - 3$ è in B poiché $p(1)^2 = (2 \cdot 1 - 3)^2 = (-1)^2 = 1$ e $p(2)^2 = (2 \cdot 2 - 3)^2 = 1^2 = 1$, il polinomio costante uguale a 1 è in B, ma $q(x) := p(x) + 1$ non è in B perché $(q(1))^2 = (-1+1)^2 = 0$ e $q(2)^2 = (1+1)^2 = 4$ e $4 \neq 0$.

C è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. Infatti $\forall t, s \in \mathbb{R}$ si ha $s^3 = t^3 \iff s = t$. Perciò $C = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : (p(1))^3 = p(2)^3\} = \dots$

$\dots = \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : p(1) = p(2)\} = A_{1,2}$ che abbiamo visto essere sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ nella parte 1.

Esercizio 2) 1) Per $t \in \mathbb{R}$, sia $M_t = \begin{pmatrix} 0 & t & 1 & 1 \\ -t & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -t \\ -1 & -1 & t & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare $L_{M_t} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associata alla matrice M_t.
2) Quali numeri interi si possono ottenere come rango di una matrice di $M_{5,5}(\mathbb{R})$ antisimmetrica.

1) Si ha $\det M_t = \det \begin{pmatrix} t & t & 0 & 0 \\ -t & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -t \\ 0 & 0 & t & t \end{pmatrix} = \dots \leftarrow$ (ho sottratto la seconda riga alla prima e la terza riga alla quarta)

$\dots = t \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -t \\ 0 & t & t \end{pmatrix} - t \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -t \\ 0 & t & t \end{pmatrix} = t \cdot 0 - t \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -t \\ 0 & t & t \end{pmatrix} = t^4.$

Sviluppo Laplace I^a riga

Perciò, se $t \neq 0$ $\dim(\mathrm{Im}(L_{M_t})) = \text{rango } M_t = 4$.
Se $t = 0$ $\dim(\mathrm{Im}(L_{M_t})) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$.

2) I possibili ranghi di matrici antisimmetriche in $M_{5,5}(\mathbb{R})$ sono 0, 2 e 4.
Le matrici $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono antisimmetriche in $M_{5,5}(\mathbb{R})$ e hanno rango 0, 2 e 4 rispettivamente.

*** Inoltre ogni matrice antisimmetrica non può avere rango pari.
* Infatti la matrice nulla è l'unica matrice antisimmetrica in $M_{1,1}(\mathbb{R})$.
Se $A \in M_{n+1,n+1}(\mathbb{R})$ è antisimmetrica essa è della forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & C \\ \hline -C^T & 0 \end{array} \right)$$ con $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ antisimmetrica e $C \in \mathbb{R}^n$ e

Ci sono 2 possibilità: a) $rg(A) = rg(B)$ oppure b) $rg(A) = rg\, B + 2$.

** Infatti se C non appartiene allo spazio vettoriale generato dalle colonne di B, $(-C^T | 0)$ non appartiene allo spazio vettoriale generato dalle righe di $(B | C)$ e allora $rg\, A = rg\,(B|C) + 1 = rg\, B + 2$.
Se C appartiene allo spazio delle colonne di B esiste $x \in \mathbb{R}^n$ t.c. $Bx = C$. Ma allora $x^T B = -C^T$ e $x^T C = x^T B x = -x^T B x = 0$ perché B è antisimmetrica. Si conclude che $x^T (B|C) = (-C^T | 0)$: cioè $(-C^T | 0)$ appartiene allo spazio generato dalle righe di $(B|C)$.
Perciò $rg\, A = rg(B|C) = rg\, B$. Usando * e ** si ottiene
***

Esercizio 3) Siano $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$. Sia $L_{N_i} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare associata ad N_i.
1) Stabilire per quali i l'applicazione lineare L_{N_i} è diagonalizzabile.
2) Calcolare la traccia di N_1^{40}.

1) Il polinomio caratteristico di N_1 è

$$P_{N_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2+1)(1-\lambda).$$

L'equazione $P_N(\lambda)=0$ ha soluzioni $i, -i$ e 1 in $\mathbb{C}$.
Siccome non tutte le soluzioni complesse sono reali L_{N_1} non è diagonalizzabile

Il polinomio caratteristico di N_2 è
$P_{N_2}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. L_{N_2} ha perciò 2 autovalori: l'autovalore 1 con molteplicità algebrica 2 e l'autovalore 2 con molteplicità algebrica 1.
La molteplicità geometrica dell'autovalore 1 è

$m_g(1) = \dim(\mathrm{Ker}(L_{N_2 - I_d})) = \dim$ spazio soluzioni di $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0\right\} = \dots$

$\dots = 3 - rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-2 = 1 \neq m_a(1) = 2$. Perciò L_{N_2} non è diagonalizzabile

Il polinomio caratteristico di L_{N_3} è $P_{N_3}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$.
Gli autovalori sono 1 con molteplicità algebrica 2 e 2 con molteplicità algebrica 1.
Si ha $m_g(1) = \dim \mathrm{Ker}(L_{N_3 - I_d}) = \dim$. spazio soluzioni di $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0\right\} =$
$\dots = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$.

Inoltre $1 = m_a(2) \geq m_g(2) = 1$, perciò $m_a(2) = m_g(2) = 1$ e siccome $m_g(1) + m_g(2) = 3$ si ha che L_{N_3} è diagonalizzabile.

2) L'applicazione lineare associata ad N_1 da $\mathbb{C}^3$ in $\mathbb{C}^3$ ha 3 autovalori distinti $i, -i, 1$. Perciò è diagonalizzabile. Quindi esiste una matrice invertibile M a coefficienti complessi tale che
$N_1 = M\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1}$. Perciò $N_1^{40} = M\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1}M\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1}\dots M\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1} = \dots$

$\dots = M\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{40}M^{-1} = M\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}M^{-1} = MM^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Perciò $\mathrm{Tr}(N_1^{40}) = 3$.

Esercizio 4) 1) Sia $D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Sia $F_D : \cancel{\mathbb{R}^4 \to} \; \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione bilineare definita da $F_D(X,Y) := X^t D Y$.

1) Trovare una base per l'annullatore di F_D.

2) Trovare indici di positività e negatività di F_D.

1) Y appartiene all'annullatore di F_D se e solo se

$$X^t D Y = 0 \quad \forall\, X \in \mathbb{R}^4 \iff \langle X, DY \rangle_{st} = 0 \iff DY = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \ldots$$

perché $\langle\, , \rangle_{st}$ è definito positivo

$\leftarrow$ prodotto scalare standard

$\ldots \iff Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix}$ è soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} Y_2 + Y_3 = 0 \\ Y_1 + Y_2 + Y_4 = 0 \\ Y_1 + Y_4 = 0 \\ Y_2 + Y_3 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y_2 = Y_3 = 0 \\ Y_1 = -Y_4 \end{cases} \iff Y = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ costituisce base per annullatore di F_D.

2) Siccome $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1 < 0$ si ha indice di positività ≥ 1 e indice di negatività $\geq +1$.

Siccome $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1$ si ha indice di positività ≥ 2.

Siccome

$$\underbrace{\text{indice di positività di } F_D}_{\geq 2} + \underbrace{\text{indice di negatività di } F_D}_{\geq 1} + \underbrace{\text{dim annullatore di } F_D}_{= 1} = 4$$

si deduce

indice di positività di $F_D = 2$

indice di negatività di $F_D = 1$!