Calcolo II

Esame del 19/01/2018

Cognome.......................... Nome..........................

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 5 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{1}{t}y + y^2 t \ln t \\ y(1) &= 1/2. \end{aligned}$$

2. Si determini la soluzione generale dell'equazione

$$x^2 y'' - xy' - 3y = 0.$$

3. Data la due forma differenziale su $\mathbb{R}^3$

$$\omega = \frac{x_1 - 2}{\|x - 2e_1\|^3} dx_2 \wedge dx_3 - \frac{x_2}{\|x - 2e_1\|^3} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{x_3}{\|x - 2e_1\|^3} dx_1 \wedge dx_2$$

e il cubo $C = \{x \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x_i| \leqslant 1\}$, si calcoli

$$\int_{\partial C} \omega.$$

4. Si calcoli il volume della regione (intersezione tra una sfera e un cilindro)

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1, x^2 - x + y^2 \leqslant 0\}.$$

5. Sia $|f(x)| \leqslant (1+|x|^3)^{-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si mostri che la trasformata di Fourier $\hat{f}$ è ovunque derivabile con derivata uniformemente continua.

6. Si calcoli la trasformata di Fourier di $f(x) = e^{-ax^2}$, per $a > 0$.

Soluzione

1. Questo è un esempio di equazione di Bernoulli. Cerchiamo soluzioni della forma $y = v^\alpha$.
$$\alpha v' = -\frac{1}{t}v + v^{1+\alpha} t \ln t$$
e scegliamo $\alpha = -1$ (assumendo $y \neq 0$) ottenendo l'equazione lineare
$$\begin{aligned} v' &= \frac{1}{t}v - t\ln t \\ v(1) &= 2 \end{aligned}$$
che ha soluzione
$$v(t) = 2e^{\int_1^t \frac{1}{s}ds} - \int_1^t e^{\int_s^t \frac{1}{s'}ds'} s\ln s ds = t - t\int_1^t \ln s ds = t + t^2 - t^2 \ln t.$$
Quindi,
$$y(t) = (t + t^2 - t^2\ln t)^{-1}.$$

2. Cerchiamo soluzioni della forma $y(x) = x^r$. Deve essere
$$r(r-1) - r - 3 = 0$$
ovvero $r \in \{-1, 3\}$. Poichè l'equazione è lineare la soluzione generale è
$$y(x) = ax^{-1} + bx^3$$
per $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Per il teorema di Stokes
$$\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega$$
d'altro canto, per ogni $x \neq 2e_1$,
$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\sum_{i=1}^3 \partial_{x_i} \frac{(x-2e_1)_i}{\|x-2e_1\|^3}\right] dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\|x-2e_1\|^2 - 3(x-2e_1)_i^2}{\|x-2e_1\|^5}\right] dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = 0. \end{aligned}$$
Dunque l'integrale è nullo (si tratta del flusso attraverso una superficie chiusa del campo elettrico o gravitazionale di una carica o massa esterna ad essa).

4. Usiamo le coordiante
$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\theta \\ y &= \rho\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$
In tali coordiante $\Omega = \{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \rho \leqslant \cos\theta; z^2 \leqslant 1 - \rho^2\}$. Dunque, per simmetria,
$$\begin{aligned} \int_\Omega dxdydz &= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} d\rho\,\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} d\rho\,\rho\sqrt{1-\rho^2} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(\cos\theta)^2} du\,\sqrt{1-u} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{2}{3}\left(1 - |\sin^3\theta|\right) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

5. Poichè $|xf(x)| \leqslant (1+|x|^3)^{-1}|x|$ è integrabile si ha

$$\hat{f}'(k) = \int_{\mathbb{R}} ixe^{ikx} f(x)dx.$$

Per verificare la continuità scriviamo, per ogni $|k-k'| = \delta < 1$,

$$|\hat{f}'(k) - \hat{f}'(k')| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{|x|}{1+|x|^3} \left| e^{ikx} - e^{ik'x} \right| dx.$$

Per Lagrange

$$\left| e^{ikx} - e^{ik'x} \right| \leqslant \min\{2, |x|\delta\}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$|\hat{f}'(k) - \hat{f}'(k')| \leqslant \int_{-1}^{1} \delta ds + 2\delta \int_{1}^{\delta^{-1}} \frac{1}{x} dx + 2 \int_{\delta^{-1}}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = 2\delta + 2\delta \ln \delta^{-1} + 2\delta$$

che mostra la uniforme continuità di $\hat{f}$.

6. Si noti che

$$\begin{aligned} &f'(x) = -2axf(x) \\ &f(0) = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Poichè il problema di Cauchy ha un unica soluzione (1) determina f unicamente. Prendendo la trasformata di Fourier dell'equazione si ha

$$ik\hat{f}(k) = -i2a\hat{f}'(k).$$

D'altro canto

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \left[\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2-ay^2} dxdy \right]^{\frac{1}{2}} = \left[2\pi \int_{0}^{\infty} \rho e^{-a\rho^2} d\rho \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi/a}.$$

Ne seque che $g(k) = \frac{1}{\sqrt{\pi/a}} \hat{f}(k)$ soddisfa il problema di Cauchy

$$\begin{aligned} &g'(k) = -\frac{1}{2a} g(k) \\ &g(0) = 1 \end{aligned}$$

che è lo stesso di (1) con a sostituito da $1/4a$. Dunque la soluzione è $g(k) = e^{-x^2/4a}$. Ne segue

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\pi/a} e^{-x^2/4a}.$$