Tutorato di Probabilità 1, IX
a.a. 2003/2004

Esercizio 1 **a)** Sia X una v.a. con funzione di distribuzione F_X. Si supponga l'esistenza di due numeri reali a, b, con $-\infty \le a < b \le +\infty$, tali che:

i) se $a > -\infty$ allora $F_X(x) = 0$, per ogni $x \le a$; se $b < +\infty$ allora $F_X(x) = 1$, per ogni $x \ge b$;

ii) esiste una funzione $G : (0,1) \to (a,b)$ tale che

$$F_X \circ G(y) = y, \text{ per ogni } y \in (0,1) \quad \text{e} \quad G \circ F_X(x) = x, \text{ per ogni } x \in (a,b)$$

(cioè F_X è invertibile su (a,b)).

Sia $Z \sim \mathrm{Un}(0,1)$ e $Y = G(Z)$. Dimostrare che $F_Y(\xi) = F_X(\xi)$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Inoltre, se X ha densità di probabilità f_X dimostrare che anche Y ha densità $f_Y(\xi) = f_X(\xi)$.

b) Il risultato in **a)** può essere usato nella pratica per simulare una v.a. X con funzione di distribuzione F_X che verifica le proprietà *i)* e *ii)* (nel caso in cui l'inversa si può scrivere in modo esplicito): come? Ad esempio, se $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, come fareste per simulare X?

Esercizio 2 Una v.a. X è detta "di Cauchy" se ha densità

$$p(x) = \frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$$

a) Verificare che p è una densità di probabilità e scrivere esplicitamente la funzione di distribuzione associata.

b) Dire se X ha valor medio.

c) Calcolare la legge di $Y = X^2$. Y ha media? Ha varianza?

d) Dopo aver verificato che la v.a. $Z = 1/X$ è ben posta, calcolare la legge di Z. Z ha media? Ha varianza?

Esercizio 3 Una v.a. di Weibull di parametri $\alpha, \lambda > 0$ è una v.a. assolutamente continua T con densità

$$p(t) = \alpha\,\lambda\,t^{\alpha-1}e^{-\lambda t^\alpha}\,\mathbb{1}_{t>0}.$$

a) Le v.a. di Weibull vengono utilizzate per descrivere *tempi di vita (aleatori)*, ad esempio di apparecchiature, o di popolazioni biologiche. Giustificare tale interpretazione.

b) Fissato $u \in \mathbb{R}$, calcolare esplicitamente $\mathrm{P}(T > u)$ e quindi la funzione di distribuzione F_T di T.

c) Fissato $t > 0$, scrivere esplicitamente la funzione $g_t(\cdot)$ definita come

$$[0, +\infty) \ni s \mapsto g_t(s) = \mathrm{P}(T > t + s \,|\, T > s) = \mathrm{P}(T - s > t \,|\, T > s) \in [0,1].$$

Determinare inoltre α e λ affinché la funzione $g_t(s)$ sia monotona o costante (in s).

d) Fissato $t > 0$, $\mathrm{P}(T - s > t \,|\, T > s)$ è la probabilità che l'unità cui T si riferisce rimanga in vita per un ulteriore tempo t noto che all'istante s è funzionante (se è noto che $T > s$, la v.a. $T - s$ viene usualmente interpretata come il *tempo di vita residuo*).

Se T denota il tempo di vita (aleatorio) di una certa apparecchiatura, quali valori scegliereste per α e λ se tale apparecchiatura fosse soggetta ad usura? E se T si riferisse a qualcosa che tende a migliorare con l'età? E infine, se T è il tempo di vita di una unità che non tende né a migliorare né a peggiorare con il passare del tempo (o anche: se valesse il concetto di "perdita di memoria"), quali sarebbero i valori più opportuni per α e λ?

Esercizio 4 Sia $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ e sia $\alpha > 0$. Verificare che la v.a. $X = T^{1/\alpha}$ è ben posta e calcolarne la legge. Si tratta di una legge nota?

Esercizio 5 Siano $X_1, \dots, X_n$ n v.a. indipendenti con densità $f_1, \dots, f_n$ e funzione di distribuzione $F_1, \dots, F_n$. Calcolare la legge di

$$U = \max(X_1, \dots, X_n) \qquad W = \min(X_1, \dots, X_n).$$

Specializzare al caso in cui $f_1 = \ldots = f_n = f$ e quindi $F_1 = \ldots = F_n = F$.

Esercizio 6 Un componente elettronico ha un tempo di vita S_1 che segue una legge esponenziale di media 10 giorni. Un secondo componente è composto da due elementi posti in parallelo ciascuno dei quali segue una legge esponenziale di media 8 giorni.

a) Qual è la densità del tempo di vita S_2 del secondo componente? Qual è la sua vita media?

b) Qual è la probabilità che il primo componente duri più a lungo del secondo?[1]

[1]Sugg.: si noti che $S_1 - S_2 = S_1 + (-S_2)$...

Soluzioni

1) a) Ricordiamo che, se $Z \sim \mathrm{Un}(0,1)$, allora

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ z, & 0 \le z \le 1 \\ 1, & z \ge 1. \end{cases} \qquad \text{e} \qquad f_Z(z) = \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

dove F_Z e f_Z denotano, rispettivamente, la funzione di distribuzione e la densità di probabilità di Z.

$F_X(x)$ è la funzione di distribuzione di X, quindi F_X è una funzione non decrescente, che tende a 0 per $x \to -\infty$ e tende a 1 per $x \to +\infty$. Le ipotesi *i)* e *ii)* garantiscono che, almeno su un intervallo (a,b) di $\mathbb{R}$, F_X è invertibile, quindi strettamente crescente e tale proprietà vale anche per G. Allora, tenendo presente che $F_X \circ G = \mathrm{Id}$,

$$F_Y(\xi) = \mathrm{P}(Y \le \xi) = \mathrm{P}(G(Z) \le \xi) = \mathrm{P}(F_X \circ G(Z) \le F_X(\xi)) = \mathrm{P}(Z \le F_X(\xi)) = F_X(\xi)$$

perché $F_X(\xi) \in [0,1]$, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Quindi $F_Y(\xi) = F_X(\xi)$, per ogni ξ. Inoltre, se esiste f_X allora esiste $f_Y(\xi) = \frac{d}{d\xi}F_Y(\xi) = \frac{d}{d\xi}F_X(\xi) = f_X(\xi)$, per ogni ξ per cui tali derivate esistono.

b) Questo risultato può essere usato per simulare una v.a. la cui funzione di distribuzione verifichi le proprietà richieste e la funzione G, inversa di F_X, sia esplicitabile. In tal caso, infatti, la v.a. $G(Z)$, con $Z \sim \mathrm{Un}(0,1)$, ha stessa distribuzione e densità di X e può dunque essere presa come una realizzazione di X.

Ad esempio, supponiamo di dover simulare una v.a X esponenziale. Se $\lambda > 0$ denota il parametro, allora

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0. \end{cases}$$

Quindi F_X **non** è invertibile su tutto $\mathbb{R}$ ma lo è se ristretta a $(0,+\infty)$: qui F_X verifica *i)* e *ii)*, con $a = 0$, $b = +\infty$. L'inversa è data da

$$G(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y), \quad y \in (0,1).$$

Quindi, se $Z \sim \mathrm{Un}(0,1)$ allora $Y = G(Z) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$: per generare una v.a. $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ basta generare una $Z \sim \mathrm{Un}(0,1)$ e considerare $-\frac{1}{\lambda}\ln(1-Z)$.

2) a) Studiamo il comportamento asintotico per $\alpha \to +\infty$ di $\int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)dx$:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha} p(x)\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname{arctg} x\Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\operatorname{arctg}\alpha = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = 1$$

quindi esite finito $\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = 1$. La f.d. associata è

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\Big(\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}\Big).$$

b) Studiamo il comportamento asintotico per $\alpha \to +\infty$ di $\int_{-\alpha}^{\alpha} |x|\,p(x)dx$:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^{\alpha}|x|\,p(x)\,dx = \lim_{\alpha\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\alpha} = \frac{2}{\pi}\lim_{\alpha\to\infty}\ln(1+\alpha^2) = +\infty$$

quindi una v.a. di Cauchy **non** ha media.

c) Se $y \le 0$, ovviamente $F_Y(y) = \mathrm{P}(Y \le y) = \mathrm{P}(X^2 \le y) = 0$. Se invece $y > 0$,

$$F_Y(y) = \mathrm{P}(-\sqrt{y} < X < \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

quindi, per $y > 0$,

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy}\Big(F_X(y) - F_X(-y)\Big) = \Big(f_X(y) + f_X(-y)\Big) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Possiamo infine scrivere

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\,\pi\,\sqrt{y}(1+y)}\,1\!\!1_{y>0}.$$

Ovviamente $Y = X^2$ **non** può avere né media né varianza, perché in caso affermativo significherebbe che X ha momento secondo o quarto, il che non è possibile perché non ha neanche momento primo.

d) $Z = 1/X$ è ben posta: l'eventuale problema è per $X = 0$, che comunque è un evento di probabilità 0 (perché X ha densità). Calcoliamo la sua f.d.: per $z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$, si ha:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = \mathrm{P}(Z \le z) = \mathrm{P}\Big(\frac{1}{X} \le z\Big) = \mathrm{P}\Big(\frac{1}{X} \le z, X > 0\Big) + \mathrm{P}\Big(\frac{1}{X} \le z, X < 0\Big)\\
= \mathrm{P}(1 \le z\,X, X > 0) + \mathrm{P}(1 \ge z\,X, X < 0)\\
= \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \le X, X > 0, z > 0\Big) + \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \ge X, X > 0, z < 0\Big) + \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \ge X, X < 0, z > 0\Big)\\
+\mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \le X, X < 0, z < 0\Big)
\end{aligned}$$

quindi:

- se $z > 0$:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \le X, X > 0\Big) + \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \ge X, X < 0\Big)\\
= \mathrm{P}\Big(X \ge \frac{1}{z}\Big) + \mathrm{P}(X < 0) = 1 - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big) + F_X(0) = \frac{3}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big);
\end{aligned}$$

e

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\Big(\frac{3}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) = -f_X\Big(\frac{1}{z}\Big) \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{1}{\pi\,(1+z^2)};$$

- se $z < 0$:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \ge X, X > 0\Big) + \mathrm{P}\Big(\frac{1}{z} \le X, X < 0\Big) = 0 + \mathrm{P}(\Big(\frac{1}{z} \le X < 0\Big) = F_X(0) - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)\\
= \frac{1}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big).
\end{aligned}$$

e

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz}\Big(\frac{1}{2} - F_X\Big(\frac{1}{z}\Big)\Big) = -f_X\Big(\frac{1}{z}\Big) \cdot \frac{-1}{z^2} = \frac{1}{\pi\,(1+z^2)}.$$

Possiamo quindi scrivere

$$f_Z(z)\frac{1}{\pi\,(1+z^2)}\,1\!\!1_{z\neq 0}.$$

Quindi f_Z e la densità p di una v.a di Cauchy coincidono ovunque tranne che nell'origine, quindi Z è ancora una v.a. di Cauchy (come abbiamo già detto, se le densità sono modificate su un insieme finito di punti, le funzioni di distribuzione non cambiano).

3) a) Si ha

$$\mathrm{P}(T > 0) = \int_0^{+\infty} p(t)dt = \int_{\mathbb{R}} p(t)dt = 1$$

perché $p(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Quindi T è una v.a. positiva e può dunque essere usata per descrivere probabilisticamente dei tempi di vita.

b) Per $u \leq 0$, si ha

$$P(T > u) = \int_u^{+\infty} p(t)dt = \int_0^{+\infty} p(t)dt = 1$$

perché $p(t) \equiv 0$ per $t < 0$. Se invece $u > 0$,

$$\begin{aligned} P(T > u) &= \int_u^{+\infty} p(t)dt = \int_u^{+\infty} \alpha\,\lambda\,t^{\alpha-1} e^{-\lambda\,t^\alpha}\,1\!\!1_{t>0}dt \\ &= -\int_u^{+\infty} \frac{d}{dt}\Big(e^{-\lambda\,t^\alpha}\Big)dt = -\,e^{-\lambda\,t^\alpha}\Big|_{t=u}^{t\uparrow+\infty} = e^{-\lambda\,u^\alpha}. \end{aligned}$$

Quindi la f.d. di T è

$$F_T(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda\,u^\alpha} & \text{se } u > 0 \end{cases}$$

c) Si ha

$$P(T > t+s \,|\, T > s) = \frac{P(T > t+s, T > s)}{P(T > s)} = \frac{P(T > t+s)}{P(T > s)}$$

perché $\{T > t+s\} \subset \{T > s\}$. Quindi, usando **b)**,

$$g_t(s) = \exp\Big\{ -\lambda\Big((t+s)^\alpha - s^\alpha\Big)\Big\}.$$

Studiamo il segno della derivata di g_t, per $s > 0$:

$$g_t'(s) = -\lambda\alpha\,g_t(s)\,\Big[(t+s)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1}\Big].$$

Allora, $g_t'(s) \geq 0$ se e solo se $(t+s)^{\alpha-1} - s^{\alpha-1} \leq 0$, ovvero

$$\left(\frac{t+s}{s}\right)^{\alpha-1} \leq 1$$

che equivale (si ricordi che $t, s > 0$) a richiedere

$$\alpha \leq 1.$$

Possiamo quindi riassumere come segue: $g_t(s)$ è

- monotona crescente in $s > 0$ se e solo se $\alpha < 1$;
- costante in $s > 0$ se e solo se $\alpha = 1$;
- monotona decrescente in $s > 0$ se e solo se $\alpha > 1$.

d) Sia T il tempo di vita di una unità. La funzione $g_t(s)$ rappresenta la probabilità che l'apparecchiatura sopravviva un ulteriore tempo t, condizionatamente al fatto che è funzionante all'istante s, cioè la probabilità che il tempo di vita residuo a s sia maggiore di t. Se quindi g_t è decrescente ($\alpha < 1$), tale apparecchiatura dev'essere soggetta ad un fenomeno di tipo usura, ovvero tende a deteriorarsi con il tempo: all'aumentare del tempo (s), il tempo di vita residuo tende a diminuire. Se invece g_t è crescente ($\alpha > 1$), l'unità in questione tende a migliorare con l'età: all'aumentare del tempo (s), il tempo di vita residuo tende ad aumentare. Qualora invece g_t fosse costante ($\alpha = 1$), significherebbe che l'età non influenza il tempo di vita residuo dell'apparecchiatura ("perdita di memoria").

Si noti infine che per $\alpha = 1$ allora p è la densità di una $\mathrm{Exp}(\lambda)$: le v.a. esponenziali soddisfano quindi la proprietà di "perdita di memoria", che nel caso discreto è tipica delle v.a. geometriche.

4) Poiché $T \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, in particolare $T > 0$, dunque $X = T^{1/\alpha}$ è ben posta. Inoltre $X > 0$, dunque $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$ per $x \leq 0$. Se invece $x > 0$, si ha

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(T^{1/\alpha} \leq x) = P(T \leq x^\alpha) = F_T(x^\alpha)$$

quindi

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_T(x^\alpha) = f_T(x^\alpha) \cdot \alpha\, x^{\alpha-1} = \alpha\, \lambda\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda\, x^\alpha} 1\!\!1_{x>0}$$

cioè X è una v.a. di Weibull di parametri α e λ.

5) Calcoliamo dapprima la legge del massimo:

$$F_U(u) = \mathrm{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u) = \mathrm{P}(X_1 \leq u, \ldots, X_n \leq u) = \prod_{k=1}^n \mathrm{P}(X_k \leq u) = \prod_{k=1}^n F_k(u),$$

quindi

$$\begin{aligned} f_U(u) &= -\frac{d}{du} \prod_{k=1}^n F_k(u) = -\sum_{i=1}^n \frac{d}{du} F_i(u) \prod_{k=1, k\neq i}^n \Big(1 - F_k(u)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f_i(u)}{F_i(u)} \prod_{k=1}^n F_k(u) = \prod_{k=1}^n F_k(u) \sum_{i=1}^n \frac{f_i(u)}{F_i(u)} \end{aligned}$$

dove si ponga $\frac{f_i(u)}{F_i(u)} = 0$ se $F_i(u) = 0$ (si noti che se $F_i(u) = 0$, segue che anche $f_i(u)$ dev'essere 0). Se $f_1 = \ldots = f_n = f$ e $F_1 = \ldots = F_n = F$, allora

$$f_U(u) = n\, f(u)\, F^{n-1}(u).$$

Per il minimo, si ha

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \mathrm{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq u) = 1 - \mathrm{P}(\min(X_1, \ldots, X_n) > w) = 1 - \mathrm{P}(X_1 > w, \ldots, X_n > w) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n \mathrm{P}(X_k > w) = 1 - \prod_{k=1}^n \Big(1 - F_k(w)\Big), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} f_W(w) &= \frac{d}{dw} \prod_{k=1}^n \Big(1 - F_k(w)\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{d}{du} \Big(1 - F_i(w)\Big) \prod_{k=1, k\neq i}^n \Big(1 - F_k(w)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^n f_i(w) \prod_{k=1, k\neq i}^n \Big(1 - F_k(w)\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{f_i(w)}{1 - F_i(w)} \prod_{k=1}^n \Big(1 - F_k(w)\Big) = \prod_{k=1}^n \Big(1 - F_k(w)\Big) \sum_{i=1}^n \frac{f_i(w)}{1 - F_i(w)} \end{aligned}$$

dove si ponga $\frac{f_i(w)}{F_i(w)} = 0$ se $1 - F_i(w) = 0$ (si noti che se $F_i(u) = 1$, segue che $f_i(u)$ dev'essere 0). Se $f_1 = \ldots = f_n = f$ e $F_1 = \ldots = F_n = F$, allora

$$f_W(w) = n\, f(w) \Big(1 - F(w)\Big)^{n-1}.$$

6) a) Indichiamo con S_1 e S_2 il tempo di vita del primo e del secondo componente; con T_1 e T_2 i tempi di vita dei due elementi che determinano il secondo componente. Allora, $S_1 \sim \mathrm{Exp}(1/10)$, $T_1, T_2 \sim \mathrm{Exp}(1/8)$ e $S_2 = \max(T_1, T_2)$. Inoltre, le v.a. T_1, T_2 possono considersi indipendenti.

a) Calcoliamo la funzione di distribuzione di S_2: per $s > 0$,

$$F_{S_2}(s) = \mathrm{P}(S_2 \leq s) = \mathrm{P}(\max(T_1, T_2) \leq s) = \mathrm{P}(T_1 \leq s, T_2 \leq s) = \mathrm{P}(T_1 \leq s)\mathrm{P}(T_2 \leq s) = (1 - e^{-s/8})^2$$

e $F_{S_2}(s) = 0$ se $s \leq 0$. Derivando rispetto ad s, si ottiene la densità di probabilità:

$$f_{S_2}(s) = \frac{1}{4} e^{-s/8} (1 - e^{-s/8}) 1\!\!1_{s>0},$$

come d'altro anto segue dall'esercizio (5). La vita media del secondo componente è

$$\mathbb{E}[S_2] = \int_{\mathbb{R}} s\, f_{S_2}(s)ds = 12.$$

Dunque, in media dura di più il secondo componente.

b) La probabilità richiesta è $\mathrm{P}(S_1 > S_2) = \mathrm{P}(S_1 - S_2 > 0) = \mathrm{P}(S_1 + (-S_2) > 0)$. Posto $V = -S_2$, allora

$$\mathrm{P}(S_1 > S_2) = \mathrm{P}(S_2 + V > 0) = \int_0^{\infty} f_{S_1+V}(s)ds. \tag{1}$$

Occorre dunque calcolare la densità di $S_1 + V$: poiché S_1 e V rimangono indipendenti,

$$f_{S_1+V}(s) = \int_{\mathbb{R}} f_{S_1}(s-v)f_V(v)dv$$

che, a sua volta, richiede la valutazione della densità di V: per $v \neq 0$,

$$\begin{aligned} f_V(v) &= \frac{d}{dv}\mathrm{P}(V \leq v) = \frac{d}{dv}\mathrm{P}(-S_2 \leq v) = \frac{d}{dv}\mathrm{P}(S_2 \geq -v) \\ &= \frac{d}{dv}(1 - F_{S_2}(-v)) = -\frac{d}{dv}F_{S_2}(-v) = -f_{S_2}(-v)\cdot(-1) = f_{S_2}(-v). \end{aligned}$$

Quindi

$$f_V(v) = \frac{1}{4}e^{v/8}(1 - e^{v/8})\mathbb{1}_{v<0}.$$

Allora,

$$\begin{aligned} f_{S_1+V}(s) &= \int_{\mathbb{R}} f_{S_1}(s-v)f_V(v)dv = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{10}e^{-(s-v)/10}\mathbb{1}_{s-v>0}\cdot\frac{1}{4}e^{v/8}(1-e^{v/8})\mathbb{1}_{v<0}dv \\ &= \frac{1}{40}e^{-s/10}\int_{\mathbb{R}}\left(e^{-9v/40} - e^{-14v/40}\right)\mathbb{1}_{v<s}\cdot\mathbb{1}_{v<0}dv. \end{aligned}$$

Consideriamo separatamente il caso $s \geq 0$ e $s < 0$.

Se $s \geq 0$, $\mathbb{1}_{v<s}\cdot\mathbb{1}_{v<0} = \mathbb{1}_{v<0}$, quindi

$$f_{S_1+V}(s) = \frac{1}{40}e^{-s/10}\int_{-\infty}^{0}\left(e^{-9v/40} - e^{-14v/40}\right)dv = \frac{5}{126}e^{-s/10};$$

se $s < 0$, $\mathbb{1}_{v<s}\cdot\mathbb{1}_{v<0} = \mathbb{1}_{v<s}$, quindi

$$f_{S_1+V}(s) = \frac{1}{40}e^{-s/10}\int_{-\infty}^{s}\left(e^{-9v/40} - e^{-14v/40}\right)dv = \frac{1}{9}e^{-s/8} - \frac{1}{14}e^{-s/4}$$

(come verifica, si controlli che $f_{S_1+V}(s) \geq 0$ e che $\int_{\mathbb{R}} f_{S_1+V}(s)ds = 1$).

Infine, sostituendo tale espressione in (1) si ottiene la probabilità richiesta:

$$\mathrm{P}(S_1 > S_2) = \int_0^{\infty} f_{S_1+V}(s)ds = \int_0^{\infty}\frac{5}{126}e^{-s/10}ds = \frac{50}{126}.$$