Tutorato di Probabilità 1,V
a.a. 2003/2004

Esercizio 1.

a) Sia Z una v.a. discreta su $E_Z \subset \mathbb{R}^d$ e $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$. Posto $W = \psi(Z)$, dimostrare che

$$p_W(w) = \sum_{z\in\psi^{-1}(\{w\})} p_Z(z)$$

per ogni $z \in \psi(E_Z)$.

b) Siano X e Y due v.a. su E_X e E_Y rispettivamente, con densità congiunta $p_{X,Y}$ e marginali p_X e p_Y. Dimostrare che la densità discreta della somma $X+Y$ è

$$p_{X+Y}(\xi) = \sum_{x\in E_X} p_{X,Y}(x, \xi - x) = \sum_{y\in E_Y} p_{X,Y}(\xi - y, y)$$

per ogni $\xi \in E_X + E_Y \equiv \{x + y\,;\, x \in E_X, y \in E_y\}$. In particolare, se X e Y sono indipendenti,

$$p_{X+Y}(\xi) = \sum_{x\in E_X} p_X(x)p_Y(\xi - x) = \sum_{y\in E_Y} p_X(\xi - y)p_Y(y)$$

(ovvero, $p_{X,Y}(\xi)$ è dato dal *prodotto di convoluzione* tra p_X e p_Y).

Esercizio 2.

Una moneta, con $p =$probabilità che esca testa, viene lanciata N volte, dove N è una v.a. con distribuzione

$$p_N(n) = \frac{1}{2^n}, \qquad n \geq 1.$$

Sia S il numero di teste osservate.

a) Calcolare la probabilità di non aver osservato teste.

b) Calcolare la distribuzione di S.

c) Calcolare la distribuzione congiunta di S e N.

d) Calcolare la distribuzione condizionale $p_{N\,|\,S}$ di N dato S e verificare che, per ogni $k \geq 0$ fissato, $\sum_n p_{N\,|\,S}(n, |\, k) = 1$.

e) Calcolare la probabilità di aver lanciato la moneta un numero pari di volte noto che non sono state osservate teste.

[Si tenga presente che, per $x \in (0, 1)$, $\displaystyle\sum_{n=\ell}^{\infty} \frac{n!}{(n-\ell)!}\, x^{n-\ell} = \frac{\ell!}{(1-x)^{\ell+1}}$].

Esercizio 3.

Siano X e Y v.a. indipendenti t.c.

$$X = \begin{cases} -1 & \text{con probabilità } \frac{1}{4} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{1}{2} \\ 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \\ 2 & \text{con probabilità } \frac{1}{8} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1 & \text{con probabilità } \frac{1}{3} \\ 0 & \text{con probabilità } \frac{2}{3} \end{cases}$$

a) Disegnare la funzione di ripartizione di X e di Y.

b) Posto $Z = X^2$, dire quali valori può assumere Z. Verificare che Z è una v.a., calcolare la distribuzione e disegnare la funzione di ripartizione di Z.

c) Posto $W = Z + Y$, dire quali valori può assumere W. Verificare che W è una v.a., calcolare la distribuzione e disegnare la funzione di ripartizione di W.

Esercizio 4.

Due giocatori (x e y) ed il banco (z) lanciano un dado ciascuno. Un giocatore vince se ottiene un risultato non inferiore a quello dell'altro giocatore e superiore al risultato del banco, altrimenti vince il banco. Si dica se gli eventi $\{x \text{ } \textit{vince}\}$ e $\{y \text{ } \textit{vince}\}$ sono indipendenti[1].

Risolvere l'esercizio usando le v.a. X = risultato del giocatore x, Y = risultato del giocatore y, Z = risultato del banco z

[1] Per la risoluzione di questo esercizio, potrebbe essere utile ricordare che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n^2-1)}{3}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soluzioni

1) a) Per $w \in \mathbb{R}^m$,

$$
\begin{aligned}
p_W(w) &= \mathbb{P}(W = w) = \mathbb{P}(\psi(Z) = w) = \mathbb{P}(Z \in \psi^{-1}(\{w\}))\\
&= \begin{cases} 0 & \text{se } \psi^{-1}(\{w\}) = \emptyset, \text{ cioè } w \notin \psi(E_Z),\\ \displaystyle\sum_{z\in\psi^{-1}(\{w\})} p_Z(z) & \text{se } \psi^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset, \text{ cioè } w \in \psi(E_Z). \end{cases}
\end{aligned}
$$

b) Si ha:

$$
p_{X+Y}(\xi) = \mathbb{P}(X+Y=\xi) = \begin{cases} \sum_x \mathbb{P}(X = x, Y = \xi - x) = \sum_{x\in E_X} p_{X,Y}(x, \xi - x)\\ \sum_y \mathbb{P}(X = \xi - y, Y = y) = \sum_{y\in E_Y} p_{X,Y}(\xi - y, y) \end{cases}
$$

Se X e Y sono indipendenti, basta ricordare che $p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y)$.

Oppure, si può usare **a)**, con $Z = (X,Y)$ e $\psi(x,y) = x+y$: $\psi^{-1}(\{w\}) = \{(x,y) \in E_X \times E_Y \,:\, y = w - x\} = \{(x,y) \in E_X \times E_Y \,:\, x = w - y\}$, quindi

$$
p_{X+Y}(w) = \begin{cases} \sum_{x,y\,:\,y=w-x} p_{X,Y}(x,y) = \sum_x p_{X,Y}(x, w-x)\\ \sum_{x,y\,:\,x=w-y} p_{X,Y}(x,y) = \sum_y p_{X,Y}(w-y, y) \end{cases}
$$

che è non identicamente nulla sull'insieme $\{w = x+y\,;\, (x,y) \in E_X \times E_Y\}$.

2) a) Se fosse noto il numero di volte in cui la moneta viene tirata, sapremmo che S è una v.a. binomiale. Quindi,

$$
\mathbb{P}(S=0) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S = 0 \,|\, N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{1-p}{2}\Big)^n = \frac{1}{1 - \frac{1-p}{2}} - 1 = \frac{1-p}{1+p}
$$

b) Poiché la moneta è tirata un numero aleatorio N di volte che a priori non è limitato, il numero di teste che si possono osservare è un intero k qualsiasi: fissato $n \geq 1$,

$$
p_{S|N}(k\,|\,n) = \mathbb{P}(S = k \,|\, N = n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n\\ \displaystyle\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} & \text{se } 0 \leq k \leq n \end{cases}
$$

Quindi,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(S = k) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S = k \,|\, N = n)\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq k} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\frac{1}{2^n}\\
&= \frac{p^k}{2^k k!}\sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{n-k} = \frac{p^k}{2^k k!}\frac{k!}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}} = \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}}
\end{aligned}
$$

La distribuzione di S è:

$$p_S(k) = \begin{cases} \frac{1-p}{1+p} & \text{se } k = 0 \\ \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}} & \text{se } k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Come verifica, studiamo $\sum_k p_S(k)$:

$$\sum_k p_S(k) = \sum_{k \geq 0} p_S(k) = \underbrace{\frac{1-p}{1+p}}_{=p_S(0)} + \sum_{k \geq 1} \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}}$$

$$= \frac{1-p}{1+p} + \frac{2p}{(1+p)^2} \sum_{k \geq 1} \Big(\frac{p}{1+p}\Big)^{k-1} = \frac{1-p}{1+p} + \frac{2p}{(1+p)^2} \frac{1}{1 - \frac{p}{1+p}} = 1$$

Per calcolare il numero medio di teste osservate, verifichiamo l'esistenza di $\mathbb{E}(S)$. Poiché S è una v.a. non negativa, dimostrare l'esistenza e calcolare $\mathbb{E}(S)$ di fatto sono equivalenti:

$$\mathbb{E}(S) = \sum_k k p_S(k) = 0 + \sum_{k \geq 1} k \frac{2p^k}{(1+p)^{k+1}} = \frac{2p}{(1+p)^2} \sum_{k \geq 1} k \Big(\frac{p}{1+p}\Big)^{k-1} = \frac{2p}{(1+p)^2} \frac{1}{(1 - \frac{p}{1+p})^2} = \frac{2}{p}.$$

Quindi, tale media sembra non esistere solo per $p = 0$. Ma se $p = 0$, $S = 0$, quindi $\mathbb{E}(S)$ esiste e vale 0. Si noti inoltre che se $p = 1$ allora $S = N$, quindi $\mathbb{E}(N) = 2$: in media la moneta è tirata solo due volte.

c)

$$p_{S,N}(k,n) = p_{S|N}(k \,|\, n) p_N(n) = \begin{cases} \frac{1-p}{2^n(1+p)} & \text{se } k = 0 \text{ e } n \geq 1 \\ \frac{p^k}{2^{n-1}(1+p)^{k+1}} & \text{se } k \geq \text{ e } n \geq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

d) Si chiede, per ogni $k \geq 0$ fissato, $p_{N|S}(n \,|\, k) = \mathbb{P}(N = n \,|\, S = k)$, al variare di $n \geq 1$. Si potrebbe usare la distribuzione congiunta, oppure la formula di Bayes:

$$p_{N|S}(n \,|\, k) = \frac{p_{S|N}(k \,|\, n) p_N(n)}{p_S(k)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n < k \\ \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}} & \text{se } n \geq k, n \geq 1 \end{cases}$$

Inoltre,

$$\sum_n p_{N|S}(n \,|\, k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(1-p)^{n-k}(1+p)^{k+1}}{2^{n+1}}$$

$$= \frac{(1+p)^{k+1}}{k!\, 2^{k+1}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{n-k} = \frac{(1+p)^{k+1}}{k!\, 2^{k+1}} \frac{k!}{(1 - \frac{1-p}{2})^{k+1}} = 1.$$

e) Si ha

$$\mathbb{P}(N \text{ pari} \mid S = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{N \mid S}(2n \mid 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+p}{1-p}\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^{2n}$$
$$= \frac{1+p}{1-p}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Big(\frac{1-p}{2}\Big)^2\Big)^n = \frac{1+p}{1-p}\Big(\frac{1}{1-(\frac{1-p}{2})^2} - 1\Big) = \frac{1-p}{3-p}.$$

4) Indichiamo con X, Y, Z il risultato ottenuto da x, y, z, rispettivamente. Come naturale, supporremo che le variabili aleatorie X, Y, Z siano indipendenti. Allora:

$$\mathbb{P}(\{x \textit{ vince}\}) = \mathbb{P}(X \geq Y, X > Z) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = i, X \geq Y, X > Z) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = i, Y \leq i, Z < i)$$
$$= \sum_{i=2}^{6} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y \leq i)\mathbb{P}(Z < i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\,\frac{i}{6}\,\frac{i-1}{6} = \frac{1}{6^3}\sum_{i=1}^{6} i(i-1) = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{3 \cdot 6^3} = \frac{35}{108}$$

e, per simmetria, $\mathbb{P}(\{x \textit{ vince}\}) = \mathbb{P}(\{y \textit{ vince}\})$. Ora,

$$\mathbb{P}(\{x \textit{ vince}\} \cap \{y \textit{ vince}\}) = \mathbb{P}(X = Y > Z) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = i, X = Y > Z)$$
$$= \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(X = i, Y = i, Z < i) = \sum_{i=2}^{6} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = i)\mathbb{P}(Z < i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{i-1}{6}$$
$$= \frac{1}{6^3}\sum_{i=1}^{6}(i-1) = \frac{15}{6^3} \neq \Big(\frac{35}{108}\Big)^2 = \mathbb{P}(\{x \textit{ vince}\})\mathbb{P}(\{y \textit{ vince}\})$$

e dunque i due eventi in questione *non* sono indipendenti.