Tutorato di Probabilità 1, VI
a.a. 2003/2004

****

Simulazione d'esonero, I

Esercizio 1. Un giocatore scommette che, prendendo tre numeri in blocco da un'urna che contiene 10 palline numerate da 1 a 10, estrarrà il numero 1 e il 2. Per aiutare la fortuna, la notte che precede l'estrazione fa in modo di aggiungere all'urna un altro 1 e un altro 2.

(a) Qual è la probabilità che il trucco venga scoperto?

(b) Di quanto è aumentata la probabilità di estrarre i due numeri, senza che il trucco venga scoperto?

Esercizio 2. Un'urna, che indicheremo con U, contiene 2 palline bianche e 1 pallina rossa. Da U vengono effettuate n estrazioni con reinserimento. Sia N il numero totale di palline bianche estratte. Una seconda urna, urna V, viene riempita con N palline bianche e $n-N$ palline rosse.

(a) Calcolare la distribuzione di N.

(b) Dall'urna V viene estratta una pallina: calcolare[1] la probabilità che sia bianca (si interpreti il risultato!).

(c) Calcolare per quali valori di n la probabilità di aver estratto dall'urna U una sola pallina bianca, noto il risultato di cui al punto precedente, sia più grande di 1/2.

Esercizio 3. Due amici, Luca e Marco, giocano a Testa o Croce con il seguente regolamento: lanciano una volta per ciascuno e vince chi per primo ottiene testa. Poiché Luca è solitamente sfortunato, Marco gli concede di cominciare il gioco.

Sia $p \in (0,1)$ la probabilità di ottenere testa in un singolo lancio e sia

$$S = \inf\{n \geq 1 \;:\; \text{all'}n\text{-esimo lancio esce testa}\}$$

il primo istante in cui esce testa.

(a) Calcolare $p_1 = P(S \text{ dispari})$ e $p_2 = P(S \text{ pari})$.

(b) Scrivere in termini di p_1 e p_2 la probabilità che ciascun giocatore ha di vincere e si verifichi se Luca è stato davvero favorito.

(c) Luca e Marco ripetono il gioco più volte e osservano che Luca vince due volte su tre: che valore attibuireste a p?

Esercizio 4. Dato uno spazio di probabilità (Ω, P), siano $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$.

(a) Si mostri che se A, B, C sono indipendenti allora $A \cup B$ e C sono ancora eventi indipendenti.

(b) Si mostri (con un controesempio!) che non vale il viceversa (ovvero, si esibiscano 3 eventi A, B, C tali che $A \cup B$ e C sono indipendenti ma A, B, C sono dipendenti).

---

[1] Potrebbe essere utile sapere che $\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np$.

Simulazione di esonero, II

Esercizio 5. (Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *ad hoc*) Viene scelto a caso un numero tra 1,2,3,4,5 e poi un secondo tra i rimanenti. Calcolare la probabilità che

a) il primo numero è pari;

b) il secondo numero è pari;

c) sono entrambi pari.

Per aumentare la probabilità di scegliere un numero pari, alle cifre 1,2,3,4,5 viene aggiunto un altro 2. Calcolare di quanto sono aumentate le probabilità richieste in **a)**, **b)**, **c)**.

Esercizio 6. Il dado A ha quattro facce rosse e due facce bianche; il dado B ha due facce rosse e quattro facce bianche. Viene tirata una moneta (equa): se esce testa, il gioco prosegue tirando successivamente il dado A, se invece esce croce, è il dado B ad essere usato.

a) Calcolare la probabilità che al generico tiro n esca la faccia rossa.

b) Se nei primi due tiri è uscito rosso, qual è la probabilità che al terzo tiro esca nuovamente rosso?

c) Gli eventi $\{\text{all'}i\text{−esimo tiro esce rosso}\}$ sono indipendenti?

d) Se nei primi n tiri è sempre uscito rosso, qual è la probabilità che si sta giocando con il dado A? Come scegliereste n affinché tale probabilità sia maggiore di 0.99?

Esercizio 7. In una sequenza di prove bernoulliane $X_1, X_2, \ldots$, con $p =$ probabilità del successo, siano T e U rispettivamente il primo e il secondo istante in cui si osserva il successo:

$$T = \inf\{n \geq 1 \,:\, X_n = 1\} \qquad\qquad U = \inf\{n \geq T+1 \,:\, X_n = 1\}$$

a) Calcolare la distribuzione congiunta di T e U e le relative distribuzioni marginali.

b) Posto $V = U - T$, calcolare la distribuzione congiunta di T e V e dire se sono indipendenti.

d) Fissato $k \geq 1$, calcolare $\mathbb{P}(U > T + k)$ e dire per quali valori di k tale probabilità è minore di 0.1.

Esercizio 8. Sia $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ e $\mathbb{P}$ una probabilità su $\mathcal{P}(\Omega)$ tale che $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Sia

$$\begin{array}{rccl} d : & \mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \longmapsto & d(A,B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A), \end{array}$$

dove $A \setminus B = A \cap B^c$. Dimostrare che, per ogni $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$,

(a) $d(A,B) = d(B,A)$ (simmetria);

(b) $d(A,B) \geq 0$ e $d(A,B) = 0$ se e solo se $A = B$ (positività e non degenerazione);

(c) $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$ (disuguaglianza triangolare).

In altre parole, d definisce una *distanza* tra eventi. Dimostrare che vale anche

(d) $d(A,B) \leq 1$ e $d(A,B) = 1$ se e solo se A e B sono disgiunti e $A \cup B = \Omega$.

Soluzioni

1) a) Ovviamente, non cambia (quasi) niente se si aggiungono all'urna due palline numerate 11(corrispondente ad un altro 1) e 12 (corrispondente ad un altro 2): il trucco viene scoperto se due delle 2 palline estratte provengono dal gruppo $\{1,11\}$ oppure $\{2,12\}$. Quindi, il trucco viene scoperto con probabilità pari a:

$$2 \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{12}{3}}.$$

b) Dividiamo in due casi:

- **senza trucco**: in tal caso, si vince se delle 3 palline scelte da $\{1,\ldots,10\}$, due appartengono al gruppo $\{1,2\}$, il che accade con probabilità

$$p_1 = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}};$$

- **col trucco**: in tal caso, si vince (e quindi, non si viene scoperti!) se delle 3 palline scelte da $\{1,\ldots,12\}$, due appartengono al gruppo $\{1,2\}$ oppure al gruppo $\{11,12\}$ oppure $\{1,12\}$ oppure $\{2,11\}$, e la terza al gruppo $\{3,\ldots,10\}$, il che accade con probabilità pari a

$$p_2 = 4 \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}}.$$

La probabilità di vincere è quindi aumentata di

$$p_2 - p_1 = 4 \cdot \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} - \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{2}{55}.$$

2) a) Ovviamente, N è il numero di successi su n prove, dove qui "successo" significa che ad una generica estrazione è uscita una pallina bianca. Quindi,

$$p = \mathbb{P}(\text{ successo}) = \frac{2}{3}$$

e $N \sim \mathrm{Bi}(n,p)$, dunque

$$p_N(k) = \mathbb{P}(N=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,\ldots,n$$

e ovviamente $p_N(k) = 0$ altrimenti.

b) Consideriamo ora l'urna V, contenente un numero N (aleatorio) di palline bianche e $n - N$ palline palline rosse. Se $B = \{\text{dall'urna } V \text{ si estrae una pallina bianca}\}$, si chiede $\mathbb{P}(B)$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B \,|\, N = k)\, \mathbb{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{n}\, np = p.$$

Dunque, se non si conosce qual è la composizione della nuova urna V, la probabilità di estrarre una pallina bianca è la stessa che si ha quando l'estrazione è fatta dalla (vecchia!) urna U.

c) Si chiede per quali valori di n si ha che $\mathbb{P}(N = 1 \,|\, B) > 1/2$. Intanto, si ha:

$$\mathbb{P}(N = 1 \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(B \,|\, N = 1)\, \mathbb{P}(N = 1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{n}\, np(1-p)^{n-1}}{p} = (1-p)^{n-1}.$$

Quindi n va scelto in modo tale che $(1-p)^{n-1} > 1/2$: passando al logaritmo, si ottiene facilmente (ricordando che $1 - p = 1/3$)

$$n - 1 < -\frac{\log 2}{\log(1-p)} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

da cui si ottiene $n = 0$ oppure $n = 1$.

3) Indichiamo con X_n la v.a. che vale 1 se all'n-esimo lancio esce testa e vale 0 altrimenti. Ovviamente, $X_1, X_2, \ldots$ sono prove bernoulliane e per $k = 1, 2, \ldots,$

$$\mathbb{P}(S = k) = \mathbb{P}(X_1 = 0, \ldots, X_{k-1} = 0, X_k = 1) = (1-p)^{k-1}\, p.$$

Dunque, la distribuzione di S è data da $p_S(k) = p(1-p)^{k-1}$ per $k = 1, 2, \ldots,$ e $p_S(k) = 0$ altrimenti.

a) Si ha

$$\begin{aligned} p_1 = \mathbb{P}(S \text{ dispari}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = 2n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^{2n} \\ &= p \sum_{n=0}^{\infty} \Big((1-p)^2\Big)^n = p\, \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p} \end{aligned}$$

Analogamente, $p_1 = \mathbb{P}(S \text{ pari}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = 2n) = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{2n-1}$, ma anche

$$p_2 = 1 - p_1 = \frac{1-p}{2-p}.$$

b) Poiché Luca comincia a giocare per primo, si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{vince Luca}) = \mathbb{P}(S \text{ dispari}) = p_1 = \frac{1}{2-p}, \\ \mathbb{P}(\text{vince Marco}) = \mathbb{P}(S \text{ pari}) = p_2 = \frac{1-p}{2-p}. \end{aligned}$$

Quindi Luca è stato davvero favorito se $p_1 > p_2$: è vero? Verifichiamolo: $p_1 > p_2$ se e solo se

$$\frac{1}{2-p} > \frac{1-p}{2-p},$$

e poiché $p \in (0,1)$, è vero se e solo se $p > 0$. Dunque, Luca è stato in effetti favorito.

c) Si può pensare che la probabilità che vinca Luca è pari a 2/3:

$$\frac{2}{3} = p_1 = \frac{1}{2-p}, \quad \text{che dà } p = \frac{1}{2}.$$

4) a) Si tratta di provare che

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C).$$

Ora,

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C),$$

dal momento che A, B e C sono indipendenti, si ha

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) =$$
$$\mathbb{P}(C)(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A \cup B).$$

b) Siano $D, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ con $0 < \mathbb{P}(D) < 1$ e $0 < \mathbb{P}(C) < 1$. Sian poi A e B disgiunti di probabilità non nulla tali che $A \cup B = D$.Per ipotesi $A \cup B = D$ e C sono indipendenti, ma A, B e C non lo sono infatti $\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

5) Si può prendere Ω come le coppie ordinate di $\{1,2,3,4,5\}$ con coordinate diverse l'una dall'altra:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \,:\, \omega_1 \neq \omega_2 \text{ e } \omega_i \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

cioè, Ω è l'insieme delle disposizioni senza ripetizioni di 2 elementi presi da un insieme che ne contiene 5. Quindi $|\Omega| = 5 \cdot 4 = 20$.

a) Occorre calcolare $\mathbb{P}(A)$, con $A = \{\omega \in \Omega \,:\, \omega_1 \in \{2,4\}\}$. Per ω_1 sono solo 2 le possibilità, mentre per ω_2 ce ne sono 4: $|A| = 2 \cdot 4 = 8$. Quindi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

b) Occorre calcolare $\mathbb{P}(B)$, con $B = \{\omega \in \Omega \,:\, \omega_2 \in \{2,4\}\}$. Ora, se $\omega_1 \in \{1,3,5\}$, allora per ω_2 sono 2 i casi possibili; se invece $\omega_1 \in \{2,4\}$, allora per ω_2 abbiamo 1 sola possibilità. Quindi $|B| = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1$ e

$$\mathbb{P}(B) = \frac{6+2}{20} = \frac{2}{5}.$$

c) Occorre calcolare $\mathbb{P}(C)$, con $C = \{\omega \in \Omega \,:\, \omega_1, \omega_2 \in \{2,4\}\}$. La cardinalità di C è pari al numero di disposizioni senza ripetizione di 2 elementi presi da un insieme che ne contiene 2: $|C| = 2 \cdot 1 = 2$, da cui segue che

$$\mathbb{P}(C) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}.$$

Se si aggiunge un 2 all'insieme dei numeri in questione, ai fini delle richieste (uscita di numeri pari) non cambia niente se il numero che si aggiunge è il 6. Per calcolare le probabilità in **a)**, **b)** e **c)** si può procedere come sopra, con

$$\tilde{\Omega} = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \,:\, \omega_1 \neq \omega_2 \text{ e } \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

e si ottiene:

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) = \frac{3 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{1}{2}, \qquad \tilde{\mathbb{P}}(B) = \frac{3 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{2}, \qquad \tilde{\mathbb{P}}(C) = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}.$$

Le probabilità in **a)**, **b)**, **c)**, aumentano di $\frac{1}{10}$ perché

$$\tilde{\mathbb{P}}(A) - \mathbb{P}(A) = \tilde{\mathbb{P}}(B) - \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \tilde{\mathbb{P}}(C) - \mathbb{P}(C).$$

6) Indichiamo con A e B gli eventi "si gioca con il dado A" e "si gioca con il dado B" rispettivamente. Per $i \geq 1$, definiamo

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se all'}i\text{−esimo tiro esce rosso} \\ 0 & \text{se all'}i\text{−esimo tiro esce bianco} \end{cases}$$

a) Si chiede $\mathbb{P}(X_n = 1)$:

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X_n = 1|B)\mathbb{P}(B) = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

b) Si chiede $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1)$:

$$\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1)}{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1|B)\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

c) Abbiamo visto che $\mathbb{P}(X_3 = 1|X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{5} \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_3 = 1)$. Ciò prova che le X_i non sono indipendenti, quindi anche gli eventi $\{$*all'i−esimo tiro esce rosso*$\}$ non sono indipendenti.

d) Si chiede $\mathbb{P}(A|X_1 = \cdots = X_n = 1)$:

$$\mathbb{P}(A|X_1 = \cdots = X_n = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_n = 1|B)\mathbb{P}(B)}$$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2^n}{2^n + 1}$$

Si vuole scegliere n affinché $\mathbb{P}(A|X_1 = \cdots = X_n = 1) = \frac{2^n}{2^n+1} > 0.99$, che dà $2^n > 99$. Ora, $2^6 = 64$ e $2^7 = 128$: basta prendere $n = 7$.

7) a) Per t, u interi ≥ 1, ovviamente $\mathbb{P}(T = t, U = u) = 0$ se $u < t + 1$. Se invece $u \geq t + 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = t, U = u) &= \mathbb{P}(X_1 = \cdots = X_{t-1} = 0, X_t = 1, X_{t+1} = \cdots = X_{u-1} = 0, X_u = 1)\\ &= (1-p)^{t-1} \cdot p \cdot (1-p)^{u-t-1} \cdot p = p^2(1-p)^{u-2}.\end{aligned}$$

Quindi, per t, u interi,

$$p_{T,U}(t, u) = \begin{cases} p^2(1-p)^{u-2} & \text{se } u \geq t+1 \geq 2\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

Calcoliamo le distribuzioni marginali. Per $t \geq 1$,

$$\begin{aligned}p_T(t) = \sum_u p_{T,U}(t, u) &= \sum_{u=t+1}^{+\infty} p^2(1-p)^{u-2} = p^2(1-p)^{t-1} \sum_{u=t+1}^{+\infty} (1-p)^{u-(t+1)}\\ &= p^2(1-p)^{t-1} \frac{1}{1-(1-p)} = p(1-p)^{t-1}\end{aligned}$$

(come d'altro canto sapevamo già!) e per $u \geq 2$,

$$p_U(u) = \sum_t p_{T,U}(t, u) = \sum_{t=1}^{u-1} p^2(1-p)^{u-2} = (u-1)p^2(1-p)^{u-2}$$

b) Si ha

$$p_{T,V}(t, v) = \mathbb{P}(T = t, V = v) = \mathbb{P}(T = t, U - T = v) = \mathbb{P}(T = t, U = v - t)$$

quindi

$$p_{T,V}(t, v) = \begin{cases} p^2(1-p)^{v-t-2} & \text{se } v \geq 1, t \geq 1\\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

cioè, per $t, v \geq 1$, $p_{T,V}(t, v) = p(1-p)^{t-1} \cdot p(1-p)^{v-1} = p_T(t)\varphi(v)$. Ma allora necessariamente $\varphi(v) = p_V(v)$ e le v.a. T e V sono indipendenti.

c) Si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U > T + k) = \mathbb{P}(V > k) &= \sum_{v=k+1}^{+\infty} p_V(v) = \sum_{v=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{v-1}\\ &= p(1-p)^k \sum_{v=k+1}^{+\infty} (1-p)^{v-(k+1)} = p(1-p)^k \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^k\end{aligned}$$

e $\mathbb{P}(U > T + k) < 0.1$ se e solo se $(1-p)^k < 0.1$, cioè $k > \frac{\ln 0.1}{\ln(1-p)}$.

8) Intanto, per ogni $A \subset \Omega$ si ha

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\,:\,\omega_i \in A} p_i,$$

con la convenzione $\sum_{i\,:\,\omega_i \in A} p_i = 0$ se $A = \emptyset$. Da questa uguaglianza segue allora che

- $\diamond$ $\mathbb{P}(A) = 0$ se e solo se $A = \emptyset$;
- $\diamond$ $\mathbb{P}(A) = 1$ se e solo se $A = \Omega$.

a) $d(A, B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(A \setminus B) = d(B, A)$.

b) Ovviamente $d(A, B) \geq 0$ per ogni A, B ed inoltre se $A = B$ allora $(A \setminus B) = \emptyset = (B \setminus A)$, quindi $d(A, B) = 0$. Supponiamo ora che $d(A, B) = 0$. Allora $\mathbb{P}(A \setminus B) = \mathbb{P}(B \setminus A) = 0$, quindi $A \cap B^c = A \setminus B = \emptyset$ e $B \cap A^c = B \setminus A = \emptyset$, cioè $A \subset B$ e $B \subset A$, da cui segue che $A = B$.

c) Basta osservare che

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \setminus C) &= \mathbb{P}(A \cap C^c) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) \\
&\leq \mathbb{P}(B \cap C^c) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(B \setminus C) + \mathbb{P}(A \setminus B), \\
\mathbb{P}(C \setminus A) &= \mathbb{P}(A^c \cap C) = \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) \\
&\leq \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(B^c \cap C) = \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(C \setminus B)
\end{aligned}$$

quindi

$$d(A, C) = \mathbb{P}(A \setminus C) + \mathbb{P}(C \setminus A) \leq \mathbb{P}(B \setminus C) + \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) + \mathbb{P}(C \setminus B) = d(A, B) + d(B, C).$$

d) Poiché $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$, si ha, per ogni A, B,

$$d(A, B) = \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \leq 1.$$

Inoltre, $d(A, B) = 1$ se e solo se $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \Omega$. Quindi, se $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$ allora $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B = \Omega$ e $d(A, B) = 1$. Viceversa, supponiamo che $d(A, B) = 1$ e verifichiamo che dev'essere $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.

Supponiamo per assurdo che $A \cup B$ non dà tutto Ω:

$$d(A, B) = \mathbb{P}\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \leq \mathbb{P}(A \cup B) < \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

e si otterrebbe una contraddizione. Supponiamo ora che $A \cap B \neq \emptyset$: esiste $\omega^* \in \Omega$ tale che $\omega^* \in A \cap B$, quindi $\omega^* \notin (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ e

$$d(A, B) = \mathbb{P}\Big((A \setminus B) \cup (B \setminus A)\Big) \leq 1 - \mathbb{P}(\{\omega^*\}) < 1,$$

ancora una contraddizione. Possiamo quindi concludere che se $d(A, B) = 1$ allora $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \Omega$.