Appunti del corso Probabilità e Finanza
A.A. 2003/2004

Capitolo 4. Martingale

Paolo Baldi
Lucia Caramellino

http://www.mat.uniroma2.it/~caramell

Indice

Capitolo 4

Martingale

4.1 Definizione e generalità

Sia $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Una *filtrazione* è una successione $(\mathscr{F}_n)_n$ *crescente* di sotto-σ-algebre di $\mathscr{F}$, cioè tale che $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}_{n+1} \supset \mathscr{F}_n$. Presa una successione $(X_n)_n$, diremo che è *adattata* alla filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$, o anche che è $\mathscr{F}_n$-adattata, se X_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, per ogni n. In questo paragrafo ci collocheremo sempre in questo contesto.

Definizione 4.1.1. Una successione $(X_n)_n$ di v.a. è una martingala (risp. una supermartingala, una submartingala) rispetto alla filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$ se $(X_n)_n$ è $\mathscr{F}_n$-adattata, la v.a. X_n ha speranza matematica finita per ogni n e se, per ogni n,

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = X_n \quad \text{q.c. (risp. } \leq, \geq).$$

Dunque $(X_n)_n$ è una martingala (risp. una supermartingala, una submartingala) se e solo se, per ogni $A \in \mathscr{F}_n$,

$$\mathbb{E}(1_A X_{n+1}) = \mathbb{E}(1_A X_n) \quad \text{(risp. } \leq, \geq). \tag{4.1}$$

Si noti che $(X_n)_n$ è una supermartingala se e solo se $(-X_n)_n$ è una submartingala e $(X_n)_n$ è una martingala se e solo se $(X_n)_n$ è simultaneamente una supermartingala e una submartingala.

Esempio 4.1.2. Sia X una v.a. avente speranza matematica finita e $\{\mathscr{F}_n\}_n$ una filtrazione. Allora $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)$ è una martingala (esercizio!).

Esempio 4.1.3. Sia $(Y_n)_n$ è una successione di v.a. indipendenti e sia $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Supponiamo inoltre che le Y_n abbiano tutte speranza matematica finita ed $= 0$ (risp. ≤ 0, ≥ 0). Allora: $X_n = Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala (risp. una supermartingala, una submartingala).
Infatti

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = &\ \mathbb{E}(X_n + Y_n \mid \mathscr{F}_n) = \mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(Y_n \mid \mathscr{F}_n) \\
= &\ X_n + \mathbb{E}(Y_n) = \text{(risp. } \leq 0,\ \geq 0)\, X_n
\end{aligned}$$

poiché X_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, mentre Y_n è indipendente da $\mathscr{F}_n$.

4.2 Prime proprietà

- Se $(X_n)_n$ è una martingala (risp. una supermartingala, una submartingala), la successione $(\mathbb{E}(X_n))_n$ è costante (risp. decrescente, crescente). Basta infatti applicare la (4.1) con $A = \Omega$.
- Se $(X_n)_n$ è una martingala (risp. una supermartingala, una submartingala), per $m < n$ si ha $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_m) = X_m$ q.c. (risp. $\leq, \geq$). Infatti, per ricorrenza,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n \mid \mathscr{F}_m] = & \ \mathbb{E}[\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_{n-1}) \mid \mathscr{F}_m] \\ = & \ \mathbb{E}[X_{n-1} \mid \mathscr{F}_m] = \cdots = \mathbb{E}[X_{m+1} \mid \mathscr{F}_m] = X_m \end{aligned}$$

- Se $(X_n)_n$ e $(Y_n)_n$ sono supermartingale, lo stesso vale per $X_n + Y_n$. Anche $X_n \wedge Y_n$ è una supermartingala. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} \wedge Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leq \mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leq X_n \\ \mathbb{E}(X_{n+1} \wedge Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leq \mathbb{E}(Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leq Y_n \end{aligned}$$

  e dunque $\mathbb{E}(X_{n+1} \wedge Y_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) \leq X_n \wedge Y_n$.
- Se $(X_n)_n$ è una martingala (risp. una submartingala) e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa (risp. convessa e crescente) tale che $f(X_n)$ è integrabile per ogni $n \geq 0$, allora $Y_n = f(X_n)$ è una submartingala. La dimostrazione segue direttamente applicando la disuguaglianza di Jensen (per la speranza condizionale).

4.3 La decomposizione di Doob

Si dice che $(A_n)_n$ è un *processo prevedibile crescente* se $A_0 = 0$, $A_n \leq A_{n+1}$ per ogni $n \geq 0$ e A_{n+1} è $\mathscr{F}_n$-misurabile.
Sia $(X_n)_n$ una $\mathscr{F}_n$-submartingala. Definiamo

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = A_n + \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \mid \mathscr{F}_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_{k+1} - X_k \mid \mathscr{F}_k).$$

Per costruzione, $(A_n)_n$ è un processo prevedibile crescente e $M_n = X_n - A_n$ verifica $\mathbb{E}(M_{n+1} - M_n \mid \mathscr{F}_n) = 0$ (perché A_{n+1} è $\mathscr{F}_n$-misurabile!). Quindi, $(M_n)_n$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala ed inoltre

$$X_n = M_n - A_n.$$

Questa decomposizione è, per di più, unica. Infatti, se $X_n = M'_n + A'_n$ è un'altra decomposizione di questo tipo, allora $A'_0 = 0$ e

$$A'_{n+1} - A'_n = X_{n+1} - X_n - (M'_{n+1} - M'_n)$$

da cui, condizionando rispetto a $\mathscr{F}_n$, $A'_{n+1} - A'_n = \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n)$. Dunque, $A'_n = A_n$ e $M'_n = M_n$. Abbiamo quindi dimostrato che

Teorema 4.3.1. *(Decomposizione di Doob) Ogni submartingala $(X_n)_n$ si può scrivere, in maniera unica, nella forma $X_n = M_n + A_n$, dove $(M_n)_n$ è una martingala e $(A_n)_n$ è un processo prevedibile crescente integrabile.*

Il processo prevedibile crescente $(A_n)_n$ del Teorema (4.3.1) si chiama il *compensatore* della submartingala $(X_n)_n$.
Presa una supermartingala (risp. martingala) $(X_n)_n$, allora $(-X_n)_n$ è una submartingala (risp. martingala). Applicando a $(-X_n)_n$ il Teorema 4.3.1, otteniamo la seguente decomposizione di Doob per supermartingale:

Teorema 4.3.2. *Ogni supermartingala $(X_n)_n$ si può scrivere, in maniera unica, nella forma $X_n = M_n - A_n$, dove $(M_n)_n$ è una martingala e $(A_n)_n$ è un processo prevedibile crescente integrabile.*

4.4 Tempi d'arresto

Definizione 4.4.1. (i) Un *tempo d'arresto rispetto alla filtrazione* $(\mathscr{F}_n)_n$, anche detto un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto, è una v.a. $\tau : \Omega \to \bar{\mathbb{N}}$ (quindi può anche prendere il valore $+\infty$) tale che, per ogni $n \geq 0$,

$$\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n.$$

(ii) S τ è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto, si chiama *σ-algebra degli eventi antecedenti al tempo τ*, in simboli $\mathscr{F}_\tau$, la σ-algebra

$$\mathscr{F}_\tau = \{A \in \mathscr{F}_\infty;\ \text{per ogni } n \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}_n\},$$

dove $\mathscr{F}_\infty$ denota la σ-algebra generata da $\bigcup_n \mathscr{F}_n$.

È facile verificare che $\mathscr{F}_\tau$ è effettivamente una σ-algebra (esercizio!).

È utile osservare che nelle (i) e (ii) della Definizione 4.4.1, si possono sostituire le condizioni $\{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}$ e $A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathscr{F}$ con $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}$ e $A \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}$, rispettivamente, poiché

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau = k\}, \qquad \{\tau = n\} = \{\tau \leq n\} \setminus \{\tau \leq n-1\}.$$

Esempio 4.4.2. *(Esempio fondamentale)* Sia $(X_n)_n$ un processo a valori in $(E, \mathscr{E})$ e adattato alla filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$. Poniamo, per $A \in \mathscr{E}$,

$$\tau_A(\omega) = \inf\{n \geq 0; X_n(\omega) \in A\}, \tag{4.2}$$

con l'intesa che $\inf \emptyset = +\infty$. Allora τ_A è un tempo d'arresto, poichè

$$\{\tau_A = n\} = \{X_0 \notin A, X_1 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\} \in \mathscr{F}_n;$$

τ_A si chiama *tempo di passaggio* o *d'ingresso* in A.

Siano τ_1, τ_2 due tempi d'arresto della filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$. Vediamo ora alcune proprietà interessanti, di cui ci serviremo nel seguito. La loro verifica può apparire complicata a prima vista (soprattutto le σ-algebre $\mathscr{F}_\tau$ fanno un po' di paura) ma si rivela poi abbastanza semplice e scolastica.

i) $\tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$, $\tau_1 \wedge \tau_2$ sono tempi d'arresto, rispetto alla stessa filtrazione.

   Limitiamoci a verificare la prima. Abbiamo visto che basta verificare che, per ogni n, $\{\tau_1 + \tau_2 = n\} \in \mathscr{F}_n$. Ma si può scrivere

$$\{\tau_1 + \tau_2 = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{\tau_1 = k, \tau_2 \leq n - k\}.$$

   Ma, se $0 \leq k \leq n$, gli eventi $\{\tau_1\}$ e $\{\tau_2 \leq n - k\}$ appartengono a $\mathscr{F}_n$ (ricordiamo che le σ-algebre $\mathscr{F}_n$ sono crescenti). Si riconosce quindi facilmente che, nella riunione a destra, tutti gli eventi appartengono a $\mathscr{F}_n$.

ii) Se $\tau_1 \leq \tau_2$, allora $\mathscr{F}_{\tau_1} \subset \mathscr{F}_{\tau_2}$.

   Intuitivamente questa relazione è evidente: se il tempo τ_1 precede τ_2, allora gli eventi antecedenti a τ_1 sono anche antecedenti τ_2. Verifichiamo formalmente la proprietà. Sia $A \in \mathscr{F}_{\tau_1}$. Vogliamo verificare che $A \in \mathscr{F}_{\tau_2}$, quindi che

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} \in \mathscr{F}_n, \qquad \text{per ogni } n.$$

   Ma, poiché $\tau_1 \leq \tau_2$, $\{\tau_2 \leq n\} \subset \{\tau_1 \leq n\}$. Dunque possiamo scrivere

$$A \cap \{\tau_2 \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\tau_1 \leq n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau_2 \leq n\}}_{\in \mathscr{F}_n} \in \mathscr{F}_n.$$

iii) $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} = \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$.

   Infatti, $\tau_1 \wedge \tau_2$ è un tempo d'arresto tale che $\tau_1 \wedge \tau_2 \leq \tau_i$, $i = 1, 2$, dunque $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathscr{F}_{\tau_i}$, $i = 1, 2$, e quindi $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \subset \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$. Viceversa, dimostriamo che $\mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2} \supset \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$. Preso $A \in \mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$, allora $A \cap \{\tau_i \leq n\} \in \mathscr{F}_n$, per ogni n e $i = 1, 2$. Quindi,

$$\begin{aligned} A \cap \{\tau_1 \wedge \tau_2 \leq n\} &= A \cap \Big(\{\tau_1 \leq n\} \cup \{\tau_2 \leq n\} \Big) \\ &= \Big(A \cap \{\tau_1 \leq n\} \Big) \cup \Big(A \cap \{\tau_2 \leq n\} \Big) \in \mathscr{F}_n, \end{aligned}$$

cioè $A \in \mathscr{F}_{\tau_1 \wedge \tau_2}$.

iv) $\{\tau_1 < \tau_2\}$ e $\{\tau_1 = \tau_2\}$ appartengono entrambi a $\mathscr{F}_{\tau_1} \cap \mathscr{F}_{\tau_2}$ (esercizio!).

Sia $(X_n)_n$ un processo adattato; spesso avremo bisogno di considerare la posizione del processo al tempo τ, cioè $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$. Possiamo quindi dire che

$$X_\tau = X_n \text{ sull'evento } \{\tau = n\}, \quad n \in \bar{\mathbb{N}}.$$

Osserviamo che la v.a. X_τ è $\mathscr{F}_\tau$-misurabile perché

$$\{X_\tau \in A\} \cap \{\tau = n\} = \{X_n \in A\} \cap \{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n.$$

Il risultato che segue è molto utile per calcolare la speranza condizionale rispetto alla σ-algebra $\mathscr{F}_\tau$.

Proposizione 4.4.3. *Sia X una v.a. integrabile e sia τ un tempo d'arresto. Si ponga, per ogni $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $X_n = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)$. Allora sull'evento $\{\tau = n\}$, si ha $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\tau) = \mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_n)$, cioè*

$$\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\tau) = X_\tau \tag{4.3}$$

Dimostrazione. Se $A \in \mathscr{F}_\tau$, allora $1_A \, 1_{\{\tau = n\}} = 1_{A \cap \{\tau = n\}}$ è $\mathscr{F}_n$-misurabile. Quindi,

$$\mathbb{E}(1_A \, X_\tau) = \sum_{n \in \bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}[1_A \, X_n \, 1_{\{\tau = n\}}] = \sum_{n \in \bar{\mathbb{N}}} \mathbb{E}[1_A \, X \, 1_{\{\tau = n\}}] = \mathbb{E}(1_A \, X),$$

e dunque $\mathbb{E}(X \mid \mathscr{F}_\tau) = X_\tau$.

□

Concludiamo con il prossimo risultato, molto semplice da dimostrare ma, come vedremo in seguito, particolarmente utile.

Proposizione 4.4.4. *Se $(X_n)_n$ è una martingala (risp. una supermartingala, una submartingala), lo stesso è vero anche per il processo arrestato*

$$X_n^\tau = X_{n \wedge \tau},$$

dove τ è una tempo d'arresto della filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$.

Dimostrazione. Per la definizione di tempo d'arresto, $\{\tau \geq n+1\} = \{\tau \leq n\}^c \in \mathscr{F}_n$; dunque

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^\tau_{n+1} - X^\tau_n \,|\, \mathscr{F}_n) = &\ \mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)1_{\{\tau\geq n+1\}} \,|\, \mathscr{F}_n) \\ = &\ 1_{\{\tau\geq n+1\}}\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n \,|\, \mathscr{F}_n) = (\text{risp. } \leq, \geq)\, 0.\end{aligned} \tag{4.4}$$

□

4.5 Il teorema d'arresto

Sia $(X_n)_n$ una supermartingala. Quindi, per $m < n$, si ha $\mathbb{E}(X_n \mid \mathscr{F}_m) \leq X_m$ q.c. Questa proprietà resta vera se si sostituiscono m e n con dei tempi d'arresto? Cioè: se τ_1 e τ_2 sono due tempi d'arresto con $\tau_1 \leq \tau_2$, è vero che

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2} \mid \mathscr{F}_{\tau_1}) \leq X_{\tau_1}? \tag{4.5}$$

Supponiamo $\tau_1 \leq \tau_2 \leq k \in \mathbb{N}$. Poiché $A \cap \{\tau_1 = j\} \in \mathscr{F}_j$ e $(X^{\tau_2}_n)_n = (X_{\tau_2\wedge n})_n$ è una supermartingala,

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2}\, 1_A) = \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}(X_{\tau_2\wedge k}\, 1_{A\cap\{\tau_1=j\}}) \leq \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}(X_{\tau_2\wedge j}\, 1_{A\cap\{\tau_1=j\}}).$$

Ma $X_{\tau_2\wedge j} = j$ su $\{\tau_1 = j\}$, dunque

$$\mathbb{E}(X_{\tau_2}\, 1_A) \leq \sum_{j=0}^{k} \mathbb{E}(X_j\, 1_{A\cap\{\tau_1=j\}}) = \mathbb{E}(X_{\tau_1}\, 1_A).$$

Quindi abbiamo dimostrato che

Teorema 4.5.1. *(Teorema d'arresto) Siano $(X_n)_n$ una martingala (risp. supermartingala, submartingala) e τ_1, τ_2 due tempi d'arresto limitati tali che $\tau_1 \leq \tau_2$. Allora $\mathbb{E}(X_{\tau_2} \mid \mathscr{F}_{\tau_1}) = X_{\tau_1}$ (risp. $\leq, \geq$).*

Prendendo le speranze matematiche,

Corollario 4.5.2. *Siano $(X_n)_n$ una martingala(risp. supermartingala, submartingala) e τ un tempo d'arresto limitato. Allora $\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$ (risp. $\leq, \geq$).*

4.6 Martingale trasformate

Proposizione 4.6.1. *Sia $(M_n)_n$ una $\mathscr{F}_n$-martingala e $(H_n)_n$ un processo prevedibile, cioè tale che H_{n+1} sia $\mathscr{F}_n$ misurabile. Sia*

$$X_0 = 0 \quad \textit{e per } n > 0, \quad X_n = \sum_{j=1}^{n} H_j\,(M_j - M_{j-1})$$

Allora $(X_n)_n$ è ancora una martingala rispetto alla stessa filtrazione $\mathscr{F}_n$.

La martingala $(X_n)_n$ definita nella Proposizione 4.6.1 è detta la *martingala trasformata di* $(M_n)_n$ *tramite* $(H_n)_n$.

Dimostrazione della Proposizione 4.6.1. X_n è chiaramente $\mathscr{F}_n$-misurabile e poiché H_{n+1} è $\mathscr{F}_n$-misurabile, si ha

$$\mathbb{E}(H_{n+1}\,(M_{n+1}-M_n)\,|\,\mathscr{F}_n) = H_{n+1}\,\mathbb{E}((M_{n+1}-M_n)\,|\,\mathscr{F}_n) = 0.$$

Essendo $X_{n+1} = H_{n+1}\,(M_{n+1}-M_n) + X_n$, si ha

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_{n+1}\,|\,\mathscr{F}_n) &= \mathbb{E}(H_{n+1}\,(M_{n+1}-M_n)\,|\,\mathscr{F}_n) + \mathbb{E}(X_n\,|\,\mathscr{F}_n)\\ &= H_{n+1}\,\mathbb{E}(M_{n+1}-M_n\,|\,\mathscr{F}_n) + X_n = X_n\end{aligned}$$

□

Presentiamo infine un'utile caratterizzazione delle martingale, che fa uso delle martingale trasformate.

Proposizione 4.6.2. *Sia* $(M_n)_n$ *un processo* $\mathscr{F}_n$*-adattato.* $(M_n)_{0\le n\le N}$ *è una martingala se e solo se per ogni processo prevedibile* $(H_n)_{0\le n\le N}$ *si ha*

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n=1}^{N} H_n(M_n - M_{n-1})\Big) = 0.$$

Dimostrazione. Se $(M_n)_{0\le n\le N}$ è una martingala, dalla Proposizione 4.6.1 anche $(X_n)_{0\le n\le N}$ è una martingala, con $X_n = \sum_{j=1}^{n} H_j\,(M_j - M_{j-1})$ per $n \ge 1$ e $X_0 = 0$. Quindi,

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n=1}^{N} H_n(M_n - M_{n-1})\Big) = \mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0) = 0.$$

Viceversa, per dimostrare che $(M_n)_{0\le n\le N}$ è una martingala basta far vedere che $\mathbb{E}(M_{n+1}\,1_A) = \mathbb{E}(M_n\,1_A)$, per ogni fissato $n = 0, 1, \ldots, N-1$ e $A \in \mathscr{F}_n$. Fissiamo quindi $n = 0, 1, \ldots, N-1$ e $A \in \mathscr{F}_n$. Sia

$$H_j = \begin{cases} 1_A & \text{se } j = n+1\\ 0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

H è ovviamente prevedibile e

$$0 = \mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^{N} H_j\,(M_j - M_{j-1})\Big) = \mathbb{E}\Big(1_A\,(M_{n+1} - M_n)\Big)$$

cioè $\mathbb{E}(M_{n+1}\,1_A) = \mathbb{E}(M_n\,1_A)$.

□

Bibliografia

[1] P. Baldi (2000) *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni.* Pitagora Editrice.

[2] P. Billingsley (1989) *Probability and measure.* Whiley.

[3] D. Williams (1991) *Probability with martingales.* Cambridge University Press.