

Diario delle lezioni

28/9/2009: Introduzione al corso. Simboli. Operazioni insiemistiche. Insiemi numerici: numeri naturali, interi, razionali e reali. I numeri razionali come sottoinsieme dei numeri reali (numeri periodici). Sottoinsiemi dei numeri reali. Definizione di maggiorante, minorante, massimo e minimo, estremo superiore e inferiore. Esempi.

30/9/2009: Esempi. La proprietà di completezza dei numeri reali. Dimostrazione della proprietà di completezza.

1/10/2009: Caratterizzazione degli estremi superiori e inferiori. Seconda versione della proprietà di completezza (esistenza dell'elemento separatore). Numeri irrazionali. Esempi: radice di 2, logaritmo in base 2 di 3. Densità dei razionali nei reali. La proprietà di completezza non vale per i numeri razionali.

5/10/2009: Esercizi di logica. Nozione di funzione. Funzioni iniettive, suriettive e biiettive. Esempi. Prodotto cartesiano di insiemi. Grafici di funzioni. Funzioni di variabile reale a valori reali.

7/10/2009: Esempi di grafico di funzione di variabile reale a valori reali. Operazioni sui grafici di funzione. Funzioni monotone. Esistenza di massimi e minimi per funzioni monotone. Funzioni invertibili. Grafico della funzione inversa. Grafici di funzioni elementari: potenze con esponente intero, radici n-esime.

8/10/2009: Esercizio sulla funzione inversa. Grafici di funzioni elementari: potenze con esponente razionale e reale, esponenziali, logaritmi. Principio di induzione, esempi, esercizi.

12/10/2009: Successioni. Definizione di limite di successione. Definizione che usa gli intorni sferici. Successioni convergenti, divergenti e irregolari. Verifica del limite usando la definizione. Esempi. Esercizi su massimi e minimi di insiemi.

14/10/2009: Esercizi su massimi e minimi di insiemi. Unicità del limite. Limiti di successioni monotone. Il numero di Nepero.

15/10/2009: Limitatezza delle successioni convergenti. Teorema della permanenza del segno. Esercizi. Calcolo dei limiti di successioni. Forme indeterminate della somma del prodotto e della divisione. Teorema del confronto.

19/10/2009: Esempi: limiti di rapporti di polinomi. Teorema dei due carabinieri. Criterio del rapporto. Successioni divergenti: potenze, esponenziali, logaritmo, fattoriale. Confronti tra queste successioni. Radice n-esima di n.

21/10/2009: Sottosuccessioni. Esempi. Limiti di sottosuccessioni per successioni che ammettono limite. Criterio di non esistenza del limite per una successione. Esempi. Teorema di Bolzano Weierstrass. Ogni successione ammette una sottosuccessione che ha limite. Successioni di Cauchy. Le successioni convergenti sono di Cauchy.

22/10/2009: Le successioni di Cauchy sono limitate. Le successioni convergenti sono di Cauchy. Cenni di topologia. Punti di accumulazione di sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali. Esempi. I punti di accumulazione di un insieme A sono limiti di successioni a valori in A. Insiemi aperti. Esempi. Insiemi chiusi. Esempi. Caratterizzazione degli insiemi chiusi mediante i punti di accumulazione: Un sottoinsieme dell'insieme dei numeri reali è chiuso se e soltanto se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Insiemi compatti per successioni.

26/10/2009: Gli intervalli chiusi e limitati sono compatti. Gli insiemi compatti sono gli insiemi chiusi e limitati. Esercizi. Definizione di limite di funzione

con intorni sferici. Esplicitazione della definizione di limite in tutti i casi. Esempi.

28/10/2009: Esempi di verifica della definizione di limite. Limiti di successioni come particolari limiti di funzioni. Limite destro e sinistro. Limiti destri e sinistri di funzioni monotone. Teorema sul limite della composizione di funzioni. Esempi.

29/10/2009: Limiti di composizione di funzioni e successioni. Limiti di potenze, esponenziali e logaritmi. Teorema dei carabinieri per limiti di funzioni. Proposizione sul calcolo dei limiti di funzioni. Forme indeterminate delle potenze. Calcolo del limite di $f(x)^{g(x)}$. Esempi, esercizi.

2/11/2009: Teorema ponte fra la teoria dei limiti di successioni e la teoria dei limiti di funzioni. Limiti notevoli.

4/11/2009: Esercizi. Simboli di Landau: o-piccolo e loro proprietà. Equivalenza asintotica. Esempi. Teorema del confronto per limiti di funzioni. Teorema della permanenza del segno. Definizione di continuità in un punto, definizione di continuità in un punto con intorni sferici. Continuità in un punto in termini di successioni. Continuità della funzione composta. Classificazione dei punti di discontinuità: discontinuità eliminabile.

5/11/2009: Classificazione dei punti di discontinuità: discontinuità di salto e discontinuità di seconda specie. Esempi. Le funzioni monotone discontinue hanno discontinuità di salto. Funzioni continue nel loro dominio di definizione. Esempi. Teorema degli zeri. Teorema dei valori intermedi. Conseguenze: esistenza della radice quadrata di 2, le funzioni continue mandano intervalli in intervalli. Determinazione dell'immagine di alcune funzioni elementari. Le funzioni continue mandano compatti in compatti. Il teorema di Weierstrass: una funzione continua definita su un compatto ammette massimo e minimo.

9/11/2009: Teorema di Weierstrass: una funzione continua definita su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo. Esempi. Il teorema di Weierstrass non vale per funzioni continue su intervalli non chiusi e limitati. La funzione inversa di una funzione continua strettamente monotona è continua. Uniforme continuità. Le funzioni uniformemente continue sono continue. Le funzioni uniformemente continue su un insieme limitato sono limitate. Teorema di Heine: le funzioni continue su un compatto sono uniformemente continue. Definizione di rapporto incrementale. Rapporto incrementale e monotonia. La derivata di una funzione in un punto. Calcolo di derivate di funzioni elementari. Derivata dell'esponenziale e del logaritmo.

11/11/2009: Calcolo dei limiti con o-piccoli. Continuità delle funzioni derivabili. Derivate delle funzioni seno e coseno. Derivata di somma e prodotto e quoziente di funzioni derivabili. Punti di non derivabilità: punti di flesso a tangente verticale, punti angolosi e punti di cuspidi. Derivata della composizione di funzioni derivabili. Derivata di $f(x)^{g(x)}$.

12/11/2009: Derivata della composizione di funzioni derivabili. Derivata della funzione inversa. Esempi. derivata di arcoseno, arcocoseno e arcotangente. Uso delle derivate nel calcolo delle forme indeterminate di tipo 0 su 0. Esempi. Massimi relativi e assoluti, esempi. Teorema di Fermat.

16/11/2009: Teorema di Rolle: interpretazione geometrica. Teorema di Lagrange: interpretazione geometrica e fisica. Teorema di Cauchy. Applicazione del teorema di Cauchy: il teorema di de l'Hopital. Esempi di limiti in cui il teorema di de l'Hopital non si applica. Esempi di calcolo di limiti con il Teorema di de l'Hopital.

18/11/2009: Applicazione del teorema di de l'Hopital: relazione tra la derivata in un punto e il limite della funzione derivata. Esempi. Esercizio sull'esistenza del massimo per un funzione continua definita su un intervallo aperto. Esercizio sull'uniforme continuita' di una funzione continua definita su un intervallo aperto e limitato. Esercizio sulla determinazione dell'immagine di una funzione derivabile su un intervallo.

19/11/2009: Applicazioni del teorema di Lagrange: relazioni tra la monotonia di una funzione il segno della sua derivata. Una funzione derivabile su un intervallo e' costante se e solo se la derivata e' identicamente nulla. Una funzione derivabile su un intervallo e' monotona se e solo se la sua derivata non cambia segno. Definizione di asintoto orizzontale, verticale o obliquo. Esempi. Studio del grafico di funzione. Convessita' di sottoinsiemi del piano cartesiano. Convessita' di funzioni definite su un intervallo. Definizione ed esempi.

30/11/2009: Convessita' di funzioni definite su un intervallo: definizione e condizioni equivalenti. Criteri di convessita' per funzioni derivabili. Criterio di convessita' per funzioni derivabili due volte. Definizione di flesso. Esempi. Studio del grafico di funzione.

2/12/2009: Esempio di limite che non puo' essere calcolato usando solo i limiti notevoli introdotti sino ad ora. Polinomio di Taylor di grado n centrato in x_0 di una funzione derivabile n volte in x_0 . Determinazione dei coefficienti. Teorema sulla formula di Taylor con resto di Peano. Polinomi di Taylor di e^x , $\sin x$ e $\cos x$. Unicita' del polinomio di Taylor.

3/12/2009: Polinomi di MacLaurin di $\ln(1+x)$, $1/1+x$. Esempi di calcolo dei limiti con formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor con resto di Lagrange.

7/12/2009: Esercizi sul calcolo di limite con formula di Taylor con resto di Peano. Esercizi sul calcolo dei polinomi di Taylor usando i polinomi di MacLaurin noti. Esercizi sul calcolo della derivata di grado alto in un punto con l'uso dei polinomi di MacLaurin noti.

9/12/2009: Formula di Taylor con resto di Lagrange. Approssimazioni numeriche. Esempi: $\sin(1)$, \sqrt{e} . Irrazionalita' di e . Serie di Taylor centrate in 0 di $1/1-x$ e e^x . Teorema sulle serie di Taylor.

10/12/2009: Serie di Taylor di $\cos(x)$, $1/1+x$, $\sin(x)$. Criterio per massimi e minimi locali per funzioni derivabili n volte. Integrale di funzione positiva come area. Calcolo dell'area del sottografico di 2^x tra 0 e 1. Partizione di un intervallo chiuso e limitato. Somme superiori ed inferiori di una funzione limitata associate ad una partizione. Integrale superiore ed inferiore di una funzione limitata. Definizione di funzione integrabile e di integrale di una funzione integrabile.

14/12/2009: Caratterizzazione delle funzioni integrabili. Esempi di funzioni integrabili. Teorema sull'integrabilita' delle funzioni continue su un intervallo chiuso e limitato. Proprietà dell'integrale. Teorema della media integrale. La funzione integrale di una funzione integrabile. Continuita' della funzione integrale.

16/12/2009: Teorema fondamentale del calcolo integrale. Applicazioni: limiti con funzioni integrali e derivata di $\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt$. Primitive di una funzione continua. Formula fondamentale del calcolo integrale. Integrale indefinito di funzione continua. Integrazione per parti.

18/12/2009: Integrazione per parti. Esempi: $\int (p(x) \ln(x))dx$, $\int (p(x) \arctan(x))dx$, $\int p(x)e^x dx$, $\int p(x) \sin(x)dx$, $\int p(x) \cos(x)dx$ $\int e^x \cos(x)dx$,

$\int \sin^2(x)dx$ dove $p(x)$ é un qualsiasi polinomio. Integrazione di $1/q(x)$ dove $q(x)$ é un polinomio di secondo grado con radici reali. Integrazione per sostituzione. Esempi: $\int (\ln^2(x)/x)dx$, $\int (x^2/(x^6 + 1))dx$.

21/12/2009: Esercizi su calcolo dei limiti con formula di Taylor. Esercizi sulla determinazione del numero delle soluzioni di un'equazione. Esercizi sulla derivata della funzione inversa. Esercizi sui punti di non derivabilita'.

7/01/10: Integrazione per sostituzione. Esempi di calcolo di integrali definiti e indefiniti. Integrazione delle funzioni razionali: Integrale di $1/p(x)$ dove $p(x)$ é un qualsiasi polinomio di secondo grado.

11/01/10: Esempio di funzione limitata non integrabile: la funzione di Dirichlet. Integrazione delle funzioni razionali: $\int (p(x)/q(x))dx$ dove $p(x)$ é un polinomio di primo grado e $q(x)$ é un polinomio di secondo grado privo di radici reali. Integrazione delle funzioni razionali nel caso generale. Divisione con resto fra polinomi e riduzione al caso in cui il grado del numeratore é strettamente minore di quello del denominatore. Decomposizione dei polinomi in prodotti di termini di primo grado e secondo grado senza radici. Scomposizione di Hermite. Esempi di integrali di funzioni razionali. Integrali che si riducono ad integrali di funzioni razionali: se $f(x)$ é funzione razionale $\int f(e^x)dx = \int f(t)/t dt$.

13/01/10: Sostituzioni che riducono ad integrali di funzioni razionali di una variabile gli integrali del tipo $\int R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$. Aree di insiemi illimitati del piano. Definizione di integrale improprio. Caso del dominio é illimitato, caso delle funzioni illimitate. Esempi fondamentali di funzioni integrabili in senso improprio. $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$ é integrabile in senso improprio su $[e, +\infty]$ se e solo se $(\alpha > 1)$ o $(\alpha = 1 \text{ e } \beta > 1)$.

14/01/10: Integrali impropri. Criterio del confronto. Criterio del confronto asintotico. Criterio del confronto asintotico generalizzato. Esempi. Assoluta integrabilita' in senso improprio.

18/01/10: Assoluta integrabilita' in senso improprio. Le funzioni assolutamente integrabili in senso improprio sono integrabili in senso improprio. Esempio di funzione integrabile non assolutamente integrabile: $\sin(x)/x$. Generalizzazione del precedente esempio. Esercizi: discussione della convergenza di $\int_{e^3}^{e^4} \frac{e^{x^2}}{\ln(x)-3} dx$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi/2 - \arctan x} dx$. Integrali impropri e asintoti della funzione integrale. Esistenza dell'asintoto obliquo di $\int_1^x e^{1/t^2} dt$.

20/01/10: Serie numeriche. Definizione. Condizione necessaria per la convergenza. Studio della convergenza della serie geometrica. Le serie sono particolari integrali impropri: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} a_{[x]} dx$. La convergenza dell'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ equivale a quella della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ se f é funzione positiva decrescente. Esempio di funzione integrabile su $[0, +\infty)$ ma non tendente a 0 per x che tende a $+\infty$: $\sin(x^2)$.

21/01/10: Serie di Taylor. Serie di Taylor di $\arctan x$ e $\ln(1+x)$. Assoluta convergenza per serie. Le serie assolutamente convergenti sono convergenti. Criterio del confronto per serie. Criterio del confronto asintotico per serie. Confronto asintotico generalizzato per serie. Esempi.

25/01/10: Criteri di convergenza per serie. Criteri del rapporto e della radice ennesima. Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1$ o $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$ la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converge. Esempi. Il criterio di Leibniz.

27/01/10: $0,9 = 1$. Rappresentazione come frazione dei numeri periodici.

Introduzione dei numeri complessi. Modulo e argomento di un numero complesso. Forma cartesiana e forma trigonometrica. Operazioni con i numeri complessi: somma, prodotto e potenza. Coniugato di un numero complesso. Relazioni del coniugio con la somma e il prodotto: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ e $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

28/01/10: Disuguaglianza triangolare. Limiti di successioni a valori complessi, definizioni equivalenti. Serie a termini complessi. La convergenza assoluta di una serie a termini complessi implica la convergenza della serie. Definizione di e^z , $\sin(z)$ e $\cos(z)$ per un qualsiasi numero complesso z . La formula di Eulero: $e^{iz} = \cos(z) + i \sin(z)$.

01/02/10: Inverso di un numero complesso. Forma esponenziale di un numero complesso. Radici n-esime dell'unita'. Radici n-esime di un qualsiasi numero complesso. Soluzioni dell'equazione di secondo grado a coefficienti complessi. Esempi. Teorema fondamentale dell'algebra e decomposizione di un polinomio in fattori lineari.

03/02/10: Conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra: decomposizione di un polinomio a coefficienti reali in prodotto di polinomi di primo grado e secondo grado senza radici. Integrazione di $1/(x^4 + 1)$. Esercizi sugli integrali impropri.

04/02/10: Esercizi sulle serie e sui numeri complessi.