

## Foglio di esercizi N. 6

1. La funzione è uguale a

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x \leq 2 \\ (2-x)e^{-\frac{1}{2}x} & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Si ha

$$D\left((x-2)e^{-\frac{1}{2}x}\right) = e^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}(x-2)e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(4-x),$$

per cui

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(4-x) & \text{se } x < 2 \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}(x-4) & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{se } x < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{se } 2 < x < 4 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 4 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} f \text{ crescente} & \text{in } (-\infty, 2] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [2, 4] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [4, +\infty). \end{cases}$$

In conclusione il più grande intervallo illimitato superiormente su cui la funzione  $f$  è monotona (crescente) è  $[4, +\infty)$ .

2. Si ha  $f'(x) = e^x(x-3)$ ,

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{se } x < 3 \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 3 \end{cases} \quad \text{e quindi} \quad \begin{cases} f \text{ decrescente} & \text{in } (-\infty, 3] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [3, +\infty). \end{cases}$$

Dunque  $f$  non è decrescente in alcun intervallo illimitato superiormente. La risposta, in termini di insiemi, è *l'insieme vuoto*.

3. Si ha  $D\left((x^2-4)e^{x/3}\right) = 2xe^{x/3} + \frac{1}{3}(x^2-4)e^{x/3} = \frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4)$ . Dato che

$$|x^2-4| = \begin{cases} x^2-4 & \text{se } |x| \geq 2 \\ 4-x^2 & \text{se } |x| \leq 2, \end{cases}$$

si ha

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4) & \text{se } |x| \geq 2 \\ -\frac{1}{3}e^{x/3}(x^2+6x-4) & \text{se } |x| \leq 2. \end{cases}$$

Le due radici di  $x^2+6x-4$  sono  $3 \pm \sqrt{5}$ . Dato che

$$-2 < 3 - \sqrt{5} < 2 < 3 + \sqrt{5},$$

si ha

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{se } x < -2 \\ f'(x) < 0 & \text{se } -2 < x < 3 - \sqrt{5} \\ f'(x) > 0 & \text{se } 3 - \sqrt{5} < x < 2 \\ f'(x) < 0 & \text{se } 2 < x < 3 + \sqrt{5} \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > 2 \end{array} \right. \quad \text{e quindi} \quad \left\{ \begin{array}{ll} f \text{ crescente} & \text{in } (-\infty, -2] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [-2, 3 - \sqrt{5}] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [3 - \sqrt{5}, 2] \\ f \text{ decrescente} & \text{in } [2, 3 + \sqrt{5}] \\ f \text{ crescente} & \text{in } [3 + \sqrt{5}, +\infty). \end{array} \right.$$

Dunque gli intervalli su cui  $f$  è crescente sono quelli contenuti in  $(-\infty, 2] \cup [3 - \sqrt{5}, 2] \cup [3 + \sqrt{5}, +\infty)$ .

4. Si ha  $f'(x) = e^x \left( (\log(x-3))^2 + 2 \log(x-3) \frac{1}{x-3} \right) = e^x \frac{\log(x-3)}{x-3} ((x-3) \log(x-3) + 2)$ .

Dobbiamo esaminare il segno di  $\log(x-3)((x-3) \log(x-3) + 2)$  per  $x > 3$  (dato che  $e^x > 0$  e  $x-3 > 0$ ).

Si ha  $\log(x-3) > 0$  se e solo se  $x > 4$ , mentre, dato che per  $x = 4$  si ha  $(x-3) \log(x-3) + 2 = (4-3) \log(4-3) + 2 = 2$  si ha che  $(x-3) \log(x-3) + 2 > 0$  su un intervallo  $[\alpha, +\infty)$  per un certo  $\alpha < 4$  Dunque

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{su } [\alpha, 4) \\ f'(x) > 0 & \text{su } (4, +\infty), \end{array} \right.$$

e quindi  $a = 4$ .

5. Si ha

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\log 3x} & \text{se } 0 < x < \frac{1}{3} \\ \frac{x}{\log 3x} & \text{se } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Dato che  $D\left(\frac{x}{\log 3x}\right) = \frac{\log 3x - 1}{(\log 3x)^2}$  si ha

$$D\left(\frac{x}{\log 3x}\right) > 0 \text{ se e solo se } x > \frac{e}{3}.$$

e quindi

$$\left\{ \begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{3} \\ f'(x) < 0 & \text{se } \frac{1}{3} < x < \frac{e}{3} \\ f'(x) > 0 & \text{se } x > \frac{e}{3}. \end{array} \right.$$

e  $f$  è crescente negli intervalli contenuti in  $(0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{e}{3}, +\infty)$ .

6. Derivando la funzione  $f(x) = \frac{\pi - \arctan(1+x^2)}{\pi + \arctan(1+x^2)} = \frac{2\pi}{\pi + \arctan(1+x^2)} - 1$  si ottiene

$$f'(x) = 2\pi \frac{-1}{(\pi + \arctan(1+x^2))^2} \cdot \frac{1}{1 + (1+x^2)^2} \cdot 2x.$$

Si ha  $f'(x) < 0$  se e solo se  $x > 0$  e quindi  $f$  è decrescente negli intervalli contenuti in  $[0, +\infty)$ .