Capitolo 5

Modelli probabilistici per la finanza

5.1 Introduzione

In questo capitolo introdurremo un modello probabilistico utile per lo studio di alcuni problemi di finanza matematica, a cui abbiamo già accennato nel primo capitolo. La trattazione segue per lo più il testo di Lamberton e Lapeyre [4].

Considereremo i problemi legati al calcolo del prezzo delle *opzioni*, che in passato è stata la motivazione principale per la costruzione della teoria della finanza matematica e tuttora rappresenta un esempio rilevante di utilizzo della teoria della probabilità e, in particolare, del calcolo stocastico.

Le opzioni sono state brevemente introdotte nel Capitolo 1, riprendiamo ora gli aspetti più importanti. Il nostro obiettivo è la costruzione di un modello matematico adatto a studiarle.

Una *opzione* dà a colui che la detiene il diritto, ma non l'obbligo, di comprare o vendere un bene ad una data futura prefissata e ad un prezzo prefissato oggi. Un po' di terminologia:

- il bene cui si riferisce l'opzione è detto *bene o attivo sottostante*;
- l'istante in cui si può esercitare l'opzione è detto *maturità* o anche *data d'esercizio*;
- il prezzo prefissato è il *prezzo d'esercizio*.

Dunque, per caratterizzare un'opzione su un attivo finanziairio occorre specificare

- il tipo di opzione: ad esempio, l'opzione a comprare si chiama *call*, l'opzione a vendere *put*;

- le modalità di esercizio: se l'opzione può essere esercitata esclusivamente alla data di maturità, l'opzione si dice *europea*; esistono anche opzioni, dette *americane*, che possono essere esercitate in un qualsiasi istante prima della maturità;

- il prezzo di esercizio K e la data di maturità T.

In questo capitolo ci occuperemo delle opzioni europee, rimandando al prossimo la trattazione delle opzioni americane.

Un'opzione costa. È evidente infatti che il detentore dell'opzione acquisisce un vantaggio, mentre chi ha ceduto l'opzione si è assunto dei rischi, che è giusto che vengano remunerati. Qual è il giusto compenso? Il prezzo dell'opzione è anche detto *premio*. Comunque, di solito, l'opzione è trattata in un mercato finanziario organizzato ed il prezzo è determinato dal mercato stesso. È comunque un problema interessante costruire un modello teorico per calcolare il prezzo, anche quando il premio è quotato dal mercato. Ciò permette infatti di studiare ed eventualmente individuare anomalie nelle quotazioni.

Ci si può aspettare che il prezzo di una data opzione debba dipendere dal comportamento dell'attivo sottostante (dal fatto che esso tenda a crescere o a decrescere oppure che sia soggetto o meno a forti oscillazioni). Vedremo che il prezzo di una opzione dipende dal comportamento dell'attivo sottostante unicamente per una sola quantità σ (la volatilità), che misura la tendenza del prezzo del titolo di base a oscillare.

Il detentore dell'opzione è anche detto il *compratore dell'opzione*. Colui che invece cede l'opzione al detentore è detto *venditore dell'opzione*.

Per esempio, vediamo un po' più in dettaglio cosa succede nel caso della call europea (opzione a comprare). Indichiamo con t il tempo, supponendo $t \geq 0$ e $t = 0$ ha il significato di "oggi". Indichiamo ora con S_t il valore (=prezzo) di mercato all'istante t del bene sottostante l'opzione. Siano poi T l'istante di maturità e K il prezzo di esercizio della call. Il valore del bene sottostante a maturità è dato da S_T e la decisione di esercitare o meno l'opzione segue dal confronto tra S_T e K. Infatti,

> se $S_T > K$, conviene comprare il bene al prezzo di esercizio K piuttosto che al prezzo di mercato S_T: *l'opzione è esercitata*;
>
> se $S_T < K$, conviene comprare il bene al prezzo di mercato S_T piuttosto che al prezzo di esercizio K: *l'opzione non è esercitata*.

Dunque, la perdita a cui si espone il venditore di una opzione call, detto anche *valore o payoff della call*, è dato da

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0).$$

Si noti che S_T è il valore a maturità (cioè a $t = T$) del bene sottostante. In particolare è un valore futuro che oggi ($t = 0$) non si conosce.

I problemi di interesse, come vedremo sono due:

1. Quanto deve pagare il detentore il suo diritto di opzione?

2. Che tipo di investimenti deve fare il venditore dell'opzione per far fronte al contratto? In altre parole, come si fa a generare un ammontare di denaro che a maturità T dev'essere pari a $(S_T - K)_+$? Questo è il problema della *copertura dell'opzione*.

Considerazioni analoghe si possono fare nel caso di opzione put (opzione a vendere). Il valore della put europea è quindi dato da

$$(K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0) = (S_T - K)_-$$

dove, come sopra, K denota il prezzo di esercizio, T la maturità e S_T il valore del bene sottostante a maturità. Infatti, nel caso della put,

> se $S_T < K$, conviene vendere il bene al prezzo di esercizio K piuttosto che al prezzo di mercato S_T: *l'opzione è esercitata*;
>
> se $S_T > K$, conviene vendere il bene al prezzo di mercato S_T piuttosto che al prezzo di esercizio K: *l'opzione non è esercitata*.

Ricordiamo che sono in vigore le ipotesi sul mercato, che abbiamo fatto nel capitolo 1 e in particolare nel paragrafo 1.2.3. Ad esse bisogna aggiungere quella di assenza di arbitraggio. Ricordiamo che una operazione di arbitraggio è un'operazione finanziaria tale che

- non occorre in alcun momento investire del capitale;

- non si può avere in alcun caso una perdita e si ha, con probabilità positiva, un guadagno.

Nel Capitolo 1, abbiamo già visto alcuni esempi di arbitraggio ed abbiamo anche osservato che, poiché i mercati finanziari sono molto liquidi (ovvero si possono effettuare numerose transazioni), la richiesta di assenza di arbitraggio è comunemente accettata nei modelli che descrivono i mercati finanziari.

In questo capitolo, daremo all'arbitraggio una definizione matematicamente rigorosa. Osserviamo che l'ipotesi di assenza di arbitraggio si traduce in condizioni che bisogna imporre al *modello matematico* che costruiremo. In altre parole, quando si costruisce un modello matematico per questo tipo di problemi sarà sempre necessario accertarsi che esso soddisfi alla proprietà di assenza d'arbitraggio.

5.2 Modelli discreti per la descrizione dei mercati finanziari

In questo paragrafo introduciamo un modello discreto, abbastanza semplice, che però permetterà di descrivere l'evoluzione dei prezzi in un mercato finanziario.

Sia$(\Omega, \mathscr{F}, \mathrm{P})$ uno spazio di probabilità finito: Ω è un insieme di cardinalità finita e $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. Supporremo anche che $\mathrm{P}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Su $(\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{P})$ supponiamo sia definita una filtrazione $(\mathscr{F}_n)_{n=0,1,\dots,N}$, con

$$\{\emptyset, \Omega\} = \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \cdots \subset \mathscr{F}_N = \mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega).$$

L'indice n ha il significato di tempo (discreto), mentre la σ-algebra $\mathscr{F}_n$ rappresenta l'informazione data dal mercato fino all'istante n. Il tempo (finale) N rappresenterà invece la maturità dell'opzione.

Il mercato finanziario che consideriamo consiste di $d+1$ titoli finanziari, i cui prezzi al tempo n sono dati dalle $d+1$ componenti del vettore aleatorio

$$S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d).$$

Poché gli investitori conoscono presente e passato del mercato (ma ovviamente non il futuro), supporremo che, per ogni n, la v.a. S_n sia $\mathscr{F}_n$-misurabile. In particolare, si ha S_0 deterministico[1].

Supporremo che il titolo di prezzo S_n^0 sia il *titolo non rischioso*. Se si suppone che il rendimento r su un periodo unitario sia costante, abbiamo già visto nel primo capitolo che

$$S_n^0 = S_0^0 (1+r)^n.$$

Normalmente, per convenzione, si pone $S_0^0 = 1$, dunque

$$S_n^0 = (1+r)^n.$$

Per $n = 0, 1, \dots, N$ sia

$$\beta_n = \frac{1}{S_n^0} = (1+r)^{-n}$$

il *coefficiente di sconto* al tempo n: se al tempo 0 si investe a tasso costante una quantità di denaro pari a x, al tempo n si riceverà una quantità pari a

$$x_n = x(1+r)^{-n} = \frac{x}{\beta_n}.$$

Quindi, in particolare β_n, è l'ammontare (in Euro) che occorre investire nel titolo non rischioso per disporre al tempo n di 1 Euro.

[1] Ricordiamo infatti che una v.a. misurabile rispetto alla σ-algebra banale $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ è necessariamente costante.

I rimanenti titoli indicizzati con $1, 2, \ldots, d$ sono detti *titoli rischiosi.* Ci troveremo spesso a considerare i valori scontati dei prezzi $\widetilde{S}^1_n, \ldots, \widetilde{S}^d_n$, definiti da

$$\widetilde{S}^1_n = (1+r)^{-n}\widetilde{S}^1_n, \quad \ldots \quad \widetilde{S}^d_n = (1+r)^{-n}\widetilde{S}^d_n.$$

$\widetilde{S}_n$ indicherà il vettore dei prezzi scontati, cioè

$$\widetilde{S}_n = (1+r)^{-n}\, S_n = (1, \widetilde{S}^1_n, \ldots, \widetilde{S}^d_n).$$

5.3 Strategie ed arbitraggio

Indicheremo con il termine *portafoglio* un insieme di titoli presi tra i $d+1$ titoli presenti sul mercato, ciascuno dei quali in una certa quantità. Vediamo meglio come si definisce matematicamente un portafoglio.

Definizione 5.3.1. Chiameremo *strategia di gestione*, o più semplicemente una *strategia*, una sequenza predicibile di v.a. $\phi = (\phi_n)_n$ a valori in $\mathbb{R}^{d+1}$, dove $\phi_n = (\phi^0_n, \phi^1_n, \ldots, \phi^d_n)$.

Le quantità ϕ^i_n della Definizione 5.3.1 rappresentano la quantità (numero di quote) dell'i-esimo titolo presente nel portafoglio. In particolare il valore del portafoglio al tempo n per una strategia ϕ è pari a

$$\phi^0_n S^0_n + \phi^1_n S^1_n + \cdots + \phi^d_n S^d_n.$$

Ricordiamo che una successione di v.a. $\phi = (\phi_n)_n$ si dice *predicibile* se

$$\phi_0 \text{ è } \mathscr{F}_0\text{-misurabile} \qquad \text{e} \qquad \text{per ogni } n \geq 1,\ \phi_n \text{ è } \mathscr{F}_{n-1}\text{-misurabile.}$$

In particolare una strategia ϕ è adattata alla filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$, cioè, ϕ_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, per ogni n.

La richiesta di predicibilità è abbastanza naturale. Imporre che ϕ_n sia $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabile significa tenere conto del fatto, che succede nella realtà, che l'investitore deve stabilire le quantità $\phi^0_n, \phi^1_n, \ldots, \phi^d_n$ *prima* di conoscere i valori dei prezzi al tempo n.

Ad esempio, se il tempo indica i giorni e $S^0_n, \S^1_n, \ldots, S^d_n$ sono i prezzi allo n-esimo giorno, allora in chiusura dello n-esimo giorno, l'investitore dispone di un portafoglio $\phi^0_n, \phi^1_n, \ldots, \phi^d_n$ ed il suo portafoglio vale

$$\phi^0_n S^0_n + \phi^1_n S^1_n + \cdots + \phi^d_n S^d_n. \tag{5.1}$$

Egli può decidere di vendere delle quote, acquistarne altre, eventualmente aggiungere nuovo denaro o toglierne, modificando la ripartizione del capitale investito. Per prendere queste decisioni egli dispone però solo delle informazioni fino al tempo n. Indichiamo con $\phi^0_{n+1}, \phi^1_{n+1}, \ldots, \phi^d_{n+1}$ le quote dei vari attivi presenti nel portafoglio, dopo questa operazione di aggiustamento. Queste quantità devono quindi essere $\mathscr{F}_{n-}$-misurabili. Il suo capitale sarà ora pari a

$$\phi^0_{n+1} S^0_n + \phi^1_{n+1} S^1_n + \cdots + \phi^d_{n+1} S^d_n. \tag{5.2}$$

Osservazione 5.3.2. Nella Definizione 5.3.1, si richiede $\phi_n \in \mathbb{R}^{d+1}$, quindi $\phi_n^i \in \mathbb{R}$ per ogni $i = 0, 1, \ldots, d$. In paritcolare si assume che queste v.a. possano prendere valori negativi oppure non interi. Osserviamo che questa condizione riflette le ipotesi che sono state fatte sul mercato nel paragrafo 1.2.3. In particolare è possibile effettuare vendite o acquisti allo scoperto. Poiché, come abbiamo visto, ϕ_n^i rappresenta la quantità investita nel titolo i, queste quantità ϕ_n^i possono prendere valori negativi. Inoltre è possibile acquistare frazioni di un bene finanziario, quindi le quantità ϕ_n^i possono prendere valori non interi.

Data una strategia ϕ, ad essa si possono associare alcune quantità d'interesse.

- *Il valore, al tempo n, del portafoglio* associato:

$$V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_n \rangle = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i \, S_n^i.$$

- *Il valore scontato, al tempo n, del portafoglio* associato: $\widetilde{V}_n(\phi) = (1 + r)^{-n} V_n(\phi)$, quindi

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_n, \widetilde{S}_n \rangle = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^i \, \widetilde{S}_n^i.$$

dove

$$\widetilde{S}_n = (1 + r)^{-n} \, S_n = (1, \widetilde{S}_n^1, \ldots, \widetilde{S}_n^d)$$

è il vettore dei *valori scontati dei prezzi.* Da notare che la prima coordinata di quest'ultimo è sempre uguale a 1. Da notare anche che, evidentemente, $\widetilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi)$

Nella classe di tutte le possibili strategie, particolare rilevanza hanno quelle autofinanzianti, soddisfacenti alla seguente

Definizione 5.3.3. Una strategia ϕ è detta *autofinanziante* se per ogni $n = 0, 1, \ldots, N - 1$ si ha

$$\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle.$$

Il significato di una strategia autofinanziante è abbastanza semplice. La quantità $\langle \phi_n, S_n \rangle$ è la stessa cosa che la (5.1), cioè il capitale investito al tempo n. Invece $\langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ è la stessa cosa che la (5.2). Dunque una strategia è autofinanziante se ogni aggiustamento delle quote viene fatto senza aggiunta o ritiro di capitale.

Osservazione 5.3.4. L'uguaglianza $\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ è equivalente a

$$\langle \phi_{n+1}, S_{n+1} - S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle$$

o anche
$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_n, S_{n+1} - S_n \rangle.$$
Questa seconda uguaglianza è particolarmente indicativa: una strategia ϕ è autofinanziante se la variazione del portafoglio (guadagno se > 0, perdita se < 0) $V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi)$ tra n e $n+1$ dipende dalla variazione dei prezzi $S_{n+1} - S_n$ e dalle loro quote ϕ_n detenute al tempo n.

La proposizione che segue dà un'ulteriore caratterizzazione delle strategie autofinanzianti.

Proposizione 5.3.5. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*
i) La strategia ϕ è autofinanziante.
ii) Per ogni $n = 0, 1, \dots, N$,
$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle,$$
dove $\Delta S_j = S_j - S_{j-1}$ è il vettore delle variazioni dei prezzi al tempo j.
iii) Per ogni $n = 0, 1, \dots, N$,
$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \, \Delta \widetilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \, \Delta \widetilde{S}_j^d \right) \quad (5.3)$$
dove $\Delta \widetilde{S}_j = \widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1} = \beta_j \, S_j - \beta_{j-1} \, S_{j-1}$ è il vettore delle variazioni dei prezzi scontati al tempo j.

Dimostrazione. *(i) ⇒ (ii).* Se ϕ è autofinanziante allora, per l'Osservazione 5.3.4,
$$V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \big(V_j(\phi) - V_{j-1}(\phi) \big) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \Delta S_j \rangle.$$
(ii) ⇒ (i). Se vale *(ii)* allora
$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \langle \phi_n, \Delta S_{n+1} \rangle$$
e ancora l'Osservazione 5.3.4 garantisce che ϕ è autofinanziante.
(i) ⇔ (iii). Poiché $\langle \phi_n, S_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle$ se e solo se $\langle \phi_n, \widetilde{S}_n \rangle = \langle \phi_{n+1}, \widetilde{S}_n \rangle$, basta procedere come sopra. La seconda uguaglianza in *(iii)* segue immediatamente dal fatto che $\Delta \widetilde{S}_j^0 = \beta_j \, S_j^0 - \beta_{j-1} \, S_{j-1}^0 = 0$.
□

Osserviamo che la relazione (5.3) afferma, in particolare, che per una strategia autofinanziante, il valore del portafoglio al tempo n non dipende dalle quantità investite nel titolo non rischioso ϕ_n^0. Più precisamente, si ha

Proposizione 5.3.6. *Siano* $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0\le n\le N}$ *un processo predicibile e* V_0 *una v.a.* $\mathscr{F}_0$*-misurabile. Allora esiste un unico processo predicibile* $(\phi_n^0)_{0\le n\le N}$ *tale che* $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_{0\le n\le N}$ *sia una strategia autofinanziante ed il valore del portafoglio associato a* ϕ *abbia valore iniziale* V_0*:* $V_0(\phi) = V_0$.

Dimostrazione. Il valore scontato del portafoglio associato a ϕ è

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \phi_n^0 + \phi_n^1 \widetilde{S}_n^1 + \cdots + \phi_n \widetilde{S}_n^d$$

e abbiamo visto che ϕ è una strategia autofinanziante se e solo se

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \Big(\phi_j^1 \,\Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \,\Delta\widetilde{S}_j^d\Big).$$

Se $V_0(\phi) = V_0$, ϕ_n^0 è dunque univocamente individuato da

$$\begin{aligned}\phi_n^0 &= V_0 + \sum_{j=1}^n \Big(\phi_j^1 \,\Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \,\Delta\widetilde{S}_j^d\Big) - \Big(\phi_n^1 \,\widetilde{S}_n^1 + \cdots + \phi_n \widetilde{S}_n^d\Big) = \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \Big(\phi_j^1 \,\Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \,\Delta\widetilde{S}_j^d\Big) - \Big(\phi_n^1 \,\widetilde{S}_{n-1}^1 + \cdots + \phi_n \widetilde{S}_{n-1}^d\Big).\end{aligned}$$

Basta quindi mostrare che $(\phi_n^0)_{0\le n\le N}$ è predicibile, ma questo è immediato, poiché si vede che ϕ_n^0 è una funzione che dipende solo dalle quantità ϕ_k^i con $k \le n$, S_j^i con $j \le n-1$, che sono tutte quantità $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabili.

□

Osservazione 5.3.7. Osserviamo che, se i prezzi scontati dei titoli rischiosi, $(\widetilde{S}_n^i)_n$, $i = 1, \dots, d$ fossero delle martingale, allora anche ogni portafoglio scontato sarebbe una martingala. Infatti, per $i = 1, \dots, d$, il processo

$$\sum_{j=1}^n \phi_j^1 \,\Delta\widetilde{S}_j^i = \sum_{j=1}^n \phi_j^1 \,(\widetilde{S}_j^i - \widetilde{S}_{j-1}^i)$$

risulterebbe essere una martingala trasformata, grazie alla Proposizione 4.6.1.

Abbiamo visto che un portafoglio può contenere anche quantità negative di un titolo. Sarà però ragionevole imporre che esso debba comunque avere un valore che sia globalmente positivo.

Definizione 5.3.8. Una strategia ϕ è detta *ammissibile* se è autofinanziante e se $V_n(\phi) \ge 0$ per ogni $n = 0, 1, \dots, N$.

Possiamo ora formalizzare il concetto di arbitraggio, ossia la possibilità di effettuare profitti senza rischio:

Definizione 5.3.9. Una *strategia di arbitraggio* è una strategia ammissibile ϕ, tale che il valore iniziale del portafoglio associato è nullo e il valore finale è non nullo.

Una strategia ϕ quindi è d'arbitraggio se è autofinanziante e se

$$\begin{aligned}&V_0(\phi) = 0\\&V_n(\phi) \geq 0 \text{ per ogni } n = 1, 2, \dots, N\\&\mathrm{P}(V_N(\phi) > 0) > 0.\end{aligned}$$

5.4 Arbitraggio e martingale

È naturale porre la definizione

Definizione 5.4.1. Si dice che si è in *assenza di arbitraggio* o anche che il mercato è *privo di arbitraggio* se non è possibile costruire strategie di arbitraggio.

In questo paragrafo vedremo che la condizione di di assenza di arbitraggio è equivalente ad una condizione molto interessante da un punto di vista matematico.

Osservazione 5.4.2. La Definizione 5.4.1 si può riscrivere in termini matematici nel modo seguente.

Sia Γ la famiglia di v.a.

$$\begin{aligned}\Gamma = &\ \{X : \Omega \to \mathbb{R} : \mathrm{P}(X > 0) > 0\}\\ = &\ \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X(\omega) \geq 0 \text{ per ogni } \omega \text{ ed esiste } \bar{\omega} \text{ t.c. } X(\bar{\omega}) > 0\}.\end{aligned}$$

Si tratta di un *cono*: se $X \in \Gamma$, allora anche $\lambda X \in \Gamma$ per ogni $\lambda > 0$. Inoltre Γ è un insieme convesso: se $0 \leq t \leq 1$ e $X, Y \in \Gamma$, allora $tX + (1-t)Y \in \Gamma$.

Allora si può dire che il mercato è privo di arbitraggio se

per ogni strategia ammissibile ϕ tale che $V_0(\phi) = 0$ allora $V_N(\phi) \notin \Gamma$.

Lemma 5.4.3. *Sia* $((\rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ *una sequenza predicibile a valori in* $\mathbb{R}^d$ *e sia*

$$\widetilde{G}_N(\rho^1, \dots, \rho^d) = \sum_{j=1}^{N} \Big(\rho_j^1 \, \Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots + \rho_j^d \, \Delta\widetilde{S}_j^d\Big).$$

Se il mercato è privo di arbitraggio allora

$$\mathrm{P}(\widetilde{G}_N(\rho^1, \dots, \rho^d) > 0) = 0.$$

Dimostrazione Poiché $((\rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ è predicibile, per la Proposizione 5.3.6 esiste un processo predicibile $(\rho_n^0)_n$ tale che $\rho = ((\rho_n^0, \rho_n^1, \dots, \rho_n^d))_n$ è una strategia autofinanziante. Inoltre si ha $\widetilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) = \widetilde{V}_n(\rho)$, con la condizione $V_0(\rho) = 0$. Dunque, se fosse $\widetilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) \geq 0$ per ogni n, ρ sarebbe una strategia non solo autofinanziante ma anche ammissibile tale che $\mathrm{P}(V_N(\rho)) > 0) > 0$, dunque una strategia di arbitraggio, il che non è possibile. Dunque, dev'essere

$$\mathrm{P}(\widetilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0 \text{ per qualche } n < N.$$

Mostriamo che allora è possibile costruire una strategia di arbitraggio. Poniamo

$$n_0 = \sup\{n \,:\, \mathrm{P}(\widetilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0\}.$$

È chiaro che $n_0 \leq N - 1$, e inoltre si ha

$$\begin{array}{l} \mathrm{P}(\widetilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0 \\ \widetilde{G}_n(\rho^1, \dots, \rho^d) \geq 0 \quad \text{per ogni } n = n_0 + 1, \dots, N. \end{array}$$

Poniamo $A = \{\widetilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0\}$ e definiamo il processo ϕ nel modo seguente: per $i = 1, \dots, d$,

$$\phi_n^i = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq n_0 \\ \rho_n^i \, 1_A & \text{se } n > n_0. \end{cases}$$

Verifichiamo che $(\phi_n^i)_n$ è predicibile: per $n \leq n_0$ si ha $\phi_n^i = 0$, dunque $\phi_n^i = 0$ è $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabile; se invece $n > n_0$, ϕ_n^i è una funzione misurabile di ρ_n^i, che è $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabile, e di $\widetilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d)$, che è $\mathscr{F}_{n_0}$-misurabile e quindi anche F_{n-1}-misurabile. Per la Proposizione 5.3.6, esiste un processo $(\phi_n^0)_n$, predicibile, tale che $\phi = ((\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ sia una strategia autofinanziante di portafoglio scontato

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \sum_{j=1}^{n} \left(\phi_j^1 \, \Delta\widetilde{S}_j^1 + \cdots + \phi_j^d \, \Delta\widetilde{S}_j^d\right)$$

(abbiamo scelto $V_0 = 0$). Sostituendo ϕ, otteniamo facilmente

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq n_0 \\ \left(\widetilde{G}_n(\rho) - \widetilde{G}_{n_0}(\rho)\right) 1_A & \text{se } n > n_0. \end{cases}$$

Poiché $\widetilde{G}_n(\rho) \geq 0$ per ogni $n \geq n_0$, mentre $\widetilde{G}_{n_0}(\rho) < 0$ su A, ne segue che ogni n, dunque ϕ è ammissibile e che $\mathrm{P}(V_N(\phi) > 0) = \mathrm{P}(\widetilde{G}_{n_0}(\rho^1, \dots, \rho^d) < 0) > 0$. Poiché $V_0(\phi) = 0$, ϕ è una strategia di arbitraggio.

□

Useremo nella dimostrazione del prossimo teorema il classico *teorema di separazione dei convessi*, nella forma seguente:

Teorema 5.4.4. *Siano $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme compatto e convesso e $\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^m$ un sottospazio tali che $K \cap \mathscr{V} = \emptyset$. Allora, esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che*

$$\begin{array}{ll} \textit{per ogni } x \in K & \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell\, x_\ell > 0 \\ \textit{per ogni } x \in \mathscr{V} & \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell\, x_\ell = 0. \end{array}$$

In altre parole, il sottospazio $\mathscr{V}$ è contenuto in un iperpiano chiuso che non contiene K.

Per la dimostrazione e maggiori dettagli sul significato intuitivo di questo risultato, si rimanda all'Appendice a questo capitolo (cfr. Paragrafo 5.9.1)

Vediamo ora il risultato principale di questo paragrafo. Esso prende il nome di *primo teorema fondamentale dell'asset pricing.*

Teorema 5.4.5. *Un mercato è privo di arbitraggio se e solo se esiste una misura di probabilità* P^* *equivalente a* P *tale che il vettore dei prezzi scontati dei titoli rischiosi è una* P^**-martingala.*

Ricordiamo che due misure di probabilità P e P^* su $(\Omega, \mathscr{F})$ sono *equivalenti* se hanno gli stessi insiemi di misura nulla cioè se $\mathrm{P}(A) = 0$ se e solo se $\mathrm{P}^*(A) = 0$, per $A \in \mathscr{F}$. Ora, poiché supponiamo Ω finito, $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$ e abbiamo supposto $\mathrm{P}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$, in questo caso ovviamente P^* è equivalente a P se e solo se $\mathrm{P}^*(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$.

Inoltre, sempre perché Ω è finito, possiamo identificare ogni v.a. X su Ω con il vettore $(X(\omega)_{\omega\in\Omega}$. Indicheremo con $\mathbb{R}^\Omega$ l'insieme di questi vettori.

Dimostrazione Prima parte: supponiamo che esista una misura di probablità P^* equivalente a P, tale che il vettore dei prezzi scontati dei titoli rischiosi $((\widetilde{S}_n^1, \dots, \widetilde{S}_n^d))_n = ((\beta_n\, S_n^1, \dots, \beta_n\, S_n^d))_n$ sia una martingala e mostriamo che in tal caso il mercato è privo di arbitraggio.

Sia $\phi = (\phi_n)_n$ una strategia ammissibile (ovvero, autofinanziante e tale che $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni n). Allora, dalla Proposizione 5.3.5 segue che

$$\widetilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \Delta \widetilde{S}_j \rangle.$$

Poiché ϕ_n è predicibile e $(\widetilde{S}_n^i)_n$ è una P^*-martingala per ogni $i = 1, \dots, d$, $(\widetilde{V}_n(\phi))_n$ è una P^*-martingala (vedi l'Osservazione 5.3.7), dunque, in particolare,

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = \mathrm{E}^*(V_0(\phi)),$$

dove con E^* indichiamo l'aspettazione rispetto alla misura P^*. Se supponiamo $V_0(\phi) = 0$, si ha

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0.$$

Poiché per ipotesi ϕ è ammissibile, in particolare si ha $V_N(\phi) \geq 0$. Dunque, otteniamo $V_N(\phi) \geq 0$ e $\mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = 0$: ciò significa che necessariamente $\mathrm{P}^*(\widetilde{V}_N(\phi) > 0) = 0$. Poiché P è equivalente a P^*, si ha anche $\mathrm{P}(\widetilde{V}_N(\phi) > 0) = 0$ ed otteniamo che ogni strategia ammissibile di valore iniziale nullo è necessariamente tale che $\mathrm{P}(\widetilde{V}_N(\phi) > 0) = 0$, dunque non esistono strategie di arbitraggio.

Seconda parte: supponiamo che il mercato sia privo di arbitraggio e dimostriamo l'esistenza di una misura di probabilità P^* sotto la quale i prezzi scontati sono una martingala.

A tale scopo, utilizziamo la Proposizione 4.6.2: mostriamo che esiste una misura P^* equivalente a P tale che per ogni processo predicibile $(\rho^i_n)_n$ si ha che $\mathrm{E}^*(\sum_{n=1}^N \rho^i_n \, \Delta\widetilde{S}^i_n) = 0$, per ogni $i = 1, \dots, d$ È immediato vedere che ciò equivale a dimostrare che

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{G}_N(\rho)) = 0, \text{ essendo } \widetilde{G}_N(\rho) = \sum_{n=1}^N \left(\rho^1_n \, \Delta\widetilde{S}^i_n + \cdots + \rho^d_n \, \Delta\widetilde{S}^d_n\right) \qquad (5.4)$$

per ogni processo predicibile $((\rho^1_n, \dots, \rho^d_n))_n$ a valori in $\mathbb{R}^d$. Il Lemma 5.4.3 garantisce che $\widetilde{G}_N(\rho) \notin \Gamma$. Ora l'insieme

$$\mathscr{V} = \{\widetilde{G}_N(\rho)\,;\, ((\rho^1_n, \dots, \rho^d_n))_n \text{ processo predicibile}\},$$

è un sottospaziodi $\mathbb{R}^\Omega$ (cioè dell'insieme delle v.a. su Ω) e, per il Lemma 5.4.3, $\mathscr{V} \cap \Gamma = \{\phi\}$. Dunque, a maggior ragione, se poniamo

$$K = \big\{X \in \Gamma; \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = 1\big\},$$

si ha

$$\mathscr{V} \cap K = \emptyset.$$

È immediato verificare che $K \subset \mathbb{R}^\Omega$ è convesso e compatto, (è chiuso e limitato). Possiamo dunque applicare il Teorema 5.4.4: esiste $\lambda \in \mathbb{R}^\Omega$ tale che

(a) se $X \in K$ allora $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\, X(\omega) > 0$;

(b) se ρ è un processo predicibile allora $\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega)\, \widetilde{G}_N(\rho)(\omega) = 0$.

Da (a) otteniamo che $\lambda(\omega) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$. Infatti, il vettore X definito $\bar{X}(\bar{\omega}) = 1$ e $\bar{X}(\omega) = 0$ per $\omega \neq \bar{\omega}$ appartiene a K e la condizione (a) implica subito che deve essere $\lambda(\omega) > 0$. Definiamo allora la seguente misura di probabilità P^* su Ω:

$$\mathrm{P}^*(\{\omega\}) = c_\lambda^{-1} \cdot \lambda(\omega), \ \text{dove} \ c_\lambda = \sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega').$$

Per ipotesi $P^*(\{\omega\}) > 0$ per ogni ω, dunque P^* è equivalente a P. Inoltre, usando (b), otteniamo

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{G}_N(\rho)) = \sum_{\omega\in\Omega} \widetilde{G}_N(\rho)(\omega)\,\mathrm{P}^*(\{\omega\}) = c_\lambda^{-1} \sum_{\omega\in\Omega} \widetilde{G}_N(\rho)(\omega)\,\lambda(\omega) = 0.$$

Riassumendo: abbiamo determinato una misura di probabilità P^* equivalente a P tale che (5.4) è vera; poiché abbiamo visto che (5.4) garantisce che $((\widetilde{S}^1_n, \dots, \widetilde{S}^d_n))_n$ è una P^*-martingala, la tesi è dimostrata.

□

Dunque, l'assenza di arbitraggio equivale all'esistenza di una misura P^* equivalente a P sotto la quale i prezzi scontati sono P^*-martingale. Le misure P^* che verificano tali proprietà sono dette *misure equivalenti di martingala*.

Osservazione 5.4.6. È utile osservare che, in assenza di arbitraggio, ogni strategia autofinanziante di valore finale ≥ 0 è necessariamente ammissibile. Infatti, se $V_N(\phi) \geq 0$, allora anche $\widetilde{V}_N(\phi) \geq 0$ e poiché il valore scontato $(\widetilde{V}_n(\phi))_n$ del portafoglio associato ad una strategia autofinanziante ϕ è una P^*-martingala, si ha

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi) \,|\, \mathscr{F}_n) \geq 0$$

poiché la speranza condizionata di una v.a. ≥ 0 è sempre ≥ 0. Dunque $\widetilde{V}_n(\phi) \geq 0$ e $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni n.

Esempio 5.4.7. La parità call-put. Vediamo ora che in assenza di arbitraggio, tra il prezzo dell'opzione put e quello della call (per uno stesso strike e per una stessa maturità) vale una relazione fissa, che permette di dedurre l'uno dall'altro.

Indichiamo con C_n e P_n rispettivamente il prezzo di una call e di una put, scritte sul bene sottostante di valore S^1_n, aventi stessa maturità N e uguale prezzo di esercizio K. Mostreremo che vale la relazione

$$C_n - P_n = S_n - K\,(1+r)^{N-n}. \tag{5.5}$$

Mostreremo infatti che se la (5.5) fosse falsa, cioè se si avesse

$$C_n - P_n > S_n - K\,(1+r)^{-(N-n)} \quad \text{oppure} \quad C_n - P_n < S_n - K\,(1+r)^{-(N-n)},$$

allora ci sarebbe arbitraggio.

Cominciamo col supporre $C_n - P_n > S_n - K\,(1+r)^{N-n}$. Potremmo allora, all'istante n, vendere una call e comprare una quota di bene sottostante ed una put. Al netto, il bilancio dell'operazione è

$$C_n - P_n - S_n.$$

Se questa quantà è positiva la investiamo nel titolo senza rischio. Se è negativa ciò significa che abbiamo preso in prestito la quantità corrispondente. In entrambi i casi questo capitale all'istante T vale

$$(C_n - P_n - S_n)\,(1+r)^{N-n}.$$

Ora, all'istante N,

• se $S_N > K$: la call è esercitata, dunque cediamo l'unità di sottostante che possediamo e riceviamo un compenso pari a K (la put non ha valore, dato che il prezzo di esercizio è inferiore a quello di mercato). Dunque il bilancio finale dell'operazione è

$$K+(C_n-P_n-S_n)\,(1+r)^{N-n} = (1+r)^{N-n}\big(C_n-P_n-S_n+K\,(1+r)^{-(N-n)}\big) > 0;$$

• se $S_T \leq K$: esercitiamo la put, cedendo l'unità di sottostante al prezzo K (la call non ha valore). Ci ritroviamo quindi con un capitale uguale ancora a

$$K+(C_n-P_n-S_n)\,(1+r)^{N-n} = (1+r)^{N-n}\big(C_n-P_n-S_n+K\,(1+r)^{-(N-n)}\big) > 0.$$

Dunque, in ogni caso, all'istante N si ha un profitto sicuro. Queste strategie sono autofinanzianti e di valore iniziale nullo. Se non ci fosse arbitraggio, sarebbero anche ammissibili per l'Osservazione 5.4.6. Avremmo dunque costruito una strategia di arbitraggio. Dunque, supponendo l'assenza di arbitraggio, non può essere $C_n-P_n > S_n-K\,(1+r)^{-(N-n)}$. In maniera simile si mostra che l'assenza di arbitraggio implica che non può essere $C_n - P_n < S_n - K\,(1+r)^{-(N-n)}$.

La formula (5.5) si chiama la parità call/put.

Un altro modo, più formale, di verificare la formula della parità call/put consiste nell'osservare che un portafoglio corto di una put e di una unità di sottostante e lungo di una call, vale a maturità

$$(S_N - K)_+ - (K - S_N)_+ - S_N.$$

Poiché $(S_N - K)_+ - (K - S_N)_+ = (S_N - K)_+ - (S_N - K)_- = S_N - K$, il valore di questo portafoglio a maturità vale esattamente $-K$. Dunque il suo valore scontato è $-K(1 + r)^{-N}$. Poiché il portafoglio scontato è una martingala rispetto a P^*, esso deve avere lo stesso valore anche al tempo n. Dunque il valore di questo portafoglio non scontato al tempo n deve essere $-K(1+r)^{n-N}$. Ne segue che tra i prezzi del titolo di base e delle opzioni call e put (con la stessa maturità e prezzo di esercizio) deve valere la relazione $C_n - P_n - S_n = -K(1 + r)^{n-N}$

Esempio 5.4.8. Il modello binomiale a un periodo. Consideriamo il modello più semplice. Supponiamo $d = 1$ (cioè un solo attivo) e che vi sia un solo periodo temporale, durante il quale il prezzo dell'attivo possa crescere di

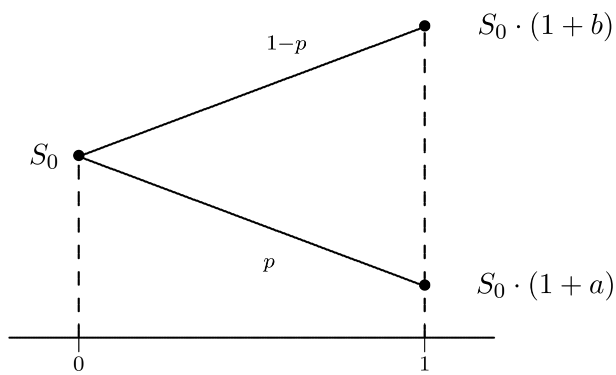


Figura 5.0 Il modello binomiale ad un periodo.

un fattore $1 + a$ oppure $1 + b$, $-1 < a < b$. Si tratta di un modello senza arbitraggio?

Possiamo considerare che lo spazio di probabilità contenga i due elementi $1 + b$ e $1 + a$. Ogni probabilità su Ω è assegnata non appena venga fissata la probabilità, diciamo p di $1 + a$, La probabilità di $1 + b$ sarà allora $1 - p$. Esiste un valore di p^* di p rispetto al quale il prezzo scontato dell'attivo di base sia una martingala? Dovrà risultare

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{S}_1 \,|\, \mathscr{F}_0) = S_0 \tag{5.6}$$

Poiché $\mathscr{F}_0$ è la σ-algebra banale, fare la speranza condizionale è lo stesso che fare la speranza matematica. Si ha

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{S}_i) = \frac{1}{1+r}\big(p^* S_0(1+a) + (1-p^*)S_0(1+b)\big).$$

Dunque perché (5.6) sia soddisfatta, deve essere

$$p^*(1+a) + (1-p^*)(1+b) = 1+r$$

ovvero

$$p^* = \frac{b-r}{b-a}.$$

Questo valore di p^* risulta > 0 se $b > r$ e < 1 se $a < r$. Dunque $0 < p^* < 1$ se e solo se $a < r < b$. Se questa condizione è soddisfatta, dunque, il modello è senza arbitraggio, grazie al Teorema 5.4.5.

5.5 Mercati completi e prezzo delle opzioni europee

Abbiamo già parlato di opzioni call e put europee. Ad esempio, una call europea sul bene sottostante di prezzo S^1 dà il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare il bene alla data N (maturità) ad un prezzo (di esercizio) K fissato oggi ($n = 0$). Il valore della call è dato da $(S^1_N - K)_+$. Il valore di una put con uguale maturità e prezzo di esercizio, è invece $(K - S_N)_+$. Esistono opzioni più generali che le call e le put. Per citarne solo alcune, un'opzione digital europea è un'opzione di valore

$$1_{\{S^1_N \geq K\}},$$

con N la maturità e K lo strike: il valore a maturità è 1 se si osserva $S^1_N \geq K$ e nullo in caso contrario.

Un'opzione call sulla media aritmetica dei titoli di prezzo $S^1, \ldots, S^d$ ha valore

$$(\bar{S}_N - K)_+, \quad \text{essendo } \bar{S}_N = \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d} S^i_N.$$

In questi esempi, il valore a maturità dipende solo da $(S^1_N, \ldots, S^d_N)$, cioè dal valore dei prezzi a maturità. Esistono anche opzioni più complicate, il cui valore è funzione di tutta l'evoluzione (traiettoria) del processo dei prezzi fino a maturità, cioè di $((S^1_n, \ldots, S^d_n))_{n \leq N}$. Questo tipo di opzioni è detto *path dependent*, cioè dipendente dalla traiettoria. Un esempio tipico sono le opzioni asiatiche: un'opzione asiatica call con maturità N e prezzo di esercizio K sul sottostante di prezzo S^1 ha valore

$$\Big(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S^1_j - K\Big)_+.$$

Dunque, si tratta di un'opzione call sulla media temporale del prezzo del sottostante $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} S^1_j$. Un altro tipo di opzioni path dependent è dato dalle opzioni con barriere. Ad esempio, una opzione call up-and-in sul primo bene ha valore

$$(S^1_N - K)_+ \, 1_{\{\text{esiste } n \leq N \text{ tale che } S_n \geq U\}}.$$

Qui, oltre alla maturità N e al prezzo di esercizio K, occorre specificare la quantità U: essa è contrattualmente specificata (quindi, deterministica) e rappresenta una barriera superiore. Una call up-and-in è quindi una normale call purché però esista $n \leq N$ tale che $S_n \geq U$, cioè purché il processo S^1 tocchi la barriera U entro l'istante di maturità N. In caso contrario, l'opzione ha valore nullo. Dunque, "up" significa che si lavora con una barriera superiore e "in" significa che l'opzione si attiva se e solo se la barriera viene toccata entro la maturità. Le altre opzioni con barriera sono quindi up-and-out, down-and-in, down-and-out, e per ciascuna si può proporre sia una call che una put, ma anche un'opzione diversa (una digital, un'asiatica etc.). Le cose si possono anche complicare con la doppia barriera, introducendo cioè due barriere U (superiore) e L (inferiore).

Più in generale, possiamo dare la seguente

Definizione 5.5.1. Un'*opzione europea* di maturità N è una v.a. h non negativa e $\mathscr{F}_N$-misurabile.

Nella Definizione 5.5.1 identifichiamo dunque un'opzione con il suo payoff. A titolo di esempio, scriviamo il payoff h delle opzioni sopra riportate:

$$\begin{aligned}
\text{call:} &\quad h = (S_N^1 - K)_+;\\
\text{put:} &\quad h = (K - S_N^1)_+;\\
\text{digital:} &\quad h = 1_{S_N^1 \geq K};\\
\text{call su media aritmetica:} &\quad h = \big(\tfrac{1}{d}\textstyle\sum_{i=1}^d S_N^i - K\big)_+;\\
\text{call asiatica:} &\quad h = \big(\tfrac{1}{N}\textstyle\sum_{j=1}^N S_j^1 - K\big)_+;\\
\text{call up-and-in:} &\quad h = (S_N^1 - K)_+ \, 1_{\{\text{esiste } n \leq N \text{ tale che } S_n \geq U\}};\\
\text{put up-and-out:} &\quad h = (K - S_N^1)_+ \, 1_{\{\text{per ogni } n \leq N,\ S_n < U\}}.
\end{aligned}$$

In ogni caso, h è una v.a. non negativa e $\mathscr{F}_N$-misurabile, perché è funzione dei prezzi fino a maturità N e quest'ultimi sono $\mathscr{F}_N$-misurabili.

L'obiettivo ora è quello di trovare il giusto prezzo delle opzioni. A tale scopo, di fondamentale importanza è la seguente

Definizione 5.5.2. Un'opzione europea h si dice *replicabile* se esiste una strategia ammissibile ϕ tale che $V_N(\phi) = h$, cioè il cui valore finale del portafoglio è pari al payoff dell'opzione.

Osservazione 5.5.3. Se il mercato è privo di arbitraggio, perché un'opzione europea sia replicabile basta richiedere $V_N(\phi) = h$ per qualche strategia autofinanziante ϕ. In sostanza, in assenza di arbitraggio se $V_N(\phi) = h$ per una strategia autofinanziante ϕ allora ϕ è ammissibile. Infatti, ripetendo le argomentazioni dell'Osservazione 5.4.6, in assenza di arbitraggio $((\widetilde{V}_n(\phi))_n$ è una P^*-martingala, per ogni misura equivalente di martingala P^* e per ogni strategia autofinanziante ϕ. Quindi, se $V_N(\phi) = h \geq 0$ allora

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)\,|\,\mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*((1+r)^{-N}\,h\,|\,\mathscr{F}_n) \geq 0$$

perché $(1+r)^{-N}\,h \geq 0$. Quindi anche $\widetilde{V}_n(\phi) \geq 0$ e $V_n(\phi) \geq 0$ per ogni n e dunque ϕ è anche ammissibile.

Definizione 5.5.4. Un mercato si dice *completo* se ogni opzione è replicabile.

L'ipotesi di completezza del mercato è piuttosto restrittiva ed inoltre, a differenza della nozione di arbitraggio, non ha un chiaro significato finanziario. Tuttavia, studieremo nel prosieguo mercati completi, perché questa richiesta garantisce lo sviluppo di una teoria matematica piuttosto semplice che consente di studiare e calcolare il prezzo e la copertura delle opzioni (e questa è senz'altro una buona motivazione!).

Il teorema che segue, noto come il *secondo teorema fondamentale dell'asset pricing*, caratterizza il concetto di completezza del mercato quando ci si trovi in assenza di arbitraggio:

Teorema 5.5.5. *Un mercato privo di arbitraggio è completo se e solo se esiste un'unica misura di martingala equivalente* P^**, ovvero un'unica misura di probabilità* P^* *equivalente a* P *e tale che i prezzi scontati dei titoli rischiosi sono* P^**-martingale.*

Dimostrazione. Prima parte: assumiamo che il mercato sia privo di arbitraggio e completo e dimostriamo che esiste un'unica misura equivalente di martingala.

Il Teorema 5.4.5 garantisce l'esistenza di una misura di martingala equivalente. Supponiamo ne esistano due: P_1 e P_2. Indichiamo con E_i la media valutata sotto P_i, $i = 1, 2$. Il Corollario 5.4.6 garantisce che, per ogni strategia autofinanziante ϕ, il valore scontato del portafoglio $\widetilde{V}_n(\phi)$ è una P_i-martingala. In particolare, poiché la v.a. $V_0(\phi)$ è $\mathscr{F}_0$-misurabile e dunque costante,

$$\mathrm{E}_1(\widetilde{V}_N(\phi)) = V_0(\phi) = \mathrm{E}_2(\widetilde{V}_N(\phi)).$$

Poiché il mercato è anche completo, per ogni v.a. $h \geq 0$ esiste una strategia autofinanziante ϕ tale che $\widetilde{V}_N(\phi) = (1+r)^{-N}\, V_N(\phi) = (1+r)^{-N}\, h$. Dunque

$$\mathrm{E}_1((1+r)^{-N}\, h) = \mathrm{E}_2((1+r)^{-N}\, h)$$

per ogni v.a. h non negativa, che sia $\mathscr{F}_N$-misurabile. Ora, poiché per ipotesi $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$, possiamo scegliere $h = (1+r)^N 1_A$ per ogni $A \in \mathscr{F}$, ottenendo

$$\mathrm{P}_1(A) = \mathrm{P}_2(A) \quad \text{per ogni} \quad A \in \mathscr{F},$$

da cui segue che $\mathrm{P}_1 = \mathrm{P}_2$.

Seconda parte: supponiamo l'assenza di arbitraggio e, per assurdo, che il mercato non sia completo; dimostriamo che non esiste una sola misura di martingala equivalente P^*.

Se il mercato non è completo, esiste almeno un'opzione di payoff h che non è replicabile. Inoltre, poiché il mercato è privo di arbitraggio, esiste una misura di martingala equivalente P^*.

Al variare di $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ processo predicibile su $\mathbb{R}^d$ e di V_0 v.a. $\mathscr{F}_0$-misurabile, sia $\widetilde{\mathscr{U}}$ l'insieme delle v.a. della forma

$$\widetilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) = V_0 + \sum_{j=1}^{N} \Big(\phi_n^1\, \Delta\widetilde{S}_n^1 + \cdots + \phi_n^d\, \Delta\widetilde{S}_n^d\Big).$$

Per ogni $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ processo predicibile su $\mathbb{R}^d$ e per ogni V_0 v.a. $\mathscr{F}_0$-misurabile, la Proposizione 5.3.6 garantisce l'esistenza di un processo predicibile $(\phi_n^0)_n$ tale che $\phi = ((\phi^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$ è una strategia autofinanziante e $U_N(\phi^1,\dots,\phi^d,V_0) = 1/\beta_n\,\widetilde{U}_N(\phi^1,\dots,\phi^d,V_0) = V_N(\phi)$. Abbiamo quindi le seguenti conseguenze.

- $h \notin \widetilde{\mathscr{U}}$ e quindi $\widetilde{\mathscr{U}}$ è un sottoinsieme stretto dell'insieme $\mathbb{R}^\Omega$ delle v.a. su $(\Omega,\mathscr{F})$. Infatti, per ipotesi h non è replicabile: non esiste alcuna strategia autofinanziante ϕ tale che $V_N(\phi) = h$ (si veda anche l'Osservazione 5.5.3). Poiché abbiamo visto che $V_N(\phi) = U_N(\phi^1,\dots,\phi^d,V_0)$, segue che h non è della forma $U_N(\phi^1,\dots,\phi^d,V_0)$, cioè $h \notin \widetilde{\mathscr{U}}$.
- Poiché $(\widetilde{V}_n(\phi))_n$ è una P^*-martingala (Osservazione 5.4.6), $\mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)) = \mathrm{E}^*(V_0)$, quindi possiamo dire

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{U}) = \mathrm{E}^*(V_0) \text{ per ogni } \widetilde{U} = \widetilde{U}_N(\phi^1,\dots,\phi^d,V_0) \in \widetilde{\mathscr{U}}. \tag{5.7}$$

Ora, definiamo su $\mathbb{R}^\Omega$ il seguente prodotto scalare[2]

$$\mathbb{R}^\Omega \times \mathbb{R}^\Omega \ni (X,Y) \mapsto \mathrm{E}^*(X\,Y),$$

dove E^* denota, al solito, l'aspettazione sotto P^*. Allora, essendo $\widetilde{\mathscr{U}}$ un sottoinsieme stretto di $\mathbb{R}^\Omega$, esiste un elemento $\bar{X} \in \Omega$ non nullo ortogonale a $\widetilde{\mathscr{U}}$:

$$\mathrm{E}^*(\bar{X}\,\widetilde{U}) = 0 \text{ per ogni } \widetilde{U} \in \widetilde{\mathscr{U}}. \tag{5.8}$$

Poiché in particolare $\widetilde{U} = 1 \in \widetilde{\mathscr{U}}$ (basta prendere $\phi_n^i = 0$ per ogni $i = 1,\dots,d$ e $n = 0,1,\dots,N$ e $V_0 = 1$), da (5.8) si ha

$$\mathrm{E}^*(\bar{X}) = 0. \tag{5.9}$$

Ora, definiamo

$$\mathrm{P}^{**}(\{\omega\}) = \Big(1 + \frac{\bar{X}(\omega)}{2\|\bar{X}\|_\infty}\Big)\,\mathrm{P}^*(\{\omega\}), \quad \omega \in \Omega,$$

dove si è posto $\|\bar{X}\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |\bar{X}(\omega)|$, e osserviamo che:

1. P^{**} è una misura di probabilità: $\mathrm{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ per ogni ω (perché $\mathrm{P}^*(\{\omega\}) > 0$ e $1 + \bar{X}(\omega)/(2\|\bar{X}\|_\infty) > 0$) e, ricordando la (5.9),

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}^{**}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathrm{P}^*(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \sum_{\omega\in\Omega} \bar{X}(\omega)\,\mathrm{P}^*(\{\omega\}) \\ &= 1 + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \mathrm{E}^*(\bar{X}) = 1;\end{aligned}$$

2. P^{**} è equivalente a P^*: abbiamo visto in 1. che $\mathrm{P}^{**}(\{\omega\}) > 0$ per ogni $\omega \in \Omega$;

[2]La verifica che si tratta effettivamente di un prodotto scalare è immediata.

3. P^{**} è diversa da P^*, perché $\bar{X}$ è non nulla;

4. posto E^{**} la media sotto P^{**}, per ogni $\widetilde{U} \in \widetilde{\mathscr{U}}$ si ha

$$\mathrm{E}^{**}(\widetilde{U}) = \mathrm{E}^*(V_0) \text{ per ogni } \widetilde{U} = \widetilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) \in \widetilde{\mathscr{U}}.$$

Infatti, tenendo presente (5.7) e (5.8),

$$\mathrm{E}^{**}(\widetilde{U}) = \sum_{\omega \in \Omega} \widetilde{U}(\omega)\, \mathrm{P}^{**}(\{\omega\})$$
$$= \sum_{\omega \in \Omega} \widetilde{U}(\omega)\, \mathrm{P}^{*}(\{\omega\}) + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \sum_{\omega \in \Omega} \widetilde{U}(\omega)\, \bar{X}(\omega)\, \mathrm{P}^{*}(\{\omega\})$$
$$= \mathrm{E}^*(\widetilde{U}) + \frac{1}{2\|\bar{X}\|_\infty} \mathrm{E}^*(\widetilde{U}\, \bar{X}) = \mathrm{E}^*(V_0).$$

Riassumendo: abbiamo determinato una misura di probabilità P^{**} diversa da P^* ma equivalente a P^* tale che (si prenda nel punto 4. $\widetilde{U} = \widetilde{U}_N(\phi^1, \dots, \phi^d, V_0) \in \widetilde{\mathscr{U}}$ con $V_0 = 0$)

$$\mathrm{E}^{**}\Big(\sum_{j=1}^{N} \Big(\phi_n^1\, \Delta \widetilde{S}_n^1 + \cdots + \phi_n^d\, \Delta \widetilde{S}_n^d \Big) \Big) = 0$$

per ogni processo predicibile $((\phi_n^1, \dots, \phi_n^d))_n$. La Proposizione 4.6.2 assicura che $(\widetilde{S}_n^1, \dots, \widetilde{S}_n^d\Big)$ è una P^{**}-martingala. Ciò prova che esistono due diverse misure di martingala equivalenti, e la dimostrazione è completata.

□

Supponiamo che il nostro modello di mercato sia privo di arbitraggio e completo, dunque esiste un'unica misura di martingala equivalente P^*. Sia h un'opzione, con maturità N, cioè una v.a. non negativa e $\mathscr{F}_N$-misurabile. Allora esiste una strategia autofinanziante (ammissibile) che replica l'opzione, cioè tale che h è il valore finale del portafoglio associato a ϕ:

$$V_N(\phi) = h.$$

Inoltre, il valore scontato $\widetilde{V}_n(\phi)$ di $V_N(\phi)$ è una P^*-martingala. Di conseguenza,

$$V_0(\phi) = \mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi)),$$

cioè $V_0(\phi) = \mathrm{E}^*(h/S_N^0)$ e più in generale $\widetilde{V}_n(\phi) = \mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N(\phi) \,|\, \mathscr{F}_n)$, che si può riscrivere, per $n = 0, 1, \dots, N$,

$$V_n(\phi) = \mathrm{E}^*\Big(h\, \frac{S_n^0}{S_N^0} \,|\, \mathscr{F}_n \Big) = \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(N-n)}\, h \,|\, \mathscr{F}_n \big]. \tag{5.10}$$

La strategia ϕ prende il nome di *strategia replicante l'opzione* ed il portafoglio $V_n(\phi)$ ad essa associata è detto *portafoglio replicante*.

La (5.10) dice che il valore del portafoglio replicante è univocamente determinato, in ogni istante, dalla maturità N e dal payoff h. È dunque naturale chiamare la quantità $V_n(\phi)$ definita in (5.10) il *prezzo dell'opzione*, cioè il capitale necessario al tempo n per replicare h a maturità N.

Se il prezzo dell'opzione al tempo n non fosse pari a $V_n(\phi)$, anzi, ciò creerebbe una possibilità di arbitraggio. Se ad esempio fosse $C_n > V_n(\phi)$, un investitore potrebbe vendere (allo scoperto) una opzione e servirsi del capitale ottenuto per costituire il portafoglio replicante e investire nel titolo senza rischio il residuo $C_n - V_n(\phi)$. Al tempo N il portafoglio replicante avrebbe esattamente il valore h dell'opzione e il risultato dell'operazione sarebbe $(C_n - V_n(\phi))(1+r)^{N-n}$, che è una quantità > 0 con probabilità strettamente positiva. Dunque, se al tempo 0 il venditore dell'opzione vende l'opzione stessa al prezzo

$$\mathrm{E}^*\Big(\frac{h}{S_N^0}\Big) = \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-N}\, h\big]$$

e segue la strategia ϕ allora al tempo N è in grado di generare una quantità di denaro pari ad h, ossia al valore dell'opzione. In altre parole, seguendo questa strategia il venditore è in grado di coprire esattamente l'opzione.

Abbiamo trovato una formula per il prezzo dell'opzione, ma sarebbe interessante anche determinare la strategia di copertura. Sappiamo per ora solo che essa esiste. Nel prossimo paragrafo introdurremo un modello concreto, che risulterà essere senza arbitraggio e completo, in cui sarà anche possibile calcolare esplicitamente la copertura delle opzioni call e put.

Infine, osserviamo che il calcolo del prezzo di un'opzione coinvolge esclusivamente la misura di martingala equivalente P^*, e non quella originaria P. Avremmo quindi potuto sviluppare la teoria esclusivamente considerando uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{F})$ su cui sia definita una filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$. In altre parole, si può non citare mai la misura P, che poi rappresenta la vera probabilità sul mercato finanziario.

Concludiamo il paragrafo ritrovando, a partire dalla formula del prezzo, la formula di parità call/put: se C_n e P_n sono rispettivamente il prezzo di una call e di una put con maturità N e prezzo di esercizio K, allora, in un mercato privo di arbitraggio e completo, si ha

$$\begin{aligned} C_n &= \mathrm{E}^*((1+r)^{-(N-n)}(S_N^1 - K)_+ \,|\, \mathscr{F}_n) \quad \text{e} \\ P_n &= \mathrm{E}^*((1+r)^{-(N-n)}(K - S_N^1)_+ \,|\, \mathscr{F}_n), \end{aligned}$$

dove P^* denota l'unica misura equivalente di martingala. Allora,

$$\begin{aligned}C_n - P_n &= (1+r)^{-(N-n)}\,\mathrm{E}^*\big[(S_N^1 - K)_+ - (K - S_N^1)_+ \,|\, \mathscr{F}_n\big] =\\ &= (1+r)^{-(N-n)}\,\mathrm{E}^*(S_N^1 - K \,|\, \mathscr{F}_n) =\\ &= (1+r)^{-(N-n)}\big((1+r)^N\,\mathrm{E}^*(\widetilde{S}_N \,|\, \mathscr{F}_n) - K\big) =\\ &= (1+r)^{-(N-n)}\big((1+r)^N\,\widetilde{S}_n^1 - K\big) = S_n^1 - K\,(1+r)^{-(N-n)}.\end{aligned}$$

Cioè la formula di parità:

$$C_n - P_n = S_n^1 - K\,(1+r)^{-(N-n)}. \tag{5.11}$$

Esempio 5.5.6. Riprendiamo il modello a un periodo dell'Esempio 5.4.8. Si tratta di un mercato completo? La risposta è immediata, alla luce del Teorema 5.5.5. Infatti dai calcoli dell'Esempio 5.4.8 risulta che il numero p^* che definisce la probabilità di rischio neutro è unico. Possiamo però anche verificare direttamente che ogni opzione è replicabile. Dato che lo spazio di probabilità è costituito unicamente da due elementi, una opzione h è individuata da due numeri h_+ e h_- corrispondenti al payoff nel caso che il prezzo risulti moltiplicato per $1+b$ oppure $1+a$ rispettivamente. Vogliamo dunque costituire un portafoglio al tempo 0, che abbia al tempo 1 un valore uguale al payoff dell'opzione. Se ϕ_0 e ϕ_1 indicano rispettivamente le quantità di titolo senza rischio, il portafoglio corrispondente al tempo uno varrà

$$(1+r)\phi_0 + \phi_1 S_1.$$

Perche' l'opzione h sia replicata, occorrerà dunque che

$$\begin{aligned}(1+r)\phi_0 + \phi_1 S_0(1+b) &= h_+\\ (1+r)\phi_0 + \phi_1 S_0(1+a) &= h_+.\end{aligned}$$

Si tratta di un sistema lineare molto semplice nelle incognite π_0, ϕ_1, che dà come risultato

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{h_+ - h_-}{S_0(b-a)}\\ \phi_0 &= -\frac{h_+(1+b) - h_-(1+a)}{(1+r)(b-a)}.\end{aligned}$$

Esempio 5.5.7. Consideriamo invece un modello ad un periodo, ma ammettendo che il prezzo del titolo di base possa variare in tre modi possibili, come nella Figura 5.1. Supporremo che sia $a < e < b$. Si tratta di un modello senza arbitraggio? È un mercato completo? Qui lo spazio di probabilità è composto da tre elementi. Perché non ci sia arbitraggio occorre che i numeri p e q siano > 0, tali che $p + q < 1$ ed inoltre che

$$p(1+a) + (1-p-q)(1+e) + q(1+b) = 1+r. \tag{5.12}$$

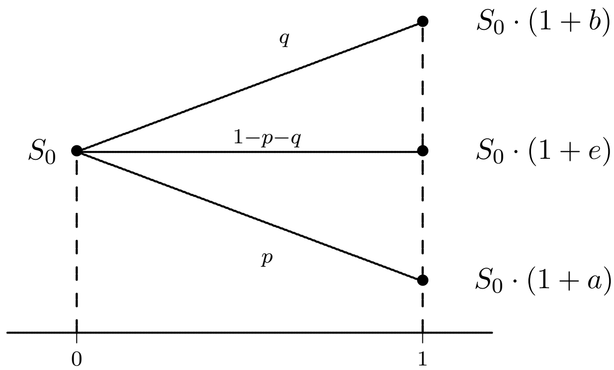


Figura 5.1 Il modello trinomiale.

Facendo tendere p a 1 (e corrispondentemente q a 0) e poi viceversa p a 0 e q ad 1, si vede che il termine di sinistra nella relazione precedente può assumere tutti i valori compresi tra $1+a$ e $1+b$. Dunque esistono dei valori di p e q per cui la (5.12) è soddisfatta, a condizione che sia $a < r < b$. Dunque il modello trinomiale è senza arbitraggio.

Si vede però anche che, se la condizione $a < r < b$ è soddisfatta, la soluzione non è unica. Dunque questo modello *non* è un mercato completo.

5.6 Il modello di Cox, Ross e Rubinstein

In questo paragrafo studieremo il modello di Cox, Ross e Rubinstein, nel seguito scriveremo brevemente modello CRR, versione discreta del ben più famoso modello di Black e Scholes.

In questo modello, si suppone $d = 1$. Sul mercato sono quindi presenti due titoli: il titolo non rischioso, di prezzo $S_n^0 = (1+r)^n$, e quello rischioso, di prezzo S_n. Si suppone che S_n si evolva nel modo seguente: tra due istanti consecutivi, n e $n+1$, la variazione percentuale del prezzo assume due soli possibili valori, a e b, con $-1 < a < b$. In formule,

$$\frac{\Delta S_{n+1}}{S_n} \text{ a valori in } \{a, b\}, \quad \text{o equivalentemente}$$
$$S_{n+1} \text{ a valori in } \{S_n(1+a), S_n(1+b)\}.$$

Il valore iniziale S_0 è dato (dunque, deterministico). Se poniamo $T_0 = S_0$ e per $n \geq 1$, $T_n = S_n/S_{n-1}$, allora

$$T_n \text{ a valori in } \{(1+a), (1+b)\} \text{ ed inoltre } S_n = S_0\, T_1 \cdots T_n.$$

Un modo di prendere l'insieme di tutti i possibili stati è allora quello di porre

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N.$$

Ovviamente, per $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$, si ha

$$T_n(\omega) = \omega_n \quad \text{e} \quad S_n(\omega) = S_0\, T_1(\omega) \cdots T_n(\omega) = S_0\, \omega_1 \cdots \omega_n.$$

Prendiamo $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$, cosicché le funzioni fin qui definite sono variabili aleatorie. Costruiamo ora la filtrazione. Poniamo $\mathscr{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ e per $n \geq 1$ definiamo[4]

$$\mathscr{F}_n = \sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(T_1, \ldots, T_n).$$

Osserviamo che si ha[5] $\mathscr{F}_N = \mathscr{F}$.

Riassumendo, abbiamo costruito uno spazio misurabile $(\Omega, \mathscr{F})$, una filtrazione $(\mathscr{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ e due processi $(T_n)_{0 \leq n \leq N}$ e $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ adattati alla filtrazione. Sottolineiamo che non supponiamo che le v.a. T_i siano indipendenti, né che siano equidistribuite.

Ora occorrerebbe definire una misura di probabilità P su $(\Omega, \mathscr{F})$. Come abbiamo già osservato alla fine del paragrafo precedente, allo scopo di prezzare opzioni sul sottostante S non interessa quale sia la misura di probabilità P. Piuttosto, è importante conoscere la misura di martingala equivalente P^*, una volta che avremo dimostrato che non c'è arbitraggio e che il mercato è completo. Quindi, per il momento non specifichiamo chi sia P. Diciamo solo che $\mathrm{P} \in \mathscr{Q}$, dove

$$\mathscr{Q} = \{\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \text{ è una probabilità su } (\Omega, \mathscr{F}) \text{ e } \mathbb{Q}(\{\omega\}) > 0 \text{ per ogni } \omega \in \Omega\}.$$

Presa $\mathrm{P} \in \mathscr{Q}$, ovviamente è possibile calcolare la distribuzione congiunta di $(T_1, \ldots, T_N)$ e di $(S_1, \ldots, S_N)$. Infatti,

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(T_1 = t_1, \ldots, T_N = t_N) = \mathrm{P}(\{\omega\}), \\ &\text{con } \omega = (t_1, \ldots, t_N) \in \{1+a, 1+b\}^N, \end{aligned} \tag{5.13}$$

e

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(S_1 = s_1, \ldots, S_N = s_N) = \mathrm{P}\Big(T_1 = \tfrac{s_1}{S_0}, \ldots, T_N = \tfrac{s_N}{s_{N-1}}\Big) = \mathrm{P}(\{\omega\}) \\ &\text{con } \omega = (s_1/S_0, \ldots, s_N/s_{N-1}) \in \{1+a, 1+b\}^N. \end{aligned} \tag{5.14}$$

La figura 5.6.2 mostra l'insieme di tutte le possibili traiettorie di $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$, con $N = 3$. Si noti che esse formano un albero; un cammino percorribile sull'albero rappresenta ovviamente una possibile traiettoria.

[4]Osserviamo che effettivamente $\sigma(S_1, \ldots, S_n) = \sigma(T_1, \ldots, T_n)$. Infatti, poiché $(T_1, \ldots, T_n) = (S_1/S_0, \ldots, S_n/S_{n-1})$ è funzione misurabile di $(S_1, \ldots, S_n)$, si ha $\sigma(T_1, \ldots, T_n) \subset \sigma(S_1, \ldots, S_n)$. Analogamente, da $(S_1, \ldots, S_n) = (S_0T_1, S_0T_1T_2, \ldots, S_0T_1 \cdots T_n)$ segue che $\sigma(S_1, \ldots, S_n) \subset \sigma(T_1, \ldots, T_n)$.

[5]Infatti, $\mathscr{F}_N = \sigma(T_1, \ldots, T_n) = \sigma(\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}) = \mathscr{P}(\Omega) = \mathscr{F}$.

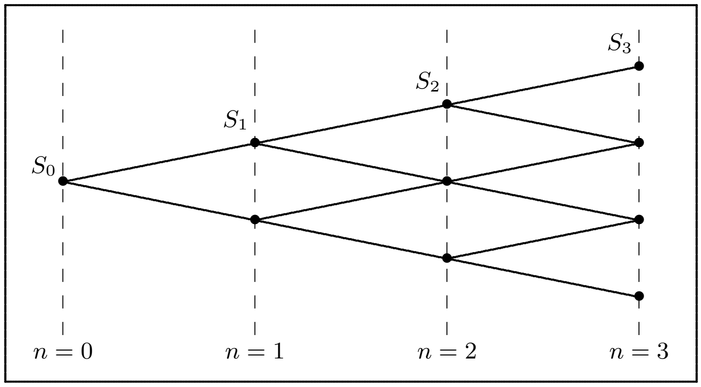


Figura 5.4 L'albero formato da tutti i possibili cammini di $(S_n)_{0 \le n \le 3}$.

5.6.1 Assenza di arbitraggio e completezza

Abbiamo già osservato che è di fondamentale importanza trovare quelle che abbiamo chiamato misure equivalenti di martingala. Nel lemma che segue, ne diamo una caratterizzazione.

Lemma 5.6.1. *Sia* $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$. *Il processo di prezzo scontato* $(\widetilde{S}_n)_n$ *è una* P^**-martingala se e solo se*

$$\mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = 1 + r, \quad \textit{per ogni } n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Dimostrazione. $(\widetilde{S}_n)_n = ((1+r)^{-n} S_n)_n$ è una P^*-martingala se e solo se

$$\mathrm{E}^*((1+r)^{-(n+1)} S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = (1+r)^{-n} S_n, \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \ldots, N-1,$$

cioè

$$\frac{1}{S_n} \mathrm{E}^*(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = 1 + r, \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Ora, poiché S_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, si ha

$$\frac{1}{S_n} \mathrm{E}^*(S_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*\Big(\frac{S_{n+1}}{S_n} \,|\, \mathscr{F}_n\Big) = \mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n),$$

da cui la tesi.

□

Vediamo ora quali sono le condizioni da imporre perché il mercato descritto da questo modello sia privo di arbitraggio.

Proposizione 5.6.2. *Perché il modello CRR sia privo di arbitraggio è necessario che a e b siano tali che*

$$a < r < b.$$

Dimostrazione. Supponiamo che il mercato sia privo di arbitraggio. Allora (cfr. Teorema 5.4.5) esiste una misura di probabilità P^* equivalente a P, cioè $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$, tale che il processo del prezzo scontato del titolo rischioso è una P^*-martingala. Quindi, per il Lemma 5.6.1, dev'essere $\mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = 1 + r$, da cui segue che

$$\mathrm{E}^*(T_{n+1}) = \mathrm{E}^*\big[\mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\big] = 1 + r.$$

Ora, $\mathrm{E}^*(T_{n+1}) = (1+a)\, p_a^* + (1+b)\, p_b^*$, dove $p_a^* = \mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1+a) = 1 - p_b^* = 1 - \mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1 + b)$. Osserviamo che poiché $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$, dev'essere $p_a^* > 0$ e $p_b^* > 0$. Ma $(1 + a)\, p_a^* + (1 + b)\, p_b^*$ è una combinazione lineare convessa di $1 + a$ e $1 + b$, dunque assume valori tra il minimo, $1 + a$, e il massimo, $1 + b$. Inoltre gli estremi non possono essere raggiunti, perché $p_a^* = 1 - p_b^* \in (0, 1)$. Dunque deve essere

$$1 + r = (1 + a)\, p_a^* + (1 + b)\, p_b^* \in (1 + a, 1 + b).$$

Dunque, $r \in (a, b)$.

Alternativamente, supponiamo per assurdo $r \notin (a, b)$ e mostriamo che è possibile costruire una strategia di arbitraggio.

Supponiamo $r \leq a$. In questo caso, al tempo 0 prendiamo in prestito un ammontare pari a S_0, così da poter comprare il titolo rischioso, e al tempo N restituiamo il denaro preso in prestito. Questa strategia (ϕ_n^0, ϕ_n) si può riassumere così:

$$\phi_n^0 = -S_0 \qquad \phi_n = 1.$$

In ogni istante n, il valore del nostro investimento è

$$V_n = S_n - S_0\,(1 + r)^n.$$

In particolare, $V_0 = 0$ e $V_N = S_N - S_0\,(1 + r)^N$. Ora, poiché $S_n \geq S_0\,(1 + a)^n \geq S_0\,(1 + r)^n$, $V_n \geq 0$ per ogni n, la strategia è ammissibile, ed inoltre[6] $\mathrm{P}(V_N > 0) > 0$, cioè è una strategia di arbitraggio. Dunque dev'essere $r > a$. Analogamente si prova che[7] $r < b$, da cui l'assurdo.

□

D'ora in poi supporremo a e b fissati in modo che si abbia $a < r < b$. Dunque, d'ora in poi supporremo che il modello CRR sia privo di arbitraggio.

Proposizione 5.6.3. *Supponiamo $a < r < b$ e poniamo*

$$p = \frac{b - r}{b - a}.$$

[6]Infatti, se $\bar{\omega} = (1 + b, \ldots, 1 + b)$ allora $V_N(\bar{\omega}) = S_0\,(1 + b)^N - S_0\,(1 + r)^n > 0$, quindi $\mathrm{P}(V_N > 0) \geq \mathrm{P}(\{\bar{\omega}\}) > 0$.

[7]Basta ripetere lo stesso ragionamento invertendo i ruoli al titolo rischioso e a quello non rischioso.

Allora, se $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$*,* $(\widetilde{S}_n)_n$ *è una* P^**- martingala se e solo se sotto* P^* *le v.a.* $T_1, \dots, T_N$ *sono i.i.d. e tali che*

$$\mathrm{P}^*(T_n = 1 + a) = p = 1 - \mathrm{P}^*(T_n = 1 + b).$$

Dimostrazione. Supponiamo che sotto P^* le v.a. $T_1, \dots, T_N$ siano i.i.d. e tali che $\mathrm{P}^*(T_n = 1 + a) = p = 1 - \mathrm{P}^*(T_n = 1 + b)$. In tal caso, T_{n+1} è indipendente da $\sigma(T_1, \dots, T_n) = \mathscr{F}_n$, quindi

$$\mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*(T_{n+1}) = (1 + a)\, p + (1 + b)\,(1 - p) = 1 + r$$

e dalla Proposizione 5.6.1 segue che $(\widetilde{S}_n)_n$ è una P^*-martingala. Mostriamo che $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$: da (5.13), per ogni $\omega \in \Omega = \{1 + a, 1 + b\}^N$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^*(\{\omega\}) = \mathrm{P}^*(T_1 = \omega_1, \dots, T_N = \omega_N) &= \prod_{n=1}^{N} \mathrm{P}^*(T_n = \omega_n) \\ &= p^k\,(1 - p)^{N-k} > 0 \end{aligned}$$

dove $k = \mathrm{card}\{n; \omega_n = 1 + a\}$, poiché $0 < p < 1$. Quindi $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$.

Viceversa, supponiamo che $(\widetilde{S}_n)_n$ sia una P^*-martingala, con $\mathrm{P}^* \in \mathscr{Q}$. Allora, dalla Proposizione 5.6.1 segue che $\mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = 1 + r$, quindi

$$\begin{gathered} 1 + r = \mathrm{E}^*(T_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \\ = (1 + a)\, \mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \,|\, \mathscr{F}_n) + (1 + b)\, \mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1 + b \,|\, \mathscr{F}_n) = \\ = (1 + a)\, p_n^* + (1 + b)\,(1 - p_n^*) \end{gathered}$$

dove abbiamo posto $p_n^* = \mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \,|\, \mathscr{F}_n)$, da cui ricaviamo

$$p_n^* = p = \frac{b - r}{b - a}\cdot$$

Ora,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1 + a) = \mathrm{E}^*(1_{\{T_{n+1} = 1 + a\}}) &= \mathrm{E}^*\big[\mathrm{E}^*(1_{\{T_{n+1} = 1 + a\}} \,|\, \mathscr{F}_n)\big] \\ &= \mathrm{E}^*\big[\mathrm{P}^*(T_{n+1} = 1 + a \,|\, \mathscr{F}_n)\big] = p, \end{aligned}$$

da cui segue che $\mathrm{P}^*(T_n = 1 + a) = p = 1 - \mathrm{P}^*(T_n = 1 + b)$ per ogni $n = 1, \dots, N$. Mostriamo ora che $T_1, \dots, T_N$ sono indipendenti. Poniamo $p_t = p$ se $t = 1 + a$ e $p_t = 1 - p$ quando $t = 1 + b$. Allora, per $(t_1, \dots, t_N) \in \{1 + a, 1 + b\}^N$, si ha

$$\begin{gathered} \mathrm{P}^*(T_1 = t_1, \dots, T_N = t_N) = \mathrm{E}^*\big[\mathrm{E}^*(1_{\{T_1 = t_1, \dots, T_N = t_N\}} \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\big] \\ = \mathrm{E}^*\big[1_{\{T_1 = t_1, \dots, T_{N-1} = t_{N-1}\}}\, \mathrm{P}^*(T_N = t_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\big] = \\ = p_{t_N}\, \mathrm{E}^*(1_{\{T_1 = t_1, \dots, T_{N-1} = t_{N-1}\}}) = \\ = \cdots = \\ = p_{t_N}\, p_{t_{N-1}} \cdots p_{t_1} = \mathrm{P}^*(T_1 = t_1) \cdots , \mathrm{P}^*(T_N = t_N) \end{gathered}$$

da cui segue che, sotto P^*, le v.a. $T_1, \dots, T_N$ sono indipendenti.

$\square$

Riassumendo, la Proposizione 5.6.2 garantisce che, per $a < r < b$, il mercato è privo di arbitraggio, grazie al primo teorema fondamentale dell'asset pricing, Teorema 5.4.5; la Proposizione 5.6.3 garantisce che la misura di martingala equivalente è unica, dunque per il secondo teorema fondamentale dell'asset pricing, Teorema 5.5.5 il modello CRR è completo. Dunque

Teorema 5.6.4. *Se a, b sono tali che $a < r < b$, il modello CRR è privo di arbitraggio e completo.*

5.6.2 Prezzo e copertura delle opzioni nel modello CRR

Vediamo in questo paragrafo come si possono calcolare i prezzi delle opzioni e determinare i portafogli di copertura nel modello CRR. Consideriamo per cominciare un'opzione il cui payoff sia una funzione di S_N, cioè

$$h = F(S_N). \tag{5.15}$$

Si tratta di un caso che copre gli esempi delle opzioni put e call, per le quali si ha $F(x) = (K - x)_+$ e $F(x) = (x - K)_+$ rispettivamente.

Per la (5.10), il prezzo dell'opzione (5.15) è dato da

$$C_n = (1 + r)^{-(N-n)} \mathrm{E}^* \big[F(S_N) \,|\, \mathscr{F}_n\big],$$

dove E^* è la media fatta sotto la misura di martingala equivalente P^*. La Proposizione 5.6.3 assicura che, sotto P^*, $T_1, \dots, T_N$ sono indipendenti, quindi $T_{n+1} \cdots T_N$ è indipendente da $\mathscr{F}_n$. Ricordando che $S_N = S_n\, T_{n+1} \cdots T_N$ e che S_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, otteniamo

$$\begin{gathered} C_n(1 + r)^{N-n} = \mathrm{E}^* \big[F(S_N) \,|\, \mathscr{F}_n\big] = \\ = \mathrm{E}^* \big[F(S_n\, T_{n+1} \cdots T_N) \,|\, \mathscr{F}_n\big] = \mathrm{E}^* \big[F(x\, T_{n+1} \cdots T_N)\big]\Big|_{x=S_n}, \end{gathered} \tag{5.16}$$

da cui segue che $C_n = c(n, S_n)$ con

$$c(n, x) = (1 + r)^{-(N-n)} \mathrm{E}^* \big[F(x\, T_{n+1} \cdots T_N)\big].$$

Ora, la v.a. $T_{n+1} \cdots T_N$ può assumere i valori $(1 + a)^j\, (1 + b)^{N-n-j}$ con probabilità pari alla probabilità che j v.a. tra $T_{n+1}, \dots, T_N$ assumano il valore $(1 + a)$ e le rimanenti $N - n - j$ assumano il valore $(1 + b)$, al variare di $j \in \{0, 1, \dots, N - n\}$. Poiché le $T_{n+1}, \dots, T_N$ sono indipendenti, ciò accade con probabilità pari a $\binom{N-n}{j} p^j\, (1 - p)^{N-n-j}$. Dunque,

$$\begin{gathered} \mathrm{E}^* \big[F(x\, T_{n+1} \cdots T_N)\big] = \\ = \sum_{j=0}^{N-n} \binom{N-n}{j} p^j\, (1 - p)^{N-n-j}\, F(x(1 + a)^j (1 + b)^{N-n-j}). \end{gathered} \tag{5.17}$$

Osserviamo che il prezzo C_n ottenuto è della forma $C_n = c(n, S_n)$, dove la funzione $c(n, x)$ è data dal termine di destra della (5.17). Cerchiamo ora di vedere come si può fare la copertura dell'opzione. La strategia replicante $((\phi_n^0, \phi_n))_n$ deve essere tale che $V_n(\phi) = C_n$, quindi

$$\phi_n^0\, S_n^0 + \phi_n\, S_n = c(n, S_n).$$

Considerando le due possibilità $S_n = S_{n-1}\,(1+a)$ oppure $S_n = S_{n-1}\,(1+b)$, otteniamo che deve essere

$$\begin{aligned} \phi_n^0\,(1+r)^n + \phi_n\, S_{n-1}\,(1+a) &= c(n, S_{n-1}\,(1+a)),\\ \phi_n^0\,(1+r)^n + \phi_n\, S_{n-1}\,(1+b) &= c(n, S_{n-1}\,(1+b)). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Si vede subito che questo sistema lineare nelle incognite ϕ_n^0, ϕ_n ha sempre soluzione (la matrice dei coefficienti ha evidentemente rango 2, almeno se $a \neq b$). Inoltre è chiaro che la soluzione dipende è una funzione della sola v.a. S_{n-1}, per cui essa è $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabile. Sottraendo la seconda equazione alla prima,

$$\phi_n = \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}\Big|_{x=S_{n-1}}.$$

Come previsto, ϕ_n è funzione della sola v.a. S_{n-1}, ed è effettivamente $\mathscr{F}_{n-1}$-misurabile. Quindi il processo $(\phi_n)_n$ è predicibile. Sostituendo, nella prima delle equazioni (5.18), il valore di ϕ_n appena ottenuto, si trova che $\phi_0 = \Delta^0(n, S_{n-1})$, con

$$\Delta^0(n,x) = (1+r)^{-n}\Big(c(n, x(1+a)) - \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}\Big) =$$

$$(1+r)^{-n}\,\Big(\frac{1+b}{b-a}\, c(n, x(1+a)) - \frac{1+a}{b-a}\, c(n, x(1+b))\Big)$$

e ritroviamo che anche $(\phi_n^0)_n$ è un processo predicibile. La funzione

$$x \to \frac{c(n, x(1+b)) - c(n, x(1+a))}{x(b-a)}$$

si indica anche tradizionalmente $\Delta(n, x)$ e si chiama il *delta*. Ad uno sguardo attento, essa misura la sensibilità della variazione del prezzo dell'opzione al tempo n rispetto ad una variazione del prezzo del titolo di base.

Vediamo ora un altro aspetto del modello CRR, che porterà a formulare una procedura numerica per la determinazione del prezzo delle opzioni della forma (5.15). Con un po' di lavoro, questo metodo può portare a procedure di calcolo per opzioni più complicate.

Abbiamo visto, nella prima parte di questo paragrafo, che il prezzo al tempo n delle opzioni della tipo (5.15) è della forma $c(n, S_n)$. È immediato che il processo

$$((1+r)^{-n} c(n, S_n))_n \tag{5.19}$$

è una P*-martingala. Infatti il prezzo al tempo n coincide con il valore al tempo n del portafoglio di copertura, dunque il processo in (5.19) non è altro che il portafoglio attualizzato.

Vale dunque la relazione

$$\mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(n+1)}c(n+1,S_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_n\big] = (1+r)^{-n}c(n,S_n).$$

Ma

$$\mathrm{E}^*\big[c(n+1,S_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_n\big] = \mathrm{E}^*\big[c(n+1,S_nT_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_n\big].$$

La v.a. S_n è $\mathscr{F}_n$-misurabile, mentre T_{n+1} è indipendente da $\mathscr{F}_n$. Inoltre $\mathrm{P}(T_{n+1}=1+a)=p^*$, $\mathrm{P}(T_{n+1}=1+b)=1-p^*$; dunque si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{E}*\big[c(n+1,S_nT_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_n\big] &= \mathrm{E}*\big[c(n+1,xT_{n+1})\,|\,\mathscr{F}_n\big]\Big|_{x=S_n} = \\ &= (1-p^*)c(n+1,S_n(1+b))+p^*c(n+1,S_n(1+a)).\end{aligned}$$

Si trova dunque la formula di ricorrenza

$$c(n,x) = \frac{1}{1+r}\big((1-p^*)c(n+1,x(1+b))+p^*c(n+1,x(1+a))\big), \quad (5.20)$$

che permette di calcolare "all'indietro" i valori di $c(n,x)$ lungo l'albero. Infatti il valore al tempo N del prezzo dell'opzione è ovviamente dato da

$$c(N,x) = F(x).$$

Da questa relazione e dalla (5.20) si ricavano i valori di $c(N-1,x)$ e così via all'indietro nel tempo fino a trovare il valore del prezzo al tempo 0

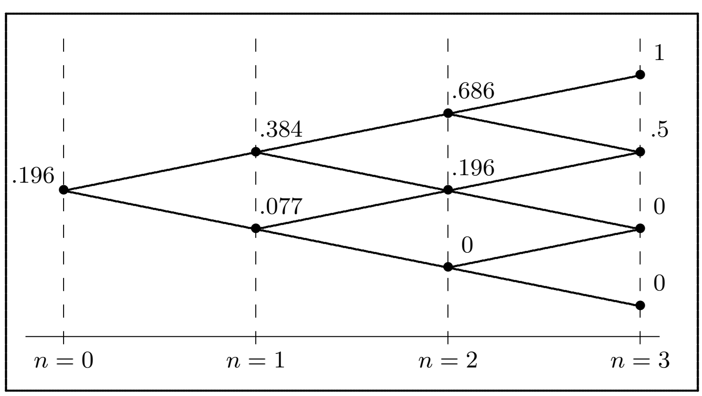


Figura 5.6 Esempio di calcolo all'indietro per un modello a tre periodi, per un'opzione che vale 1 per $S_3=S_0(1+b)^3$, 0.5 per $S_3=S_0(1+b)^2(1+a)$ e 0 per gli altri due possibili valori di S_3. I valori numerici qui sono: $a=0.1$, $b=0.2$, $r=0.02$. Ne segue $p^*=0.6$.

La Figura 5.6 illustra il calcolo con lo schema appena descritto. I valori numerici sono $a=0.1$, $b=0.2$, $r=0.02$ e quindi $p^*=0.6$. Ad esempio il valore 0.686 che compare in uno dei nodi, viene ottenuto da

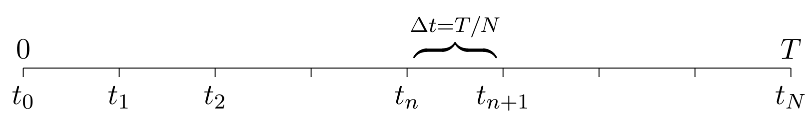
$$0.686 = \frac{1}{1+r}\,((1-p^*)\cdot 1+p^*\cdot 0.5) = \frac{1}{1.02}\,(0.6+0.4\cdot 0.5).$$

A titolo di verifica, calcoliamo il prezzo dell'opzione al tempo 0 con la formule (5.16) e (5.17):

$$C_0 = (1+r)^{-3}\Big((1-p^*)^3 \cdot 1 + \tbinom{3}{1} p^*(1-p^*)^2\Big) = 0.196.$$

5.6.3 Passaggio al limite e la formula di Black e Scholes

Le formule precedenti sono abbastanza soddisfacenti, ma richiedono comunque di essere aggiustate al mercato. In particolare per essere usate in pratica è necessario stabilire i valori di a e b. Ciò si può fare in concreto, vedremo però ora che, facendo crescere il numero di periodi N all'infinito, ed aggiustando convenientemente i valori di r, a e b, si può giungere ad espressioni per il prezzo delle opzioni e per i portafogli di copertura che sono semplici e sono facilmente interpretabili. Troveremo in particolare la formula di Black-Scholes, che ha costituito un po' il punto di partenza di tutta la moderna teoria dei modelli finanziari. In pratica supponiamo di suddividere un intervallo temporale $[0, T]$ in N sottoperiodi, nei quali il comportamento dell'attivo di base segue un modello CRR.



Ipotesi 5.6.5. 1) Supporremo $r = r_N$, con

$$r_N = \frac{RT}{N}\cdot \tag{5.21}$$

Dunque il prezzo del titolo non rischioso $S_n^{0,N}$ è

$$S_n^{0,N} = (1+r_N)^n = \big(1 + \tfrac{RT}{N}\big)^n.$$

Ciò significa che il denaro viene ricapitalizzato alla fine di ogni intervallo $[t_k, t_{k+1}] = [t_k, t_k + \Delta t]$ ad un tasso di interesse costante pari a $r_N = RT/N = R\,\Delta t$. Inoltre, si ha

$$S_N^{0,N} = \big(1 + \tfrac{RT}{N}\big)^N \overset{N\to\infty}{\to} \mathrm{e}^{RT}.$$

La costante $R > 0$ prende il nome di *tasso istantaneo di interesse*.

2) I parametri $a = a_N$ e $b = b_N$ del modello sono scelti in modo tale che:

$$\log \tfrac{1+a_N}{1+r_N} = -\sigma\sqrt{T/N} \quad \text{e} \quad \log \tfrac{1+b_N}{1+r_N} = \sigma\sqrt{T/N} \tag{5.22}$$

o equivalentemente

$$1 + a_N = \big(1 + \tfrac{RT}{N}\big)\,\mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/N}} \quad \text{e} \quad 1 + b_N = \big(1 + \tfrac{RT}{N}\big)\,\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/N}} \tag{5.23}$$

dove σ è un parametro > 0, sul cui significato torneremo più tardi. In particolare stiamo assumendo che, per $N \to \infty$, $a_N, b_N \to 0$, Osserviamo che, poiché $\sigma > 0$, sotto l'Ipotesi 5.6.5 si ha

$$a_N < r_N < b_N,$$

quindi il mercato è privo di arbitraggio e completo (cfr. Teorema 5.6.4).

Osservazione 5.6.6. Sia $p = (b - r)/(b - a)$ il parametro che caratterizza la misura di martingala equivalente. Sotto l'Ipotesi 5.6.5 si ha $p = p_N$, con

$$p_N = \frac{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/N}} - 1}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/N}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/N}}} \quad \text{e} \quad 1 - p_N = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/N}}}{\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T/N}} - \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{T/N}}}. \tag{5.24}$$

Uno sviluppo in serie dà facilmente

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \frac{x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{2x + o(x^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + o(x).$$

Sostituendo $x = \sigma\sqrt{T/N}$, è immediato verificare che

$$\lim_{N\to\infty} p_N = \lim_{N\to\infty}(1 - p_N) = \tfrac{1}{2}, \qquad \lim_{N\to\infty} \sqrt{N}(2p_N - 1) = \tfrac{1}{2}\,\sigma\sqrt{T}. \tag{5.25}$$

Studiamo ora il comportamento per $N \to \infty$ del prezzo del bene sottostante e di quello della call e della put. Ricordiamo che

$$\log \tfrac{S_N^N}{S_0} = \sum_{n=1}^{N} \log T_n^N$$

dove ciascuna delle v.a. T_n^N può assumere i valori $1 + a_N$ e $1 + b_N$ e, sotto P^*, le v.a. $T_1^N, \ldots, T_N^N$ sono indipendenti ed identicamente distribuite. Ricordando i valori stabiliti per $1 + a_N$ e $1 + b_N$, si ha

$$\log \tfrac{S_N^N}{S_0} = N \log(1 + \tfrac{RT}{N}) + \sum_{n=1}^{N} \log \widetilde{T}_n^N$$

ovvero

$$\log \tfrac{\widetilde{S}_N^N}{S_0} = \sum_{n=1}^{N} \log \widetilde{T}_n^N$$

dove le v.a. $\widetilde{T}_n^N$ sono indipendenti e prendono i valori $-\sigma\sqrt{T/N}$, $\sigma\sqrt{T/N}$ con probabilità p_N e $1 - p_N$ rispettivamente.

Proposizione 5.6.7. *La successione di v.a.*

$$\Big(\sum_{n=1}^{N} \log \widetilde{T}_n^N\Big)_N \tag{5.26}$$

converge in legge, per $N \to \infty$ ad una v.a. gaussiana $\mathrm{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$.

Dimostrazione. La dimostrazione consisterà nel calcolo del limite delle funzioni caratteristiche. A questo scopo, studiamo prima il comportamento della media, μ_N, e del momento del second'ordine, m_N^2, della v.a. $\log \widetilde{T}_n^N$. Intanto la v.a. $(\log \widetilde{T}_n^N)^2$ assume il solo valore $\frac{\sigma^2 T}{N}$. Dunque $m_N^2 = \frac{\sigma^2 T}{N}$. Inoltre

$$\mu_N = -p_N \sigma \sqrt{\tfrac{T}{N}} + (1-p_N)\sigma \sqrt{\tfrac{T}{N}} = \sigma\sqrt{T} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}\,(1-2p_N).$$

Dunque, ricordando le (5.25), si ha

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} N\mu_N = -\tfrac{1}{2}\sigma^2 T \\ &\lim_{n\to\infty} N m_N^2 = \sigma^2 T. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Se indichiamo con φ_N la funzione caratteristica delle v.a. $\log \widetilde{T}_n^N$, siamo ricondotti al calcolo del limite

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(\theta)^N.$$

Ora sappiamo che

$$\varphi_N(\theta) = 1 + \varphi_N'(0)\theta + \tfrac{1}{2}\varphi_N''(0)\theta^2 + \tfrac{1}{3!}\,\theta^3 \varphi_N'''(\tau) \tag{5.28}$$

dove τ è compreso tra 0 e θ. Ricordiamo le relazioni

$$\varphi_N'(0) = i\mu_N, \qquad \varphi_N''(0) = -m_N^2, \qquad \varphi_N'''(\tau) = \mathrm{E}\big[(i\log \widetilde{T}_n^N)^3 \mathrm{e}^{it\log \widetilde{T}_n^N}\big].$$

Poiché $|\log \widetilde{T}_n^N| = \sigma\sqrt{\frac{T}{N}}$, si ha

$$|\varphi_N'''(\tau)| \le \mathrm{E}[|i\log \widetilde{T}_n^N|^3] = \sigma^3 (\tfrac{T}{N})^{3/2}$$

e riprendendo la (5.28), otteniamo

$$\varphi_N(\theta) = 1 + i\mu_N\theta - \tfrac{1}{2}m_N^2\theta^2 + o(\tfrac{1}{N}). \tag{5.29}$$

Dunque per la funzione caratteristica delle v.a. (5.26) vale la relazione

$$\begin{aligned} \varphi_N(\theta)^N &= \Big(1 + i\mu_N\theta - \tfrac{1}{2}m_N^2\theta^2 + o(\tfrac{1}{N})\Big)^N = \\ &= \Big(1 + \tfrac{1}{N}\cdot N(i\mu_N\theta - \tfrac{1}{2}m_N^2\theta^2 + o(\tfrac{1}{N}))\Big)^N. \end{aligned}$$

Per le (5.27),

$$N \times \big(i\mu_N\theta - \tfrac{1}{2}m_N^2\theta^2 + o(\tfrac{1}{N})\big) \underset{N\to\infty}{\rightarrow} -i\tfrac{1}{2}\sigma^2 T\theta - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2 T\theta^2$$

e dunque

$$\varphi_N(\theta)^N \underset{N\to\infty}{\rightarrow} \mathrm{e}^{-i\frac{1}{2}\sigma^2 T\theta}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\sigma^2 T\theta^2}$$

che è appunto la funzione caratteristica di una v.a. $\mathrm{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2 T, \sigma^2 T)$.

□

Abbiamo dunque dimostrato che, rispetto alla probabilità di rischio neutro P^*, $\log(\widetilde{S}_N^N/S_0)$ converge in legge verso una v.a. $Y \sim \mathrm{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T)$, mentre, evidentemente $\log(S_N^N/S_0)$ converge in legge verso $RT+Y$. Dunque il prezzo attualizzato $\widetilde{S}_N$ converge in legge verso una v.a. della forma $S_0\mathrm{e}^Y$, dove $Y \sim \mathrm{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T)$. Una v.a. della forma e^Z con $Z \sim \mathrm{N}(b,a)$ si dice che segue una *legge lognormale* di parametri b e a.

Osservazione 5.6.8. Nelle righe precedenti abbiamo usato due proprietà della convergenza in legge.

a) Se $(X_n)_n$ converge in legge verso una v.a. X e ϕ è una funzione monotona strettamente crescente, allora $(\phi(X_n))_n$ converge in legge verso $\phi(X)$.

b) Se Se $(X_n)_n$ converge in legge verso una v.a. X e $(a_n)_n$ è una successione di numeri reali con $a \to_{n\to\infty} a$, allora $(a_n + X_n)_n$ converge in legge verso $a + X$.

Sareste in grado di provare queste due affermazioni?

Passiamo ora a considerare il prezzo di una opzione put a tempo 0:

$$P_0^N = \left(1+\tfrac{RT}{N}\right)^{-N}\mathrm{E}^*\left[(K - S_N^N)_+\right] = \mathrm{E}^*\left[\left(\left(1+\tfrac{RT}{N}\right)^{-N}K - \widetilde{S}_N^N\right)_+\right].$$

Sappiamo che $\widetilde{S}_N^N$ converge in legge a $S_0\mathrm{e}^Y$ con $Y \sim \mathrm{N}(-\frac{1}{2}\sigma^2T, \sigma^2T)$, dunque (si usa ancora il punto b) della osservazione precedente) si ha che

$$\left(1+\tfrac{RT}{N}\right)^{-N}K - \widetilde{S}_N^N \underset{N\to\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\to}} \mathrm{e}^{-RT}K - S_0\mathrm{e}^Y. \tag{5.30}$$

Abbiamo bisogno ora di un risultato che verrà visto in un corso più avanzato

Teorema 5.6.9. *La successione $(X_n)_n$ converge in legge verso una v.a. X se e solo se, per ogni funzione reale f, continua e limitata, si ha*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[f(X_n)] = \mathrm{E}[f(X)].$$

Dal Teorema 5.6.9 segue che

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{E}^*\left[\left(\left(1+\tfrac{RT}{N}\right)^{-N}K - \widetilde{S}_N^N\right)_+\right] = \mathrm{E}^*[(\mathrm{e}^{-RT}K - S_0\mathrm{e}^Y)_+]. \tag{5.31}$$

Infatti le v.a. $\left(1+\frac{RT}{N}\right)^{-N}K - \widetilde{S}_N^N$ e $\mathrm{e}^{-RT}K - S_0\mathrm{e}^Y$ prendono comunque valori più piccoli di K. Dunque, posto $f(x) = x_+ \wedge K = \min(x^+, K)$, si può scrivere

$$\begin{aligned}\left(\left(1+\tfrac{RT}{N}\right)^{-N}K - \widetilde{S}_N^N\right)_+ &= f\left(\left(1+\tfrac{RT}{N}\right)^{-N}K - \widetilde{S}_N^N\right)\\ (\mathrm{e}^{-RT}K - S_0\mathrm{e}^Y)_+ &= f(\mathrm{e}^{-RT}K - S_0\mathrm{e}^Y).\end{aligned}$$

Si può quindi applicare il Teorema 5.6.9 alla funzione f che è continua e limitata.

Teorema 5.6.10. *Nell'Ipotesi 5.6.5, si ha*

$$\lim_{N\to\infty} P_0^N = P_0$$

dove

$$P_0 = K\,\mathrm{e}^{-R\,T}\,\Phi(-d_2) - S_0\,\Phi(-d_1) \tag{5.32}$$

doveΦ *è la funzione di ripartizione di una legge gaussiana standard e*

$$\begin{aligned} d_1 &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(\log\tfrac{x}{K} + R\,T + \tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,T\big) \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T} = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(\log\tfrac{x}{K} + R\,T - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,T\big). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per la (5.31)

$$\lim_{N\to\infty} P_0^N = \mathrm{E}^*[(\mathrm{e}^{-RT}K - S_0\mathrm{e}^Y)_+],$$

dove $Y \sim \mathrm{N}(-\frac{1}{2}\,\sigma^2\,T, \sigma^2\,T)$. Ci resta da mostrare che la speranza matematica a destra nella relazione precedente vale in effetti come precisato nella (5.32). Osserviamo che possiamo scrivere $Y = -\frac{1}{2}\,\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}\,Z$, dove $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$. Indicando con x il valore di S_0, si ha

$$\begin{aligned} P_0 &= \mathrm{E}\big[\big(\mathrm{e}^{-RT}K - x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,\sigma^2\,T + \sigma\sqrt{T}\,Z}\big)_+\big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\big(\mathrm{e}^{-R\,T}K - x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2\,T + \sigma\sqrt{T}\,z}\big)_+\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz. \end{aligned}$$

Ora la disuguaglianza

$$\mathrm{e}^{-R\,T}K - x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2\,T + \sigma\sqrt{T}\,z} \geq 0$$

è soddisfatta se e solo se

$$-RT + \log K \geq \log x - \tfrac{1}{2}\sigma^2\,T + \sigma\sqrt{T}\,z$$

ovvero

$$z \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(-\log\tfrac{x}{K} - R\,T + \frac{1}{2}\,\sigma^2\,T\big) = -d_2.$$

Quindi P_0 è uguale a

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\big\{\mathrm{e}^{-R\,T}K - x\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2\,T + \sigma\sqrt{T}\,z}\big\}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz = \\ &\frac{\mathrm{e}^{-R\,T}K}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\mathrm{e}^{-z^2/2}dz - \frac{x}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sigma^2\,T + \sigma\sqrt{T}\,z}\,\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz \\ &= \mathrm{e}^{-R\,T}K\,\Phi(-d_2) - \frac{x}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}\,dz. \end{aligned}$$

Con un semplice cambio di variabile, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\int_{-\infty}^{-d_2+\sigma\sqrt{T}}\mathrm{e}^{-t^2/2}\,dt = \Phi(-d_1)$$

da cui segue la tesi.

□

Teorema 5.6.11. *Nell'Ipotesi 5.6.5, si ha*

$$\lim_{N\to\infty} C_0^N = C_0$$

dove

$$C_0 = S_0\,\Phi(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-RT}\,\Phi(d_2).$$

Dimostrazione. Per dimostrare la convergenza della call, non possiamo ricalcare la dimostrazione dell'analogo risultato della put. Infatti, la v.a. $(S_0\,\mathrm{e}^Y - \mathrm{e}^{-RT}\,K)_+$ non è limitata e non si può applicare il Teorema 5.6.9. Ma grazie alla formula di parità call/put, (5.11), si ha

$$C_0^N = P_0^N + S_0 - K\left(1 + \tfrac{RT}{N}\right)^{-N}$$

quindi C_0^N converge, per $N \to \infty$, a

$$\begin{aligned} P_0 + S_0 - K\,\mathrm{e}^{-RT} &= S_0\big(1 - \Phi(-d_1)\big) - K\,\mathrm{e}^{-RT}\,\big(1 - \Phi(-d_2)\big) \\ &= S_0\,\Phi(d_1) - K\,\mathrm{e}^{-RT}\,\Phi(d_2) = C_0. \end{aligned}$$

□

Ci si può chiedere anche quale debba essere il valore del prezzo ad un tempo t intermedio tra la data di emissione e la maturità T. È chiaro che, perché non ci siano opportunità di arbitraggio, occorre che il prezzo di un'opzione call emessa al tempo t debba avere lo stesso prezzo, C_t, di un'opzione call emessa al tempo 0 ed avente lo stesso prezzo di esercizio e la stessa maturità. Dunque l'espressione per C_t deve essere, $C_t = c(t, S_t)$, dove

$$c(t,x) = x\,\Phi(d_1(t)) - K\,\mathrm{e}^{-R\,(T-t)}\,\Phi(d_2(t)). \tag{5.33}$$

dove

$$\begin{aligned} d_1(t) &= \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\big(\log\tfrac{x}{K} + R\,(T-t) + \tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,(T-t)\big) \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\big(\log\tfrac{x}{K} + R\,(T-t) - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2\,(T-t)\big). \end{aligned} \tag{5.34}$$

cioè la stessa espressione di C_0, con $T - t$ al posto di T.

5.7 La volatilità

La (5.33) del paragrafo precedente, è la formula di Black-Scholes. In questo paragrafo e nel prossimo studiamo un po' il comportamento del prezzo dell'opzione in funzione delle quantità da cui dipende.

Intanto osserviamo che essa dipende da un certo numero di parametri. Di questi, quasi tutti sono noti a priori: x, R, T e K sono quantità note al tempo 0. Il solo parametro che resta da determinare per applicare concretamente la formula è la volatilità σ.

Vediamo innanzitutto, in che modo il prezzo dipende dalla volatilità, calcolandone la derivata. Si trova, con un po' di lavoro, che

$$\frac{\partial C_0}{\partial \sigma} = \frac{x\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,d_1(t)^2}\,.$$

In particolare il prezzo è, una funzione strettamente crescente (e quindi invertibile) della volatilità. Questa osservazione ha due conseguenze importanti. Intanto gli attivi finanziari per i quali il prezzo dell'opzione è elevato

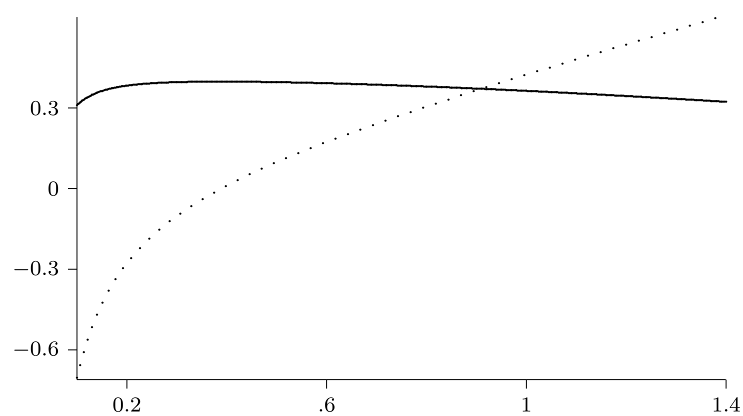


Figura 5.8 A puntini: andamento della quantità d_1 (vedi la definizione nell'enunciato del Teorema 5.32); a tratto pieno: della derivata di C_0 rispetto a σ. I valori qui sono: $T = 1$, $K = 1.1$, $x = 1$, $R = .02$. Come si vede la derivata ha un andamento abbastanza "piatto". Se avessimo fatto il grafico di C_0 al variare di σ, questo avrebbe somigliato grosso modo ad una retta, di pendenza intorno a 0.3, con una leggera convessità verso il basso fino al valore $\sigma = 0.2$, e con una leggera convessità verso l'alto per valori più grandi.

sono quelli molto volatili (cioè quelli per i quali la volatilità σ è elevata). Tenendo conto del fatto che, più è grande σ e più sono grandi le oscillazioni del prezzo in un intervallo di tempo (cfr. la (5.23)), i titoli più volatili (e quindi le cui opzioni sono le più costose) sono quelli per i quali i prezzi presentano le maggiori oscillazioni del prezzo nel tempo.

Il fatto che il prezzo sia una funzione invertibile di σ fornisce un modo semplice di determinare la volatilità a partire dai dati del mercato. Se c^* è il prezzo di un'opzione quotata sul mercato, per una data maturità ed un dato prezzo di esercizio, invertendo l'applicazione che alla volatilità associa il prezzo, per K, R, T fissati, si può ottenere il valore della volatilità σ in funzione di c^*. Questo valore può essere utilizzato per determinare il prezzo di opzioni con altri valori del prezzo di esercizio e della maturità. Questa osservazione permette anche di verificare la bontà del modello che abbiamo sviluppato. Infatti i valori della volatilità ottenuti in questo modo invertendo la funzione prezzo, per delle opzioni con valori diversi del prezzo di esercizio e della maturità, devono dare lo stesso risultato. Delle discrepanze tra i valori ottenuti indicheranno che il modello spiega solo parzialmente il mercato reale. Nella realtà queste anomalie si osservano in concreto, ma il modello di Black-Scholes viene tuttora considerato un buon modello e comunque una tappa obbligata verso la costruzione di modelli più sofisticati.

5.8 Le greche

Una certa importanza hanno le derivate della funzione prezzo, $c(t, x)$, ottenuta nella (5.33). Queste derivate, che indicano la sensibilità alla variazione del parametro corrispondente, tradizionalmente si indicano con lettere dell'alfabeto greco, per cui vengono chiamate le *greche*. Abbiamo già incontrato una di queste derivate, quella rispetto alla volatilità, che si chiama la *vega* (che però non è una lettera greca...). Le altre greche sono

- la delta, cioè la derivata rispetto al prezzo dell'attivo sottostante
$$\Delta = \frac{\partial c}{\partial x}(x, t)$$
- la gamma, che è la derivata seconda, sempre rispetto a x
$$\Gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(x, t)$$
- la theta, cioè la derivata rispetto al tempo
$$\Theta = \frac{\partial c}{\partial t}(x, t)$$

Calcoleremo ora queste quantità, nel caso dell'opzione call. Per la delta, si ha
$$\frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = \Phi(d_1(t)) + \underbrace{x\,\Phi'(d_1(t))\frac{\partial d_1(t)}{\partial x} - K\,\mathrm{e}^{-R\,(T-t)}\,\Phi'(d_2(t))\frac{\partial d_2(t)}{\partial x}}.$$

Osserviamo che
$$\frac{\partial d_1(t)}{\partial x} = \frac{\partial d_2(t)}{\partial x}$$
poiché le due funzioni d_1 e d_2 differiscono per una quantità che non dipende da x. Mostriamo che la quantità indicata nelle formula precedente si annulla. Infatti essa è uguale a
$$\frac{\partial d_1(t)}{\partial x}\Phi'(d_2(t))\Big\{x\,\frac{\Phi'(d_1(t))}{\Phi'(d_2(t))} - K\mathrm{e}^{-RT}\Big\}.$$

Ricordando che Φ' è la densità della gaussiana $\mathrm{N}(0,1)$,

$$\frac{\Phi'(d_1(t))}{\Phi'(d_2(t))} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(d_1(t)^2 - d_2(t)^2)} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(d_1(t)-d_2(t))(d_1(t)+d_2(t))} =$$
$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\cdot 2(\log\frac{x}{K}+RT)} = \frac{K}{x}\mathrm{e}^{-RT}$$

e sostituendo si trova l'espressione cercata per la delta

$$\frac{\partial c}{\partial x}(x,t) = \Phi(d_1(t)).$$

Da notare che si tratta sempre di una quantità compresa tra 0 e 1. Possiamo ora facilmente calcolare la gamma della call.

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = \Phi'(d_1(t))\frac{\partial d_1(t)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}d_1(t)^2}\frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}\,x}$$

dove indichiamo $\tau = T - t$. Con un calcolo un po' più lungo si ottiene la theta:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x,t) = -\Big[\frac{x\sigma}{2\sqrt{T-t}\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}d_1(t)^2} + RK\mathrm{e}^{-R(T-t)}\Phi(d_2(t))\Big].$$

Mettendo insieme le relazioni ottenute, si vede che la funzione c è soluzione del problema alle derivate parziali

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + Rx\,\frac{\partial c}{\partial x} - Rc = 0$$

con la condizione $c(x,T) = (x-K)_+$.

5.9 Appendice al Capitolo 5

5.9.1 Teorema di separazione dei convessi

In questo paragrafo dimostriamo il Teorema 5.4.4 (*teorema di separazione dei convessi*), di cui ricordiamo l'enunciato:

Sia $K \subset \mathbb{R}^m$ un insieme compatto e convesso e sia $\mathscr{V}$ un sottospazio di $\mathbb{R}^m$ tali che $K \cap \mathscr{V} = \emptyset$. Allora, esiste $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tale che

per ogni $x \in K$, $\sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell x_\ell > 0$;

per ogni $x \in \mathscr{V}$, $\sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell x_\ell = 0$.

La dimostrazione è diretta conseguenza del seguente

Teorema 5.9.1. *Sia $C \subset \mathbb{R}^m$ un insieme chiuso e convesso che non contenga l'origine. Allora, esiste un funzionale lineare ξ su $\mathbb{R}^m$ ed un numero $\alpha > 0$ tali che*

$$\textit{per ogni } x \in C \textit{ si ha } \xi(x) \geq \alpha.$$

Dimostrazione. Sia R un numero positivo tale che la palla chiusa $\bar{B}_R$ centrata nell'origine e di raggio R interseca C. L'insieme $C \cap \bar{B}_R$ è un compatto (perché chiuso e limitato), dunque l'applicazione $C \cap \bar{B}_R \ni x \mapsto \|x\|$ assume il minimo. Sia x_0 il punto in cui il minimo è assunto. Segue immediatamente che

$$\text{per ogni } x \in C \text{ si ha } \|x\| \geq \|x_0\|.$$

Osserviamo che x_0 non è altro che la proiezione dell'origine su C. Ora, preso $x \in C$, tutti i punti del tipo $x_0 + t(x - x_0) \in C$ quando $t \in [0,1]$, perché $x, x_0 \in C$ e C è convesso. Quindi, per ogni $t \in [0,1]$, $\|x_0 + t(x - x_0)\| \geq \|x_0\|$ e sviluppando questa disuguaglianza[8] si ottiene:

$$\langle x_0, x \rangle \geq \|x_0\|,$$

per ogni $x \in C$. Posto allora $\xi(x) = \langle x_0, x \rangle$ e $\alpha = \|x_0\|$, il teorema è dimostrato.

□

Possiamo ora passare alla

Dimostrazione del Teorema 5.4.4. Poniamo

$$C = K - \mathscr{V} = \{x \in \mathbb{R}^m \,:\, x = y - z, \text{ per qualche } y \in K, z \in \mathscr{V}\}.$$

È immediato vedere che C è convesso, chiuso e non contiene l'origine. Per il Teorema 5.9.1 esistono un funzionale lineare ξ su $\mathbb{R}^m$ ed un numero positivo α tali che per ogni $x \in C$ si ha $\xi(x) \geq \alpha$. Quindi,

$$\text{per ogni } y \in K \text{ e } z \in \mathscr{V},\ \xi(y) - \xi(z) \geq \alpha. \tag{5.35}$$

[8]Ricordiamo che $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

Ora, fissiamo $y \in K$ e $z \in \mathscr{V}$. Sia $c > 0$: applicando la disuguaglianza (5.35) a $cz \in \mathscr{V}$, si ottiene $\xi(z) \leq (\xi(y) - \alpha)/c \to 0$ per $c \to +\infty$, dunque $\xi(z) \leq 0$. Se invece prendiamo $c < 0$ e poi $c \to -\infty$, otteniamo $\xi(z) \geq 0$. Ma allora, $\xi(z) = 0$ per ogni $z \in \mathscr{V}$ e quindi $\xi(y) \geq \alpha > 0$ per ogni $y \in K$. Infine, osserviamo che un funzionale lineare su $\mathbb{R}^m$ è sempre del tipo $\xi(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, x_i$, per un opportuno vettore $\lambda \in \mathbb{R}^m$, da cui segue la tesi.

$\square$