

Tutorato di Probabilità 1, II a.a. 2003/2004

Esercizio 1. In un mazzo di n chiavi, una sola chiave apre una certa porta. Per aprire la porta, si prova una chiave alla volta e se non è quella giusta,

- a) la si elimina dal mazzo;
- b) la si reinsertisce nel mazzo (si immagina, in questo caso, di rimescolare tutte le chiavi).

Calcolare la probabilità di aprire la porta al k -esimo tentativo nei due casi **a)** e **b)**. Qual è la probabilità che occorranza almeno j tentativi prima di aprire la porta?¹

Esercizio 2. Consideriamo una partita a poker² tra 4 persone, in cui si usa un mazzo da 32 carte composto da:

8 valori A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7 $\times$ 4 semi $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$

Una “mano” è un insieme di 5 carte scelte a caso dal mazzo.

Facendo uso del calcolo combinatorio, “contare” quante mani contengono: **a)** un tris; **b)** una coppia; **c)** un poker; **d)** un full. Calcolare inoltre la probabilità di essere “serviti” con **a)** un tris; **b)** una coppia; **c)** un poker; **d)** un full.

Esercizio 3. **(a)** Siano A, B due eventi indipendenti tali che $A, B, A \cap B$ abbiano uguale probabilità $p \in [0, 1]$. Calcolare tutti i possibili valori di p .

(b) Siano A, B, C tre eventi, a due a due indipendenti, tali che $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, $P(C) = 2/5$. Calcolare, qualora i dati lo consentano, $P(A \cap (B^c \cup C))$ e $P((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C))$.

(c) Siano A, B, C eventi indipendenti. Provare che anche A, B^c, C sono indipendenti³.

¹Per la risoluzione di questo esercizio, potrebbe essere utile ricordare che, per ogni $\alpha \in (-1, 1)$ e $\ell \geq 0$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i = \sum_{i=\ell}^{\infty} \alpha^{i-\ell} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

²Per coloro che non conoscono il poker:

- una **coppia** è una cinquina (non ordinata) del tipo (X, X, Y, Z, W) : 2 carte dello stesso valore e altre 3 carte di valore diverso tra loro e dalle precedenti (nel valore ma non è detto nel seme);
- un **tris** è una cinquina (non ordinata) del tipo (X, X, X, Y, Z) : 3 carte dello stesso valore e altre 2 carte di valore diverso tra loro e dalle precedenti (nel valore ma non è detto nel seme);
- un **full** è una cinquina (non ordinata) del tipo (X, X, X, Y, Y) : un tris più una coppia;
- un **poker** è una cinquina (non ordinata) del tipo (X, X, X, X, Y) : 4 carte dello stesso valore e 1 “scartina”. Essere “serviti” (ad esempio) con un tris significa avere una mano con un tris. Infine, il numero di partecipanti al gioco determina solo la partizione del mazzo con cui si gioca.

³Si potrebbe dimostrare il seguente risultato più generale: **se $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono eventi indipendenti allora per ogni permutazione $(i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_\ell)$ di $(1, \dots, n)$ anche $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}, A_{j_1}^c, \dots, A_{j_\ell}^c$ sono indipendenti.**

- (d) Siano A, B, C eventi indipendenti, aventi probabilità come nel punto (b). Calcolare, qualora i dati lo consentano, $P((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C))$ e $P((A \cup B^c) \cap (B^c \cup C))$.

Esercizio 4. Siano A, B, C tre eventi.

- (a) Mostrare che se A, B, C sono indipendenti allora $A \cup B$ e C sono ancora eventi indipendenti.
- (b) Mostrare (con un controesempio!) che non vale il viceversa (ovvero, si esibiscano 3 eventi A, B, C tali che $A \cup B$ e C sono indipendenti ma A, B, C sono dipendenti).

Esercizio 5. Un dado viene lanciato 3 volte. Sia X_i il risultato dell' i -esimo lancio e

$$A_1 = \{X_1 = X_2\} \quad A_2 = \{X_2 = X_3\} \quad A_3 = \{X_1 = X_3\}.$$

$\mathcal{K} = \{A_1, A_2, A_3\}$ è una famiglia di eventi indipendenti?

Soluzioni

1) a) In questo caso, si può prendere come punto di vista la posizione nel mazzo della chiave che apre la porta. I casi possibili sono pari al numero delle combinazioni di 1 elemento (= chiave giusta) su n posti (= numero totale delle chiavi): $\binom{n}{1} = n$. Se A_k denota l'evento *la porta si apre al k -esimo tentativo*, allora per A_k c'è una sola possibile scelta: la chiave si deve trovare al k -esimo posto. Quindi

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}.$$

Come verifica, dev'essere $1 = \mathbb{P}(\{\text{aprire la porta}\}) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k)$: mettendo man man da parte le chiavi che non aprono, la chiave funzionante si troverà senz'altro e occorreranno al più n tentativi per aprire la porta. Infatti, tenendo presente che gli A_k sono disgiunti, si ha

$$\mathbb{P}(\{\text{aprire la porta}\}) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = 1.$$

Se $B_j = \{\text{occorrono almeno } j \text{ tentativi per aprire la porta}\}$, allora $B_j = \cup_{k=j}^n A_k$ se $j \leq n$ e $B_j = \emptyset$ se $j > n$, quindi

$$\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(\cup_{k=j}^n A_k) = \sum_{k=j}^n \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=j}^n \frac{1}{n} = \frac{n-j+1}{n}$$

se $1 \leq j \leq n$ e ovviamente $\mathbb{P}(B_j) = 0$ se $j > n$.

b) In questo caso, fissato il numero di tentativi k , il punto di vista può essere il numero di chiavi da testare. Ogni volta che si cerca di aprire la porta, ci sono n possibili chiavi da provare e poiché il numero totale dei tentativi è k , si hanno n^k possibili prove (= disposizioni con ripetizione). Perché la chiave giusta si trovi esattamente al k -esimo tentativo, significa che ci sono $n-1$ chiavi da provare per ogni tentativo precedente a k ed una sola all'ultimo tentativo, quindi $(n-1)^{k-1}$. Allora,

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}.$$

Come verifica, notiamo che qui, a priori, il numero k di tentativi necessari per aprire la porta è qualsiasi: $k \geq 1$. Quindi,

$$\mathbb{P}(\text{aprire la porta}) = \mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 - \frac{n-1}{n}} = 1,$$

il che prova che con certezza la porta si aprirà, prima o poi. Infine, fissato $j \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_j) &= \mathbb{P}(\cup_{k=j}^{\infty} A_k) = \sum_{k=j}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) \\ &= \frac{(n-1)^{j-1}}{n^j} \sum_{k=j}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-j} = n \frac{(n-1)^{j-1}}{n^j} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{j-1}. \end{aligned}$$

2) Osserviamo che il numero totale di mani a disposizione è dato dal numero di tutti i possibili sottoinsiemi di 5 elementi presi da un insieme composto di 32 elementi:

$$\binom{32}{5} = 201376.$$

Ora, per studiare una mano “vincente” di qualsiasi tipo (ad es. un tris), bisogna tener conto che una carta è caratterizzata da uno degli 8 valori (A, K, Q, J, 10, 9, 8, 7) e da uno dei 4 semi di appartenenza ($\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$).

a) Un tris è una cinquina del tipo (X, X, X, Y, Z) , ovvero 3 carte dello stesso valore e altre 2 carte diverse dalle precedenti e diverse tra loro (nel valore ma non è detto nel seme). Contiamo quindi quanti sono tutte le possibili mani contenenti un tris.

- Cominciamo a contare il numero di terne del tipo (X, X, X) che si possono verificare. Fissato un valore possibile per il tris, ad esempio un tris d’assi, nella mano devono comparire 3 dei 4 assi $\heartsuit$, $\diamondsuit$, $\clubsuit$, $\spadesuit$ presenti nel mazzo, il che dà luogo a $\binom{4}{3}$ possibilità. Ciò va ripetuto per 8 possibili valori per il tris. Quindi, in totale abbiamo

$$\binom{4}{3} \cdot 8 = 4 \cdot 8 \text{ possibili terne } (X, X, X).$$

- Contiamo quante sono le possibili “scartine” (Y, Z) . Le due carte devono essere di valore diverso da X (ad es. per avere un tris d’assi, nelle scartine non devono esserci assi), quindi dobbiamo scegliere 2 possibili valori tra i 7 rimasti a disposizione: $\binom{7}{2}$ possibilità. Poi, sia Y che Z possono appartenere ad un seme qualsiasi: 4×4 possibilità. Quindi, in totale abbiamo

$$\binom{7}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 21 \cdot 16 \text{ possibili coppie di scartine } (Y, Z).$$

Il numero di tris possibili è

$$\underbrace{4 \cdot 8}_{X, X, X} \times \underbrace{21 \cdot 16}_{Y, Z} = 10752 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\text{tris servito}) = \frac{10752}{201376} \simeq 0,053.$$

b) Una coppia è una cinquina del tipo (X, X, Y, Z, W) : 2 carte dello stesso valore e 3 scartine di valore diverso tra loro e dalle precedenti. Per contare il numero di mani contenente una coppia procederemo analogamente in a).

Per il numero di coppie (X, X) , osserviamo che per ciascuno degli 8 valori possibili esistono $\binom{4}{2}$ possibili coppie, quindi

$$\binom{4}{2} \cdot 8 = 6 \cdot 8 \text{ possibili coppie } (X, X).$$

Per il numero (Y, Z, W) di scartine, dobbiamo scegliere 3 possibili valori tra i 7 rimasti a disposizione: $\binom{7}{3}$ possibilità. Poi, bisogna anche tenere conto che Y, Z, W possono appartenere ad un seme qualsiasi: $4 \times 4 \times 4$ possibilità. Quindi,

$$\binom{7}{3} \cdot 4^3 = 35 \cdot 64 \text{ possibili terne di scartine } (Y, Z, W).$$

Il numero di coppie possibili è

$$\underbrace{6 \cdot 8}_{X,X} \times \underbrace{35 \cdot 64}_{Y,Z,W} = 107520 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\text{coppia servita}) = \frac{107520}{201376} \simeq 0,53$$

Notare che la probabilità di avere una coppia servita è più di $1/2$, quindi tutto sommato alta⁴, e 10 volte maggiore della probabilità di avere un tris servito.

c) Un poker è una cinquina del tipo (X, X, X, X, Y) : 4 carte dello stesso valore e 1 scartina.

Il numero di quaterne del tipo (X, X, X, X) è 8: per ogni valore fissato, devono uscire per forza le 4 carte $\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit$ con quel valore. Poi, Y dev'essere necessariamente una delle $32-4=28$ carte rimaste. Quindi, il numero di poker possibili è

$$\underbrace{4}_{X,X,X,X} \times \underbrace{28}_Y = 112 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\text{poker servito}) = \frac{112}{201376} \simeq 0,00056$$

d) Un full è una cinquina del tipo (X, X, X, Y, Y) : un tris più una coppia. Abbiamo già visto che il numero di terne (X, X, X) possibili è

$$\binom{4}{3} \cdot 8 = 32.$$

Per il numero di coppie, procediamo in modo analogo a quanto visto in precedenza, tenendo però conto del fatto che il valore della coppia è diverso da quello della terna: va scelto quindi tra 7 (e non 8) possibili valori. Quindi, il numero di coppie (Y, Y) è

$$\binom{4}{2} \cdot 7 = 42.$$

Quindi, il numero di mani che contiene un full è

$$\underbrace{32}_{X,X,X} \times \underbrace{42}_{Y,Y} = 1344 \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(\text{full servito}) = \frac{1344}{201376} \simeq 0,0067.$$

3) (a) $p = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = p^2$, quindi $p \in \{0, 1\}$ (ovvero: A e B sono entrambi eventi certi oppure entrambi impossibili quindi banalmente indipendenti).

(b) Si ha:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cap (B^c \cup C)) &= \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \end{aligned}$$

⁴Nel gioco del poker esiste l'“apertura”: la partenza del gioco è subordinata a che almeno un giocatore abbia una coppia “vestita” (o “figurata”, cioè: A, K, Q o J). I giocatori di poker sanno che, tutto sommato, si apre piuttosto frequentemente. Ciò significa che la probabilità di avere una coppia vestita non dev'essere troppo bassa, anche se è comunque inferiore alla probabilità di avere una coppia.

e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C)) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B^c \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (B^c \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C)\end{aligned}$$

che non sono calcolabili perché i dati del problema non permettono di valutare $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C)$.

(c) Si ha:

$$\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

e, in modo analogo, $\mathbb{P}(B^c \cap C) = \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C)$. Inoltre,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) &= \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

Quindi, A, B^c, C sono indipendenti.

(d) Si ha:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B^c \cap C)) &= \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(B^c \cap C) - \mathbb{P}((A \cap B^c) \cap (B^c \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{5} = \frac{7}{15}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B^c) \cap (B^c \cup C)) &= \mathbb{P}(B^c \cup (A \cap C)) = \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B^c \cap (A \cap C)) \\ &= \mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B^c)\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \frac{2}{5} - \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.\end{aligned}$$

4) (a) Poiché $(A \cap B) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) &= \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \\ &= \mathbb{P}(C)(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C).\end{aligned}$$

(b) Ad esempio, si considerino due lanci di un dado equilibrato e si prendano

$$A = \{\text{al primo lancio esce pari}\},$$

$$B = \{\text{al primo lancio esce } 2\},$$

$$C = \{\text{al secondo lancio esce pari}\}.$$

Qui, $A \cup B$ e C sono indipendenti perché relativi a due lanci diversi ma A, B, C non sono indipendenti perché A e B non lo sono:

$$\mathbb{P}(A|B) = 1 \neq \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)$$

5) Si ha, per $i = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(2 \text{ lanci danno lo stesso risultato}) = \frac{6}{6^2} = \frac{1}{6}$$

e, per $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$,

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(3 \text{ lanci danno lo stesso risultato}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36} = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j),$$

sicché i tre eventi sono a due a due indipendenti. Infine,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(3 \text{ lanci danno lo stesso risultato}) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{6^3} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

dunque $\mathcal{K}$ non è una famiglia di eventi indipendenti.