Diario del corso di Geometria 1

January 22, 2019

Prima lezione (1-10-2018).
Presentazione del corso. Richiami sullo spazio vettoriale dei vettori applicati in un punto. Richiami sugli insiemi, sui prodotti cartesiani e sulle funzioni. Definizione di Campo. Esempi: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_p$.

Seconda lezione (2-10-2018).
Definizione di spazio vettoriale. Esempi: $\mathbb{K}^n$, $M_{m,n}(\mathbb{K})$, $Funz(X,\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[x]$.

Terza lezione (3-10-2018).
Definizione di sottospazio vettoriale e sue varianti. I sottospazi vettoriali sono spazi vettoriali. Esempi e controesempi: intersezione di 2 sottospazi vettoriali, unione di 2 sottospazi vettoriali. Trasposizione di matrici. Matrici simmetriche e antisimmetriche.

Quarta lezione (5-10-2018). Somma di sottospazi vettoriali. Sottospazio vettoriale generato da un sottoinsieme dello spazio vettoriale ambiente. Prodotto di matrici. Il prodotto di matrici non è commutativo. Proprietà distributiva e associativa del prodotto di matrici.

Quinta lezione (8-10-2018). Sistemi lineari. Matrici associate ad un sistema lineare. Matrici a scala. Soluzioni di un sistema con matrice associata a scala. Lemma fondamentale per la risoluzione dei sistemi lineari. Operazioni elementari per riga. Riduzione di una sistema in un sistema equivalente con matrice associata a scala: algoritmo di eliminazione di Gauss.

Sesta lezione (9-10-2018). Esempi di risoluzione di sistemi lineari tramite eliminazione di Gauss: sistemi incompatibili, sistemi con soluzione unica, sistemi con infinite soluzioni. Teorema di struttura delle soluzioni di un sistema lineare. Sottospazi affini (definizione naïf come sottoinsiemi di uno spazio vettoriale). Caratterizzazione uguaglianza tra sottospazi affini.

Esercitazione Prof. Lipparini (10-10-2018).

Settima lezione (12-10-2018). La giacitura di un sottospazio affine come insieme delle differenze tra coppie dei suoi punti. Sottospazio affine generato da un insieme finito di punti. Confronto tra sottospazi affini e sottospazi vettoriali. Definizione (generale) di spazio affine. Esempio fondamentale: lo spazio affine $\mathbb{A}_V$ associato ad un spazio vettoriale V. Discussione del caso particolare in cui $V = \mathbb{K}^n$. Definizione generale di sottospazio affine. Confronto con la definizione naïf nel caso in cui lo spazio affine ambiente è $\mathbb{A}_V$. I sottospazi affini ereditano una struttura di spazio affine dallo spazio affine ambiente.

Ottava lezione (15-10-2018). Osservazioni sulla risoluzione di un sistema lineare: un sistema lineare è compatibile se e solo se l'eliminazione di Gauss non produce pivot nell'ultima colonna della matrice completa associata, un sistema lineare omogeneo con più incognite che equazioni ammette sempre soluzione non banale. Sistemi di generatori per uno spazio vettoriale. Esempi standard di generatori per $\mathbb{K}[x]$, $\mathbb{K}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Esempi non standard, riduzione della verifica a risoluzione di sistema lineare. Sistemi di vettori linearmente dipendenti e indipendenti. Esempi, riduzione della verifica della definizione a risoluzione di sistema lineare.

Nona lezione (16-10-2018). Esempi standard di sitemi di vettori linearmente indipendenti per $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $\mathbb{K}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Conseguenze elementari di lineare dipendenza e indipendenza. Lemma di Steinitz. Basi (finite) di uno spazio vettoriale. Dimensione di uno spazio vettoriale. Caratterizzazioni della nozione di base: sistemi indipendenti massimali e sitemi di generatori minimali.

Decima lezione (17-10-2018). Esercitazione.

Undicesima lezione (19-10-2018). Esempi standard di basi $\mathbb{K}[x]_{\leq n}$, $\mathbb{K}^n$ e $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Basi in spazi vettoriali di dimensione fissata. Proprietà fondamentale di una base finita: ogni vettore si scrive in modo unico come combinazione lineare degli elementi della base. Gli spazi vettoriali finitamente generati hanno una base finita. Algoritmo di estrazione della base da un sitema di generatori. Completamento di un sistema di vettori indipendente a una base (in uno spazio vettoriale di dimensione finita). Enunciato della formula di Grassmann. La somma di sottospazi finitamente generati è finitamente generata.

Dodicesima lezione (22-10-2018). Un sottospazio di uno spazzio vettoriale finitamente generato è finitamente generato. Dimostrazione della formula di Grassmann. Il caso della somma diretta.

Esercitazione Prof. Lipparini (24-10-2018).

Tredicesima lezione (25-10-2018). Varianti sulla formula di Grassmann: il caso della somma diretta e la formula di Grassmann nel caso affine. Dimensione di un sottospazio affine. Sottospazio generato da due sottospazi affini: caso con intersezione vuota e caso con intersezione non vuota: esempi. Equazioni parametriche e cartesiane dei sottospazi affini di $\mathbb{K}^n$. Metodo per passare da eqauzioni parametriche a equazioni cartesiane. Metodo per trovare una base per il sottospazio generato da un sistema finito di vettori: una base del sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ generato delle colonne di una matrice A è data dalle colonne corrispondenti a colonne con pivot in una riduzione a scala di A ottenuta con operazioni elementari per riga.

Quattordicesima lezione (31-11-2018). Esercitazione.

Quindicesima lezione (5-11-2018). Applicazioni lineari. Esempio fondamentale: l'applicazione lineare associata ad una matrice. Applicazione lineare delle coordinate rispetto ad una base. Applicazione lineare definita tramite i suoi valori su una base. Ogni applicazione lineare da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ è la moltiplicazione per una matrice. Definizione di isomorfismo. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare. Caratterizzazione dell'iniettività tramite nullità del nucleo. Generatori del sottospazio immagine. Relazione tra dimensione del dominio del nucleo e dell'immagine di un'applicazione lineare.

Sedicesima lezione (6-11-2018). Isomorfismi tra spazi vettoriali della stessa dimensione. La composizione di due applicazioni lineari è lineare. L'inversa di un'applicazione lineare e' lineeare. Due spazi vettoriali fnitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Associatività del prodotto di matrici (usando le applicazioni lineari). Matrici invertibili e automorfismi di $\mathbb{K}^n$. Una matrice quadrata che ammette inversa destra è invertibile.

Diciassettesima lezione (7-11-2018). Rango di un'applicazione lineare. Rango di una matrice. Uguaglianza del rango per righe e del rango per colonne. Teorema di Rouché-Capelli. Matrice rappresentativa di un'applicazione lineare tra spazi vettoriali rispetto ad una base del dominio e una del codominio. Proprietà fondamentale della matrice rappresentativa.

Diciottesima lezione (9-11-2018). Descrizione della matrice rappresentativa attraverso le sue colonne. Esempio: la matrice rappresentativa di un applicazione lineare da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}^m$ rispetto alle basi canoniche. Lo spazio vettoriale $Funz(V, W)$ delle funzioni tra due spazi vettoriali V e W, il sottospazio vettoriale $Hom(V, W)$ delle applicazioni lineari da V in W. Caso di dimensioni finite: isomorfismo (mediante matrice rappresentativa) tra $Hom(V, W)$ e $M_{m,n}(\mathbb{K})$.

Dicannovesima lezione (12-11-2018). Lo spazio vettoriale duale (caso di dimensione finita). I funzionali lineari sono determinati a meno di scalari dal loro nucleo. Definizione della base di $V^\vee$ duale di una base data di V. Applicazioni bilineari su $V \times W$. Ogni applicazione bilineare definisce un'applicazione lineare in $Hom(V, W^\vee)$. L'isomorfismo canonico (nel caso di dimensione finita) tra V e il suo biduale $V^{\vee\vee}$. Esercizi: discussione sull'invertibilità di una matrice quadrata e calcolo della matrice inversa di una matrice assegnata, criterio per stabile se un sottoinsieme non vuoto di uno spazio vettoriale è un sottospazio affine.

Ventesima lezione (13-11-2018). Introduzione al determinante: area di parallelogramma nel piano, volume di parallelelepipedi nello spazio. Forme multilineari alternanti. Proprietà. Una forma multinlineare alternante di grado n su una spazio vettoriale di dimensione n è determinata dal suo valore su un n-upla che costituisce una base di V. Caso di $\mathbb{K}^n$. Esercizi: Uso della matrice rappresentativa per determinare basi di nucleo e immagine di un'applicazione lineare.

Esercitazione Prof. Lipparini (14-11-2018).

Ventunesima lezione (16-11-2018). Complementi della lezione precedente. Esercizi sulle matrici rappresentative e sui sottospazi affini.

Ventiduesima lezione (26-11-2018). Forme multilineari alternanti di grado finito n uguale alla dimensione dello spazio vettoriale V : definizioni equivalenti. Proprietà: le forme multilineari alternanti si annullano su n-uple di vettori indipendenti e le forme multilineari alternanti non banali sono non nulle su una n-pla di vettori che costituisce una base di V. Il caso di $\mathbb{K}^n$. Identificazione del dominio con $M_{n,n}(\mathbb{K})$. Il problema dell'esistenza. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $n = 2$: formula esplicita per l'area orientata.

Ventitreesima lezione (27-11-2018). Il determinante: definizione tramite sviluppo di Laplace rispetto prima riga. Il determinante è una forma multilineare alternante su $\mathbb{K}^n$. Sviluppo di Lapalce rispetto ad ogni riga. Il determinante è invariante per trasposizione.

Esercitazione Prof. Lipparini (28-11-2018).

Ventiquattresima lezione (30-11-2018). Sviluppo di Laplace per righe. Il determinante è multilineare alternante anche sulle righe. Formula di Binet. Matrice dei cofattori. Formula per l'inversa di una matrice invertibile.

Venticinquesima lezione (3-12-2018). Formula di Cramer. Il determinante è il massimo ordine di una sottomatrice invertibile. Caso particolare di matrice rappresentativa: la matrice di trasformazione delle coordinate. Matrici rappesentative di un'applicazione lineare rispetto a coppie di basi diverse.

Ventiseiesima lezione (4-12-2018). Il gruppo $GL(n, \mathbb{K})$. Dato uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$, ogni elemento di $GL(n, \mathbb{K})$ si ottiene come matrice di cambio coordinate da una base fissata ad un altra base. Endomorfismi diagonalizzabili: definizione ed esempi. Caratterizzazione degli endomorfismi diagionalizzabili in termini della matrice rappresentativa.

Ventisettesima lezione (5-12-2018). Esercitazione.

Ventottesima lezione (7-12-2018). Matrici rappresentave di un endomorfismo fissato. Matrici coniugate. Determinante di un endomorfismo. Definizione di autovettore e autovalore. Autospazio. Spettro di un endomorfismo. Esempi. Determinazione dello spettro. Funzione polinomiale caratteristica.

Ventinovesima lezione (10-12-2018). Il campo $\mathbb{K}(x)$, il polinomio caratterisitico di un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita. Interpretazione del termine noto e del coefficiente di grado $n-1$ del polinomio caratteristico. Autovettori relativi ad autovalori distinti sono indipendenti. Caratterizzazione della diagonalizzabilità mediante la somma delle dimensioni degli autospazi.

Trentesima lezione (10-12-2018). Procedura di diagonalizzazione: esempio completo diagonalizzazione. I casi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Teorema fondamentale dell'algebra. Molteplicità geometrica e algebrica di un autovalore.

Trentunesima lezione (12-12-2018). Esercitazione.

Trentaduesima lezione (14-12-2018). Confronto tra maoltplicità geometrica e algebrica. Caratterizzazione della diagonalizzabilità tramite molteplicità nei casi reale e complesso. Prodotti scalari e spazi vettoriali euclidei. Esempio fondamentale: il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$. Norma e perpendicolarità tra vettori negli spazi vettoriali euclidei. Sottospazio ortogonale di un sottospazio vettoriale. Dimensione del sottospazio ortogonale.

Trentatreesima lezione (17-12-2018). La proiezione ortogonale su un sottospazio. Coseno dell'angolo compreso tra deue vettori. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare. Basi ortonormali. Coordinate rispetto a basi ortonormali e proiezioni ortogonali in basi ortonormali. Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt.

Trentaquattresima lezione (18-12-2018). Ortonormalizzazione Gram-Schmidt: esempio. Prodotto vettoriale. Distanze in uno spazio Euclideo. Il caso di dimensione 3: distanza punto-retta, distanza punto-piano, distanza tra due rette sghembe.

Esercitazione Prof. Lipparini (19-11-2018).

Esercitazione Prof. Lipparini (21-11-2018).

Trentacinquesima lezione (7-1-2019). Cambiamento di cooridinate rispetto a basi ortonormali. Matrici ortogonali. Diagonalizzabilità tramite basi ortonormali. Se una matrice è diagonalizzabile tramite base ortonormale essa è simmetrica. Endomorfismi simmetrici di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita. Matrici rappresentative di endomorfismi simmetrici rispetto a basi ortonormali. Ogni endomorfismo che ammette una base ortonormale di autovettori è simmetrico.

Trentaseiesima lezione (8-1-2019). Autovettori relativi ad autovalori distinti di un endomorfismo simmetrico sono ortogonali. Le soluzioni dell'equauzione caratteristica di un endomorfismo simmetrico sono reali. L'ortogonale di un sottospazio mandato in se stesso da un endomorfismo simmetrico è anche esso mandato in se stesso. Teorema spettrale: ogni endomorfismo simmetrico ammette base ortonormale di autovettori.

Trentasettesima lezione (9-1-2019). Interpretazione matriciale del teorema spettrale. Spazi vettoriali hermitiani. Il prodotto hermitiano standard su $\mathbb{C}^n$. Prodotti hermitiani su spazi vettoriali complessi astratti. Ortogonalità tramite prodotto hermitiano. Esistenza di basi ortonormali. Coordinate rispetto a basi ortonormali. Riduzione, tramite base ortonormale, del prodotto hermitiano al prodotto hermitiano standard. Matrici di cambiamento coordinate rispetto a basi ortonormali: matrici unitarie. Endomorfismi hermitiani. Endomorfismi hermitiani di $\mathbb{C}^n$ dotato di prodotto hermitiano standard. Matrici rappresentative di endomorfismi hermitiani rispetto a basi ortonormali. Enunciato del teorema spettrale per endomorfismi hermitiani.

Trentottesima lezione (11-1-2019). Dimostrazione del teorema spettrale per endomorfismi hermitiani e su8a interpretazione matriciale. Forme bilineari: definizione ed esempi. La forma bilineare su $\mathbb{K}^n$ associata ad una matrice: generalizzazione agli spazi vettoriali astratti. Matrice rappresentativa di una forma bilineare rispetto ad una base. Matrici rappresentative di forme bilineari e cambiamenti di base.

Trentanovesima lezione (14-1-2019). Forme bilineari simmetriche. sottospazio ortogonale ad un sottospazio rispetto ad una forma bilineare simmetrica. Annullatore di una forma bilineare simmetrica. Diagonalizzazione su un campo qualsiasi di caratteristica non 2. Caso complesso.

Quarantesima lezione (15-1-2019). Caso reale: forme bilineari simmetriche definite positive, definite negative ed indefinite. Diagonalizzazione in forma canonica (solo 1, -1 o 0 sulla diagonale). Invarianti: rango, indice di positività, segnatura.

Quarantunesima lezione (16-1-2019). Confronto tra la relazioni (d'equivalenza) di coniugio e congruenza sull'insieme delle matrici quadrate. Esercizi di geometria euclidea: distanza fra sottoinsiemi, distanza fra due rette.

Quarantaduesima lezione (18-1-2019). Esercizi sulla diagonalizzazione di una forma bilineare simmetrica, sulla forma di Sylvester di una forma bilineare simmetrica e sulla diagonalizzazione di un endomorfismo simmetrico.

Quarantatreesima lezione (21-1-2019). Esercizi sulla diagonalizzazione di endomorfismi tra spazi vettoriali astratti (con riduzione alla discussione delle diagonalizzabilità di endomorfismi di $\mathbb{K}^n$)

Quarantaquattresima lezione (22-1-2019). Altra dimostrazione della formula di Cauchy-Schwarz. Panoramica sul corso.

Esercitazione Prof. Lipparini (23-11-2018).