I appello di Geometria I sessione autunnale 2018-2019 (3 Settembre 2019).

Nome e cognome dello studente: 1

Esercizio 1) Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e siano a e b numeri reali.

1) Sia $V := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : \ p(1) = p(1)^2\}$. Stabilire se V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

2) Sia $W := \{p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} : \ p(1) = 2p(-1)\}$. Stabilire se W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

1) V non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
Infatti, ad esempio, il polinomio $p(x) = x$ appartiene a V perché $p(1) = 1 = p(1)^2$, ma $2p(x)$ non appartiene a V perché $2p(x) = 2$ e $(2p(x))^2 = 2^2 = 4 \neq 2$.

2) W è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
Infatti
-) il polinomio costante nullo vale o sia in 1 che in (-1) e, siccome $0 = 2(0)$, il polinomio costante nullo appartiene a W.

1) Se $p(x)$ e $q(x)$ appartengono a W $(p+q)(x) = p(x) + q(x)$ appartiene a W.
Infatti
$$(p+q)(1) := p(1) + q(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } p(x) \text{ e } q(x) \in W}}{=} 2p(-1) + 2q(-1) =: 2(p+q)(-1)$$

2) Se $a \in \mathbb{R}$ e $p(x) \in W$ allora $(ap)(x) := a\,p(x) \in W$.
Infatti:
$$(a p)(1) = a\,p(1) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{perché } p(x) \in W}}{=} a\,2p(-1) =: 2(a p)(-1)$$

Esercizio 2) Sia $H \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione $\{x + 2y + 3z = 4$ e, per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia $\pi_t \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio affine passante per $(1, 1, 1)$ e avente come giacitura il sottospazio vettoriale generato da $(3, 0, -1)$ e $(1, 1, t)$.

Calcolare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la distanza tra H e π_t.

Se $t \neq -1$ i piani H e π_t si intersecano quindi la distanza cercata è 0.

Per vedere che, se $t \neq -1$ $H \cap \pi_t \neq \emptyset$ troviamo prima l'equazione cartesiana per π_t. Siccome $\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3t-1\\3\end{pmatrix}$, l'equazione cercata è del tipo $\{x + (-3t-1)y + 3z = d$ e, imponendo il passaggio per $(1,1,1)$ si ottiene $d = 3-3t$.

L'intersezione $H \cap \pi_t$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\star \quad \begin{cases} x+2y+3z=4 \\ x+(-3t-1)y+3z = 3-3t \end{cases}.$$

Se $t \neq -1$ $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3t-1 & 3 & 3-3t \end{pmatrix} = 2 = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3t-1 & 3 \end{pmatrix}$ e per il teorema di Rouché Capelli il sistema $\star$ ammette soluzione e $H \cap \pi_t \neq \emptyset$.

Rimane da calcolare la distanza tra i piani π_{-1} e H. (π_{-1} ha equazione $x+2y+3z=6$). I due piani sono paralleli, cioè hanno la stessa giacitura e un vettore perpendicolare alle loro giaciture è $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Il punto $p=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \pi_{-1}$ e il punto $q=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in H$.

La distanza di π_{-1} da H è data dalla lunghezza della proiezione di $q-p=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ lungo la direzione di $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, cioè da $\|q-p\| \left|\cos\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\right| = 1 \left| \dfrac{\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle}{\left\|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\| \left\|\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\|} \right| = \dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

Esercizio 3) Siano $N_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $N_2 = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

1) Esiste una matrice invertibile $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $A^{-1}N_1A$ è diagonale? Esiste una matrice invertibile $B \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che $B^{-1}N_1B$ è diagonale?. In caso di risposta affermativa, esibire un esempio.

2) Esiste una matrice invertibile $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $C^{-1}N_2C$ è diagonale? Esiste una matrice invertibile $D \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che $D^{-1}N_2D$ è diagonale?. In caso di risposta affermativa, esibire un esempio.

1) Non esiste A invertibile in $M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $A^{-1}N_1A$ è diagonale. Infatti il polinomio caratteristico di N_1 è $P_{N_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \ldots$

$\ldots = \lambda^2 - 4\lambda + 5$. L'equazione $P_{N_1}(\lambda) = 0$ ha soluzioni $2 \pm i$ che non sono reali. Quindi N_1 non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$) e non esiste A tale che $A^{-1}N_1A$ è diagonale.

Esiste $B \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che $B^{-1}N_1B$ è diagonale. Siccome l'equazione $P_{N_1}(\lambda) = 0$ ha 2 soluzioni complesse distinte, N_1 è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ ed esiste $B \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ tale che $B^{-1}N_1B$ è diagonale.

Per esibire un esempio possiamo prendere come prima colonna di B una soluzione non banale del sistema $\left\{\begin{pmatrix} 3-2-i & -1 \\ 2 & 1-2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$ cioè del sistema $\{(1-i)x - y = 0$. Possiamo prendere $\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$ come prima colonna di B. Come seconda colonna di B possiamo prendere una soluzione non banale del sistema $\left\{\begin{pmatrix} 3-2+i & -1 \\ 2 & 1-2+i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$ cioè del sistema $\{(1+i)x - y = 0$

Una soluzione non banale è $\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$. Quindi possiamo esibire come esempio la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix}$.

2) Non esiste $C \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ invertibile tale che $C^{-1}N_2C$ è diagonale.

Il polinomio caratteristico di N_2 è $P_{N_2}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2$.

L'equazione $P_{N_2}(\lambda) = 0$ ha come unica soluzione 3, che è l'unico autovalore.

La molteplicità geometrica di 3 è $2 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 5-3 & -2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} = 2 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = 2-1 = 1$

Siccome $1 \neq 2$ N_2 non è diagonalizzabile. Perciò non esiste $C \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ invertibile con $C^{-1}N_2C$ diagonale.

Per lo stesso motivo non esiste $D \in M_{2,2}(\mathbb{C})$ invertibile con $D^{-1}N_2D$ diagonale.

Esercizio 4) Sia $F : \mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica con indice di positività pari a 3 e indice di negatività pari a 2.
1) Dimostrare che esiste $v \in \mathbb{R}^5$ tale che $F(v, v) = 0$.
2) Sia $W := v^{\perp_F} = \{w \in \mathbb{R}^5 : F(v, w) = 0\} \subset \mathbb{R}^5$. Determinare indice di nullità, indice di positività e indice di negatività della restrizione di F a W.

1) Per il teorema di Sylvester esiste una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} =: B$ di $\mathbb{R}^5$ tale che la matrice di F rispetto a B è $\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&-1&0 \\ 0&0&0&0&-1 \end{pmatrix}$.

Ponendo $v := v_1 + v_4$ si ha $F(v, v) = F(v_1+v_4, v_1+v_4) = F(v_1, v_1) + 2F(v_1, v_4) + F(v_4, v_4) = \dots$

Bilinearità e simmetria

$\dots = 1 + 0 - 1 = 0$.

2) L'indice di positività di $F_{|W}$ è $p = 2$, l'indice di negatività di $F_{|W}$ è $m = 1$ e l'indice di nullità di $F_{|W}$ è $z = 1$.
Per mostrarlo facciamo due osservazioni preliminari

a) $\dim W = 4$. Infatti W è il nucleo dell'applicazione lineare $F_v : V \to \mathbb{R}$ definita da $F_v(w) = F(v, w)$. $\forall w \in V$.
Siccome F è non degenere (ha indice di nullità 0) si ha $\dim W = \dim(\mathrm{Ker}(F_v)) = \dim V - \dim(\mathrm{Im}(F_v)) = 5 - 1 = 4$.

b) Siccome l'indice di positività di F è 3, esiste un sottospazio vettoriale $V_+ \subset V$ di dimensione 3 tale che $F_{|V_+}$ è definita positiva. Analogamente, siccome l'indice di negatività di F è 2, esiste un sottospazio $V_- \subset V$ di dimensione 2 tale che $F_{|V_-}$ è definita negativa.

Siccome $\dim W = 4$ abbiamo $p + m + z = 4$.
Siccome $v \in W$ e $F(v, w) = 0 \ \forall w \in W$ abbiamo $z \geq 1$.
Siccome $\dim V_+ \cap W = \underbrace{\dim V_+}_{=3} + \underbrace{\dim W}_{=4} - \underbrace{\dim(V_+ + W)}_{\leq \dim(\mathbb{R}^5) = 5} \geq 2$ e $F_{|V_+ \cap W}$ è definita positiva abbiamo $p \geq 2$.
Siccome $\dim V_- \cap W = \underbrace{\dim V_-}_{=2} + \underbrace{\dim W}_{=4} - \underbrace{\dim(V_- + W)}_{\leq 5} \geq 1$ e $F_{|V_- \cap W}$ è definita negativa abbiamo $m \geq 1$

Infine $p + m + z = 4$, $z \geq 1$, $p \geq 2$ e $m \geq 1$ implica $p = 2$, $m = 1$ e $z = 1$.