Tutorato di Probabilità 1, I
a.a. 2003/2004

Esercizio 1. Siano A, B, C tre eventi.

1. Dimostrare che $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Calcolare $\mathbb{P}(A \cap B^c)$ e $\mathbb{P}\big(A \cap (B^c \cup C)\big)$, sapendo che $\mathbb{P}(A) = 1/2$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/4$ e $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1/9$.
3. Dimostrare che $\mathbb{P}\big(A \cup B \cup C\big) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

Esercizio 2. *(Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio campionario Ω ed una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$ ad hoc)* Due numeri vengono estratti da un'urna contenente n palline numerate da 1 a n. Calcolare la probabilità che i due numeri estratti siano consecutivi nell'ipotesi che le estrazioni vengano effettuate:

1. senza rimbussolamento;
2. con rimbussolamento.

Esercizio 3. *(Risolvere l'esercizio costruendo uno spazio campionario Ω ed una probabilità $\mathbb{P}$ su $\mathcal{P}(\Omega)$ ad hoc)* Due amici si trovano in coda ad uno sportello, insieme ad altre $n-2$ persone.

1. Qual è la probabilità che siano separati da k persone?
2. Qual è la probabilità che siano separati da almeno 2 persone?

Esercizio 4. (a) Dati gli eventi $A = \{$*Un individuo è affetto da HIV*$\}$ e $B = \{$*Un individuo è risultato positivo al test HIV*$\}$, si traducano in simboli le seguenti informazioni (ovvero, **formalizzare** le affermazioni che seguono con il linguaggio proprio del calcolo delle probabilità).

a.1 La probabilità che un individuo sia affetto da HIV e risulti positivo al test è 0.4;

a.2 la probabilità che un individuo malato risulti positivo al test è 0.8;

a.3 la probabilità che un individuo sano non risulti positivo al test è 0.9;

a.4 la probabilità che un individuo sia sano e risulti positivo al test è 0.05;

a.5 la probabilità che un individuo che è risultato negativo al test sia effettivamente sano è 9/11.

(b) Sfruttando le informazioni a.1–a.4, si calcoli la probabilità che:

b.1 un individuo sia affetto da HIV oppure risulti positivo al test;

b.2 un individuo sia sano e risulti negativo al test;

b.3 un individuo sia malato ma non risulti positivo al test;

b.4 un individuo sia sano ma non risulti positivo al test;

b.5 un individuo affetto da HIV risulti negativo al test.

Soluzioni

1) 1. Poiché $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ e $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \emptyset$, allora $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$, dunque $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
2. Usando 1., si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(A \cap (B^c \cup C)\big) &= \mathbb{P}\big((A \cap B^c) \cup (A \cap C)\big) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}\big((A \cap B^c) \cap (A \cap C)\big)\\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C)\\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - (\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} = \frac{13}{36}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big(A \cup B \cup C\big) &= \mathbb{P}\big(A \cup (B \cup C)\big) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\big(B \cup C\big) - \mathbb{P}\big(A \cap (B \cup C)\big)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}\big((A \cap B) \cup (A \cap C)\big)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(B \cap C) - \big(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}\big((A \cap B) \cap (A \cap C)\big)\big)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2) I due numeri estratti possono vedersi come una coppia $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \{1, \dots n\}^2$, con caratteristiche diverse a seconda che le estrazioni siano effettuate senza o con rimbussolamento: $\omega_1 \neq \omega_2$ nel primo caso, nessuna restrizione nel secondo (attenzione: si sta tenendo conto dell'ordine!).

Se A denota l'evento i due numeri estratti sono consecutivi, allora, fissato il valore di ω_1, per ω_2 sono possibili le seguenti scelte:

$$\begin{array}{lll} \text{se } \omega_1 = 1 & \text{allora} & \omega_2 = 2\\ \text{se } \omega_1 = n & \text{allora} & \omega_2 = n-1\\ \text{se } \omega_1 \in \{2, \dots n-1\} & \text{allora} & \omega_2 = \omega_1 \pm 1 \end{array}$$

Dunque, $|A| = 1 + 1 + 2(n-2) = 2(n-1)$.

Per il calcolo di $|\Omega|$, occorre distinguere nei due casi che corrispondono ai due tipi di estrazioni (si noti che tale distinzione diviene superflua per il calcolo di $|A|$!)

1. Senza rimbussolamento: $\omega_1 \neq \omega_2$, dunque

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \,:\, \omega_1 \neq \omega_2, \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}\}$$

e $|\Omega| = n(n-1)$. Quindi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}.$$

2. Con rimbussolamento:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \,:\, \omega_1, \omega_2 \in \{1, \dots, n\}\}$$

e $|\Omega| = n^2$. Quindi,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2(n-1)}{n^2}.$$

3) Numerando le possibili posizioni in fila, i posti occupati dai due amici possono essere caratterizzati tramite una coppia di numeri interi compresi tra 1 e n. Quindi, una scelta possibile per Ω è:

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \text{ t.c. } \omega_1 \neq \omega_2 \text{ e } \omega_i \in \{1, \dots, n\}\} \equiv \{1, \dots, n\}^2 \setminus \{(i,i) \,:\, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

da cui segue che $|\Omega| = n(n-1)$.

1. Sia A_k l'evento i due amici sono separati da k persone, con $1 \leq k \leq n-2$: occorre contare gli elementi di A_k. Separiamo il problema in due casi: a) $\omega_1 < \omega_2$ e b) $\omega_1 > \omega_2$. Per a), fissato ω_1, allora necessariamente $\omega_2 = \omega_1 + k + 1$, purché $\omega_1 + k + 1 \leq n$, cioè $\omega_1 \leq n - k - 1$. Dunque, in tal caso, gli elementi di A_k che verificano a) sono $n-k-1$. Discorso analogo per b) (questa volta va fissato ω_2 e fatto variare ω_1): gli elementi di A_k che verificano b) sono ancora $n-k-1$. Segue allora che $|A_k| = 2(n-k-1)$, quindi

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{2(n-k-1)}{n(n-1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2.$$

2. Detto B l'evento i due amici sono separati da almeno 2 persone, ovviamente $B = \emptyset$ se $n < 3$, altrimenti:

$$B = \cup_{k=2}^{n-2} A_k.$$

Poiché l'unione è disgiunta, si potrebbe calcolare $\mathbb{P}(B)$ sommando i valori di $\mathbb{P}(A_k)$ al variare di $k \in \{2, \dots, n-2\}$. In questo caso, però, è più semplice calcolare $\mathbb{P}(B)$ tramite la probabilità del complementare: $B^c = A_0 \cup A_1$ con $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, dunque

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \mathbb{P}(A_0) - \mathbb{P}(A_1) = 1 - \frac{2(n-1)}{n(n-1)} - \frac{2(n-2)}{n(n-1)} = \frac{(n-2)(n-3)}{n-1}.$$

4) **(a)**

a.1 $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.4$;

a.2 $\mathbb{P}(B|A) = 0.8$;

a.3 $\mathbb{P}(B^c|A^c) = 0.9$;

a.4 $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.05$;

a.5 $\mathbb{P}(A^c|B^c) = 9/11$.

(b) In particolare, da a.1 e a.2 segue: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B|A) = 0.55$; da a.1 e a.4 segue: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.5$. Quindi:

b.1 si chiede $\mathbb{P}(A \cup B)$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.55$;

b.2 si chiede $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 0.45$;

b.3 si chiede $\mathbb{P}(A \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1$;

b.4 si chiede $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$: $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0.45$;

b.5 si chiede $\mathbb{P}(B^c|A)$: $\mathbb{P}(B^c|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)}{\mathbb{P}(A)} = 0.2$.