

**Esercizi 4** 1) Sia  $V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$  il sottospazio vettoriale generato dai cinque polinomi

$$x^3 + x^2 + x + 2, x^3 + 2x^2 + 3x + 1, 2x^3 + 3x^2 + 4x + 3, 2x + 1, 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2.$$

Estrarre una base dai generatori di  $V$  assegnati e completarla ad una base di  $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ .

2) Sia

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

Estrarre una base dai generatori di  $V$  assegnati e completarla ad una base di  $M_{2,2}(\mathbb{R})$ .

3) Quali sono i valori che si possono ottenere come dimensioni<sup>1</sup> delle intersezioni tra due sottospazi affini di dimensione 4 di  $\mathbb{R}^6$ .

4) Sia  $S_1$  il sottospazio affine di  $\mathbb{R}^4$  passante per  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  e avente

giacitura  $V_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ , sia  $S_2$  il sottospazio affine passante per

$p_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$  e avente giacitura  $V_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ . Trovare equazioni cartesiane per i sottospazi affini  $S_1$  e  $S_2$  e per l'intersezione  $S_1 \cap S_2$ .

5) Sia  $S_1$  il sottospazio affine di  $\mathbb{R}^4$  passante per  $p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  e avente

giacitura  $V_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ , sia  $S_2$  il sottospazio affine passante per  $p_2 =$

---

<sup>1</sup>La dimensione di uno spazio affine è per definizione la dimensione della sua giacitura.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e avente giacitura  $V_2 := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ . Trovare dimensione, equazioni

parametriche e cartesiane per il sottospazio affine generato da  $S_1$  e  $S_2$ .

6) Nello spazio vettoriale  $\mathbb{R}^4$  si considerino i sottospazi vettoriali

$V = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle$  e  $W = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ . Si determinino

una base di  $V + W$  e una di  $V \cap W$ .

7) Dato un naturale  $n > 1$ , siano  $S_1$  e  $S_2$  sottospazi affini distinti di  $\mathbb{K}^n$  di dimensione  $n - 1$ . Dimostrare che o  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  oppure  $S_1 \cap S_2$  è uno spazio affine di dimensione  $n - 2$ .

8) Sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  una matrice a coefficienti in  $\mathbb{K}$  con  $m$  righe e  $n$  colonne e sia  $B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  ottenuta da  $A$  con operazioni elementari per riga.

a) Dimostrare che il sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^m$  generato dalle righe di  $A$  è uguale al sottospazio vettoriale di  $\mathbb{K}^m$  generato dalle righe di  $B$ .

b) Dimostrare che la dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle righe di una matrice è uguale alla dimensione del sottospazio vettoriale generato dalle colonne della stessa matrice. Suggestivo: usare esercizio 11) della terza settimana.

9) Sia  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  e sia  $A' \in M_{m,n}(\mathbb{K})$  ottenuta da  $A$  con una delle tre operazioni elementari per riga. Dimostrare che esiste  $B \in M_{m,m}(\mathbb{K})$  tale che  $BA = A'$ . Suggestivo: detto  $e_i \in M_{1,m}(\mathbb{K})$  il vettore riga le cui entrate sono tutte nulle eccetto la  $i$ -esima che vale 1, osservare che  $e_i A = A_i$  ( $A_i$  è la  $i$ -esima riga di  $A$ ).