Capitolo 6

Opzioni americane

6.1 Il modello

Consideriamo un modello di mercato finanziario così come descritto nel Paragrafo 5.2. Il mercato è quindi formato da $d+1$ titoli di prezzi $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$, dove

$$S_n^0 = (1+r)^n$$

denota il prezzo del titolo non rischioso e $S_n^1, \dots, S_n^d$ i prezzi dei d titoli rischiosi al tempo n. Indicheremo ancora con $(\mathscr{F}_n)_n$ la filtrazione associata, rispetto alla quale $(S_n)_n = ((S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d))_n$ è adattato, ricordando che $\mathscr{F}_n$ dà l'evoluzione del mercato fino al tempo n.

Supponiamo d'ora in poi che il mercato sia privo di arbitraggio e completo: esiste ed è unica la misura equivalente di martingala P^*, tale che il processo dei prezzi scontati dei titoli rischiosi è una $\mathscr{F}_n$-martingala. Denoteremo, al solito, con E^* l'aspettazione valutata sotto P^*.

In questo capitolo intendiamo studiare il prezzo e la copertura delle opzioni americane. Ricordiamo che un'opzione americana è caratterizzata dal fatto di poter essere esercitata in un qualsiasi istante minore od uguale alla maturità N. Per caratterizzare un'opzione americana è quindi necessario precisare per ogni tempo n, il payoff, Z_n. Cioè la quantità di denaro che occorre sborsare se il detentore dell'opzione decide di esercitarla al tempo n. Poiché il payoff al tempo n deve, ragionevolmente, essere noto al tempo n, siamo condotti alla seguente

Definizione 6.1.1. *Un'opzione americana è una famiglia di v.a. positive $(Z_n)_n$, adattata alla filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$.*

Ad esempio, per una call o una put americana, scritta sul titolo di prezzo $(S_n^1)_n$, si avrà rispettivamente

$$Z_n = Z_n^{\text{call}} = (S_n^1 - K)_+$$
$$Z_n = Z_n^{\text{put}} = (K - S_n^1)_+.$$

Nella problematica delle opzioni americane è opportuno anche considerare il problema dal punto di vista del detentore: quando conviene esercitare il diritto di opzione? In particolare occorre modellizzare l'istante (aleatorio), τ, in cui l'opzione viene esercitata. Poiché è ragionevole supporre che questo istante dipenda dall'evoluzione del mercato, dovrà essere $\{\tau = n\} \in \mathscr{F}_n$, per ogni n. Ovvero, ricordando il paragrafo 4.4, supporremo che τ sia un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto. Poniamo

$$\mathscr{T}_{0,N} = \{(\mathscr{F}_n)_n - \text{tempi d'arresto a valori in } \{0, 1, \dots, N\}\}.$$

l'insieme di tutti i tempi d'arresto della filtrazione $(\mathscr{F}_n)_n$. Vedremo che il prezzo di un'opzione americana è pari a

$$\sup_{\tau \in \mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-\tau} Z_\tau\big]. \tag{6.1}$$

Cioè il prezzo è uguale al sup, al variare della strategia d'esercizio, della media dei payoff scontati, media fatta rispetto alla probabilità di rischio neutro. Vedremo inoltre che il sup nella relazione precedente è in realtà un massimo e, dunque, esiste (almeno) una strategia di esercizio ottimale.

Come si vede lo studio delle opzioni americane è naturalmente legato a quello della determinazione del tempo di esercizio ottimale. Molti degli oggetti che introdurremo sono propri della teoria dell'*arresto ottimo*.

6.2 Il problema dell'arresto ottimo

Per stabilire il prezzo equo di un'opzione americana, cominciamo procedendo con un'induzione "all'indietro". Vediamo come. Consideriamo un'opzione americana $(Z_n)_n$ e indichiamo con U_n il suo prezzo al tempo n. Attenzione alla solita possibilità di confusione di questa terminologia: Z_n è il payoff dell'opzione, cioè quanto deve sborsare il venditore per onorare il contratto, qualora il detentore decida di esercitare l'opzione al tempo n; U_n è invece il giusto prezzo che il venditore deve ricevere come compenso dell'opzione e che ora determineremo.

Tempo N. Il compratore dell'opzione decide di esercitare il suo diritto d'opzione: il venditore deve sborsare una quantità di denaro pari a

$$U_N = Z_N.$$

Tempo $N - 1$. Ci sono due possibilità.

1. Il compratore dell'opzione decide di esercitare il suo diritto d'opzione all'istante $N - 1$. In tal caso, il venditore deve pagare un ammontare pari a Z_{N-1}.

2. Il compratore decide di non esercitare l'opzione all'istante $N-1$ ma all'istante N. In questo caso, il venditore deve essere pronto, all'istante $N-1$, a pagare all'istante N una quantità di denaro pari a Z_N. Per onorare questo contratto, abbiamo visto che all'istante $N-1$ il venditore deve possedere, in media,

$$(1+r)^{-(N-(N-1))}\,\mathrm{E}^*(Z_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1}) = \frac{1}{(1+r)}\,\mathrm{E}^*(U_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1}).$$

Dunque, all'istante $N-1$ il venditore deve possedere una quantità di denaro U_{N-1} che deve coprire le due possibilità appena elencate, e cioè

$$U_{N-1} = \max\Big(Z_{N-1}, \frac{1}{(1+r)}\,\mathrm{E}^*(U_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\Big).$$

Tempo $n = N-2, N-1, \dots, 0$. Si procede per ricorrenza in modo analogo a quanto già visto. Supponiamo quindi che la quantità U_{n+1} sia ben definita, essendo U_{n+1} l'ammontare di denaro che il venditore dell'opzione deve possedere all'istante (successivo) $n+1$ per poter onorare il contratto d'opzione. Allora:

1. se il compratore dell'opzione decide di esercitare il suo diritto d'opzione all'istante n, allora il venditore deve possedere una quantità di denaro pari a Z_n;

2. se invece il compratore decide di non esercitare l'opzione all'istante n, allora il venditore deve essere pronto, all'istante n, a pagare all'istante $n+1$ una quantità di denaro pari a U_{n+1}, dunque deve possedere

$$(1+r)^{-(n+1-n)}\,\mathrm{E}^*(U_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) = \frac{1}{(1+r)}\,\mathrm{E}^*(U_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n).$$

Dunque, all'istante n il venditore deve possedere una quantità di denaro U_n che deve coprire le due possibilità appena elencate, e cioè

$$U_n = \max\Big(Z_n, \frac{1}{(1+r)}\,\mathrm{E}^*(U_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\Big).$$

U_n rappresenta quindi il prezzo dell'opzione all'istante n.

Ricapitolando, siamo condotti a considerare il processo $(U_n)_n$ definito da

$$\begin{aligned} &U_N = Z_N \quad \text{e per } n = N-1, N-2, \dots, 0, \\ &U_n = \max\Big(Z_n, \tfrac{1}{(1+r)}\,\mathrm{E}^*(U_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\Big) \end{aligned} \tag{6.2}$$

Vedremo, nel prossimo paragrafo, che $(U_n)_n$ è effettivamente il prezzo dell'opzione al tempo n. In questo paragrafo studieremo le sue proprietà e metteremo in evidenza come esso interviene nel problema dell'arresto ottimo, cioè nella determinazione dei tempi di arresto per i quali il sup nella (6.1) è raggiunto.

Abbiamo visto che, per le opzioni europee, i prezzi scontati costituiscono una P^*-martingala. Vale la stessa proprietà anche nel caso americano? La risposta è no. Vale però il risultato seguente.

Proposizione 6.2.1. *Sia U_n il prezzo di un'opzione americana di payoff $(Z_n)_n$ al tempo n, $n = 0, 1, \ldots, N$, dato da (6.2). Siano $(\widetilde{U}_n)_n$ e $(\widetilde{Z}_n)_n$ rispettivamente il processo di prezzo e di payoff scontato:*

$$\widetilde{U}_n = \frac{U_n}{S_n^0} = (1+r)^{-n}\, U_n \quad e \quad \widetilde{Z}_n = \frac{Z_n}{S_n^0} = (1+r)^{-n}\, Z_n.$$

Allora $(\widetilde{U}_n)_n$ è una P^*-supermartingala ed inoltre è la più piccola supermartingala che domina $(\widetilde{Z}_n)_n$, cioè tale che $U_n \geq Z_n$.

Un po' di terminologia: dato un processo $(X_n)_n$, si chiama inviluppo di Snell di $(X_n)_n$ la più piccola supermartingala che domina $(X_n)_n$. Il problema del calcolo del prezzo delle opzioni americane si riconduce quindi al calcolo dell'inviluppo di Snell del processo di payoff $(\widetilde{Z}_n)_n$.

Osserviamo che, da (6.2), segue immediatamente che

$$\begin{aligned} &\widetilde{U}_N = \widetilde{Z}_N \quad \text{e per } n = N-1, N-2, \ldots, 0, \\ &\widetilde{U}_n = \max\big(\widetilde{Z}_n, \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)\big) \end{aligned} \tag{6.3}$$

Dimostrazione della Proposizione 6.2.1. Da (6.3), si ha

$$\widetilde{U}_n \geq \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) \quad \text{e} \quad \widetilde{U}_n \geq \widetilde{Z}_n,$$

dunque $(\widetilde{U}_n)_n$ è una P^*-supermartingala che domina $(\widetilde{Z}_n)_n$. Mostriamo che è la più piccola. Sia $(\widetilde{V}_n)_n$ un'altra P^*-supermartingala che domina $(\widetilde{Z}_n)_n$: mostriamo che $\widetilde{V}_n \geq \widetilde{U}_n$. Intanto, si ha $\widetilde{V}_N \geq \widetilde{Z}_N = \widetilde{U}_N$. Ma allora,

$$\widetilde{V}_{N-1} \geq \mathrm{E}^*(\widetilde{V}_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1}) \geq \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})$$

e quindi, poiché deve essere $\widetilde{V}_{N-1} \geq \widetilde{Z}_{N-1}$,

$$\widetilde{V}_{N-1} \geq \max\Big(\widetilde{Z}_{N-1}, \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\Big) = \widetilde{U}_{N-1}.$$

Dunque, si ha anche $\widetilde{V}_{N-1} \geq \widetilde{U}_{N-1}$. Procedendo per ricorrenza, otteniamo che $\widetilde{V}_n \geq \widetilde{U}_n$ per ogni n, da cui la tesi.

□

Continuiamo a studiare le proprietà di martingala associate a $(U_n)_n$.

Proposizione 6.2.2. *Sia*

$$\nu_0 = \inf\{n \geq 0 \ \ t.c. \ \widetilde{U}_n = \widetilde{Z}_n\}.$$

Allora ν_0 è un $\mathscr{F}_n$-tempo d'arresto a valori in $\{0, 1, \ldots, N\}$ e il processo arrestato $(\widetilde{U}_{n\wedge\nu_0})_{0\leq n\leq N}$ è una $\mathscr{F}_n$-martingala.

Dimostrazione. Osserviamo che, poiché $U_N = Z_N$ e dunque $\widetilde{U}_N = \widetilde{Z}_N$, evidentemente dev'essere $\nu_0 \leq N$, cioè ν_0 è a valori in $\{0, 1, \ldots, N\}$. ν_0 è evidentemente un tempo d'arresto. Infatti si può scrivere $\nu_0 = \inf\{n \geq 0; \widetilde{U}_n - \widetilde{Z}_n = 0\}$ e dunque ν_0 è un tempo d'ingresso (vedi Esempio 4.4.2). Poniamo $\widetilde{U}_n^{\nu_0} = \widetilde{U}_{n\wedge\nu_0}$ e osserviamo che

$$\widetilde{U}_n^{\nu_0} = U_0 + \sum_{j=1}^{n\wedge\nu_0} 1_{\{\nu_0\geq j\}}\, \Delta\widetilde{U}_j = U_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{\{\nu_0\geq j\}}\, \Delta\widetilde{U}_j,$$

dove naturalmente $\Delta\widetilde{U}_j = \widetilde{U}_j - \widetilde{U}_{j-1}$. Si noti che, per ogni j, la v.a. $1_{\{\nu_0\geq j\}}$ è $\mathscr{F}_{j-1}$-misurabile, perché $1_{\{\nu_0\geq j\}} = 1 - 1_{\{\nu_0\leq j-1\}}$ e $\{\nu_0 \leq j-1\} \in \mathscr{F}_{j-1}$, poiché ν_0 è un tempo d'arresto. Dunque

$$\widetilde{U}_{n+1}^{\nu_0} - \widetilde{U}_n^{\nu_0} = 1_{\{\nu_0\geq n+1\}}\, (\widetilde{U}_{n+1} - \widetilde{U}_n),$$

se i ha

$$\mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{n+1}^{\nu_0} - \widetilde{U}_n^{\nu_0} \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*(1_{\{\nu_0\geq n+1\}}\, (\widetilde{U}_{n+1} - \widetilde{U}_n) \,|\, \mathscr{F}_n) \tag{6.4}$$

Ora, sull'insieme $\{\nu_0 \geq n+1\}$, si ha $\widetilde{U}_n > \widetilde{Z}_n$, dunque

$$1_{\{\nu_0\geq n+1\}}\widetilde{U}_n = 1_{\{\nu_0\geq n+1\}}\mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)$$

e quindi, poiché $\{\nu_0 \geq n+1\} \in \mathscr{F}_n$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}^*[1_{\{\nu_0\geq n+1\}}(\widetilde{U}_{n+1}-\widetilde{U}_n) \,|\, \mathscr{F}_n] &= \mathrm{E}^*\big[1_{\{\nu_0\geq n+1\}}(\tilde{U}_{n+1}-\mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n)) \,|\, \mathscr{F}_n\big] = \\ &= 1_{\{\nu_0\geq n+1\}}\mathrm{E}^*\big[\tilde{U}_{n+1} - \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{n+1} \,|\, \mathscr{F}_n) \,|\, \mathscr{F}_n\big] = 0\end{aligned}$$

da cui, sostituendo in (6.4) si ha la tesi.

□

La Proposizione 6.2.2 ha una conseguenza importante.

Corollario 6.2.3. *Il tempo d'arresto ν_0 soddisfa le seguenti uguaglianze:*

$$U_0 = \widetilde{U}_0 = \mathrm{E}^*(\widetilde{Z}_{\nu_0} \,|\, \mathscr{F}_0) = \sup_{\nu\in\mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*(\widetilde{Z}_\nu \,|\, \mathscr{F}_0),$$

(ricordiamo che $\mathscr{T}_{0,N}$ è l'insieme degli $\mathscr{F}_n$-tempi d'arresto che prendono valori in $\{0, 1, \ldots, N\}$).

Dimostrazione. Per definizione di ν_0, si ha $\widetilde{U}_{\nu_0} = \widetilde{Z}_{\nu_0}$. Poiché $(\widetilde{U}_n^{\nu_0})_n$ è una martingala e $\widetilde{U}_N^{\nu_0} = \widetilde{U}_{\nu_0}$, si ha

$$U_0 = \widetilde{U}_0 = \widetilde{U}_0^{\nu_0} = \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_N^{\nu_0} \,|\, \mathscr{F}_0) = \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_{\nu_0} \,|\, \mathscr{F}_0) = \mathrm{E}^*(\widetilde{Z}_{\nu_0} \,|\, \mathscr{F}_0).$$

Ora, prendiamo un qualsiasi tempo d'arresto $\nu \in \mathscr{T}_{0,N}$. Per la Proposizione 6.2.1, $(\widetilde{U}_n)_n$ è una P^*-supermartingala, quindi (cfr. Proposizione 4.4.4) anche $(\widetilde{U}_n^{\nu})_n = (\widetilde{U}_{n\wedge\nu})_n$ è una P^*-supermartingala. Inoltre, essendo $\widetilde{U}_n \geq \widetilde{Z}_n$ per ogni n, si ha anche $\widetilde{U}_\nu \geq \widetilde{Z}_\nu$. Ma allora,

$$U_0 = \widetilde{U}_0 \geq \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_N^{\nu} \,|\, \mathscr{F}_0) = \mathrm{E}^*(\widetilde{U}_\nu \,|\, \mathscr{F}_0) = \mathrm{E}^*(\widetilde{Z}_\nu \,|\, \mathscr{F}_0),$$

da cui segue la tesi.

□

Osserviamo che, con un'occhiata più attenta alla dimostrazione del Corollario 6.2.3, un tempo d'arresto τ è ottimale se e solo se succedono insieme due cose:

1) Il processo arrestato $(U_n^\tau)_n$ è una martingala.
2) $U_\tau = Z_\tau$.

6.3 Prezzo e copertura delle opzioni americane

Vediamo ora come si può costruire un portafoglio di copertura di un'opzione americana di payoff $(Z_n)_n$. Abbiamo osservato che il processo $(U_n)_n$, costruito nel paragrafo precedente, è tale che i suoi valori scontati $(\widetilde{U}_n)_n$ costituiscono una supermartingala. Sia allora

$$\widetilde{U}_n = \widetilde{M}_n - \widetilde{A}_n$$

la sua decomposizione di Doob (vedi il paragrafo 4.3). Dunque $(\widetilde{M}_n)_n$ è una martingala, mentre $(\widetilde{A}_n)_n$ è un processo crescente predicibile. Consideriamo l'opzione europea di payoff $M_N = (1+r)^N \widetilde{M}_N$ e sia $(V_n(\phi))_n$ il suo portafoglio replicante, di cui abbiamo studiato le proprietà nel paragrafo 5.6. Poiché il portafoglio attualizzato $(\widetilde{V}_n(\phi))_n$ è una martingala rispetto a P^*, si ha

$$\widetilde{V}_n(\phi) = \mathrm{E}^*[\widetilde{V}_N(\phi) \,|\, \mathscr{F}_n] = \mathrm{E}^*[\widetilde{M}_N \,|\, \mathscr{F}_n] = \widetilde{M}_n.$$

Dunque, moltiplicando per il fattore di sconto $(1+r)^n$,

$$V_n(\phi) = (1+r)^n \widetilde{M}_n = U_n + (1+r)^n \widetilde{A}_n \geq U_n \geq Z_n$$

Dunque con un capitale pari a

$$U_0 = V_0(\phi) = \mathrm{E}^*[\widetilde{M}_N \,|\, \mathscr{F}_n],$$

è possibile costituire un portafoglio ammissibile che garantisce ad ogni istante n di coprire il payoff dell'opzione Z_n. La condizione di assenza di arbitraggio garantisce dunque che il prezzo dell'opzione, c_0, non può essere superiore a $U_0 = V_0(\phi)$. Mostriamo anzi che la condizione di assenza di arbitraggio implica che $c_0 = U_0$.

Infatti, se il detentore dell'opzione usa la strategia ottimale di arresto per stabilire l'istante in cui esercitare l'opzione e quindi la esercita al tempo ν_0, allora si ha

$$V_{\nu_0}(\phi) = (1+r)^{\nu_0} \widetilde{M}_{\nu_0} = U_{\nu_0} + (1+r)^{\nu_0} \widetilde{A}_{\nu_0}$$

Il Lemma 6.3.1 qui sotto, implica che $\widetilde{A}_{\nu_0} = 0$. Quindi

$$V_{\nu_0}(\phi) = (1+r)^{\nu_0} \widetilde{M}_{\nu_0} = U_{\nu_0} = Z_{\nu_0}.$$

Dunque in questo caso la strategia ϕ copre esattamente il payoff dell'opzione.

Lemma 6.3.1. *Siano $(X_n)_n$ una supermartingala e $(A_n)_n$ il suo processo crescente associato dato dalla decomposizione di Doob. Siano τ un tempo di arresto e $(X_n^\tau)_n$ la supermartingala ottenuta arrestando $(X_n)_n$ al tempo τ. Allora il processo crescente associato a $(X_n^\tau)_n$ è $(A_n^\tau)_n$, dove $A_n^\tau = A_{n\wedge\tau}$.*

Dimostrazione. Intanto il processo $(A_n^\tau)_n$ è predicibile, poiché si può scrivere

$$A_n^\tau = A_{n-1} 1_{\{\tau \le n-1\}} + A_n 1_{\{\tau > n-1\}}$$

e nel termine a destra figurano tutte quantità $\mathscr{F}_{n-1} - misurabili$. Inoltre, posto $M_n = X_n + A_n$, si ha, grazie al teorema di arresto, che $(M_{n\wedge\tau})_n$ è una martingala. Poiché $A_0^\tau = A_0 = 0$ e

$$M_{n\wedge\tau} = X_{n\wedge\tau} + A_{n\wedge\tau} = X_n^\tau + A_n^\tau,$$

per l'unicità del processo crescente nella decomposizione di Doob, la tesi è dimostrata.

□

Tornando alla questione che ci interessava, il processo crescente $(A_n^{\nu_0})_n$ associato a $(U_n^{\nu_0})_n$ è dato da $A_n^{\nu_0} = A_{n\wedge\nu_0}$. Poiché, d'altra parte, $(U_n^{\nu_0})_n$ è una martingala il suo processo crescente associato è nullo. Dunque $A_{\nu_0} = 0$.

Ricapitolando, il prezzo all'istante 0 è dato dalla formula (6.1) o equivalentemente, in maniera più esplicita, dalla (6.2) con $n = 0$, oppure da

$$U_0 = \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-\nu_0} Z_{\nu_0} \,|\, \mathscr{F}_0\big]$$

che poi è esattamente quanto ci aspettavamo, come descritto nell'introduzione a questo capitolo. Questo risultato si generalizza facilmente per il calcolo del prezzo dell'opzione in ogni istante $n = 0, 1, \ldots, N$. Riassumiamo qui di seguito il risultato generale, senza riportarne la dimostrazione (per la quale, basta semplicemente riadattare quelle appena viste).

Proposizione 6.3.2. *Il prezzo di un'opzione americana al tempo n, $n = 0, 1, \dots, N$ è dato dalla formula (6.2) o equivalentemente da*

$$U_n = \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(\nu_n - n)}\, Z_{\nu_n} \,|\, \mathscr{F}_n\big] = \sup_{\nu \in \mathscr{T}_{n,N}} \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(\nu - n)}\, Z_{\nu} \,|\, \mathscr{F}_n\big],$$

dove $\mathscr{T}_{n,N}$ denota l'insieme dei tempi d'arresto a valori in $\{n, \dots, N\}$ e $\nu_n \in \mathscr{T}_{n,N}$ è definito da

$$\nu_n = \inf\{j \geq n; U_j = Z_j\}.$$

Intuitivamente, un'opzione americana di processo di payoff $(Z_n)_n$ deve costare di più dell'opzione europea di payoff $h = Z_N$, poiché il detentore può esercitare l'opzione in un qualsiasi momento tra l'emissione e la maturità N. Quest'affermazione è precisata dalla seguente

Proposizione 6.3.3. *Siano rispettivamente C_n il prezzo di un'opzione americana di processo di payoff $(Z_n)_{0 \leq n \leq N}$ e c_n il prezzo dell'opzione europea associata, cioè di payoff $h = Z_N$ e maturità N. Allora,*

$$C_n \geq c_n, \quad \textit{per ogni } n = 0, 1, \dots, N.$$

Inoltre, se $c_n \geq Z_n$ per ogni n allora

$$C_n = c_n, \quad \textit{per ogni } n = 0, 1, \dots, N.$$

Dimostrazione. Osserviamo che $C_N = Z_N = c_N$. Siano $(\widetilde{C}_n)_n$ e $(\widetilde{c}_n)_n$ i processi scontati. Ricordando che $(\widetilde{C}_n)_n$ è una P^*-supermartingala e $(\widetilde{c}_n)_n$ una P^*-martingala, si ha

$$\widetilde{C}_n \geq \mathrm{E}^*(\widetilde{C}_N \,|\, \mathscr{F}_n) = \mathrm{E}^*(\widetilde{c}_N \,|\, \mathscr{F}_n) = \widetilde{c}_n$$

per ogni $n = 0, 1, \dots, N$. Dunque, $C_n \geq c_n$.

Supponiamo ora che si abbia $c_n \geq Z_n$. Allora $(\widetilde{c}_n)_n$, che è una martingala, è una P^*-supermartingala che domina il payoff scontato $(\widetilde{Z}_n)_n$. Poiché $(\widetilde{C}_n)_n$ è l'inviluppo di Snell di $(\widetilde{Z}_n)_n$, necessariamente dev'essere $\widetilde{c}_n \geq \widetilde{C}_n$, da cui segue che $\widetilde{c}_n = \widetilde{C}_n$ e quindi $c_n = C_n$, per ogni possibile n.

□

Esempio 6.3.4. *(Prezzi delle call europea ed americana)* Consideriamo una opzione call sul titolo di prezzo $(S^1_n)_n$:

$$Z_n = Z^{\mathrm{call}}_n = (S^1_n - K)_+.$$

Indichiamo con C_n il prezzo della call americana al tempo n e con c_n il prezzo della call europea:

$$c_n = \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(N-n)}\,(S_N - K)_+ \,|\, \mathscr{F}_n\big].$$

Mostriamo che in questo caso si ha

$$c_n = C_n.$$

Per la Proposizione 6.3.2, basta far vedere che $c_n \geq Z_n = (S_n^1 - K)_+$ per ogni $n = 0, 1, \ldots, N$. Ricordiamo che il prezzo scontato $\tilde{c}_n = (1+r)^{-n} c_n$ è una martingala. Dunque, applicando la disuguaglianza di Jensen alla funzione convessa $x \to x^+$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{c}_n &= \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-N}\,(S_N - K)_+ \,|\, \mathscr{F}_n\big] \geq \Big(\mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-N}\,(S_N - K) \,|\, \mathscr{F}_n\big]\Big)_+ \\
&= \Big(\mathrm{E}^*[\widetilde{S}_N \,|\, \mathscr{F}_n] - K\,(1+r)^{-N}\Big)_+ = (\widetilde{S}_n - K\,(1+r)^{-N})_+
\end{aligned}$$

Moltiplicando per $(1+r)^n$, si ottiene

$$c_n \geq (1+r)^n (\widetilde{S}_n - K\,(1+r)^{-N})_+ = (S_n - K\,(1+r)^{-(N-n)})_+ \geq (S_n - K)_+$$

dove abbiamo usato il fatto che $(1+r)^{-(N-n)} \leq 1$. Osserviamo infine che, dalla Proposizione 6.3.2, si ha

$$C_n = \sup_{\nu \in \mathscr{T}_{n,N}} \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(\nu-n)}\, Z_\nu \,|\, \mathscr{F}_n\big] = \mathrm{E}^*\big[(1+r)^{-(N-n)}\, Z_N \,|\, \mathscr{F}_n\big] = c_n$$

dunque il tempo (ottimale) di esercizio è sempre, nel caso della call, $\nu_n = N$: la cosa migliore è esercitare direttamente a maturità.

Vedremo che la situazione pu'o essere diversa per opzioni diverse dalla call e, in particolare, per le put, delle quali studieremo il comportamento qualitativo nell'ambito del modello CRR nel prossimo paragrafo.

6.4 Prezzo e copertura di una put americana nel modello CRR

In questo paragrafo, consideriamo il modello CRR. Ricordiamo che in tal caso il mercato consiste del titolo non rischioso, $S_n^0 = (1+r)^n$, e di un solo titolo rischioso, di prezzo

$$S_n = S_0 \cdot T_1 \cdots T_n.$$

Supponiamo che il mercato sia privo di arbitraggio e completo, cioè $r \in (a, b)$. Sotto la misura equivalente di martingala P^*, le variabili aleatorie $T_1, \ldots, T_n$ sono indipendenti ed identicamente distribuite e tali che

$$\mathrm{P}^*(T_1 = 1 + a) = p = 1 - \mathrm{P}^*(T_1 = 1 + b), \quad \text{dove } p = \frac{r - a}{b - a}.$$

Consideriamo una opzione put americana, di maturità N e prezzo d'esercizio K:

$$Z_n = Z_n^{\mathrm{put}} = (K - S_n)_+.$$

Proposizione 6.4.1. *Il prezzo della put americana al tempo n è dato da*

$$P_n = P_{\mathrm{am}}(n, S_n),$$

dove la funzione $P_{\mathrm{am}}(n,x)$ è definita da

$$\begin{aligned} &P_{\mathrm{am}}(N,x) = (K-x)_+ \quad \textit{e per } n = N-1, N-2, \ldots, 0 \\ &P_{\mathrm{am}}(n,x) = \max\Big((K-x)_+, \tfrac{1}{1+r}\, f(n+1,x)\Big), \end{aligned}$$

essendo

$$f(n+1,x) = p\, P_{\mathrm{am}}(n+1, x(1+a)) + (1-p)\, P_{\mathrm{am}}(n+1, x(1+b)).$$

Dimostrazione. Da (6.2), si ha

$$P_N = Z_N = (K - S_N)_+ = P_{\mathrm{am}}(N, S_N).$$

Al tempo $n = N-1$, sempre da (6.2) si ha

$$P_{N-1} = \max\Big((K-S_{N-1})_+, \frac{1}{1+r}\,\mathrm{E}^*(P_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1})\Big).$$

Osserviamo che

$$\mathrm{E}^*(P_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1}) = \mathrm{E}^*(P_{\mathrm{am}}(N, S_N) \,|\, \mathscr{F}_{N-1}) = \mathrm{E}^*(P_{\mathrm{am}}(N, S_{N-1} \cdot T_N) \,|\, \mathscr{F}_{N-1}).$$

Ora, poiché S_{N-1} è $\mathscr{F}_{N-1}$-misurabile e T_N è indipendente da $\mathscr{F}_{N-1}$, l'ultima media condizionata vale

$$\mathrm{E}^*(P_{\mathrm{am}}(N, S_{N-1} \cdot T_N) \,|\, \mathscr{F}_{N-1}) = \mathrm{E}^*(P_{\mathrm{am}}(N, x \cdot T_N))\Big|_{x = S_{N-1}}.$$

Posto allora

$$f(N,x) = \mathrm{E}^*(P_{\mathrm{am}}(N, x \cdot T_N)),$$

segue che

$$\mathrm{E}^*(P_N \,|\, \mathscr{F}_{N-1}) = f(N, S_{N-1}),$$

da cui si ottiene $P_{N-1} = P_{\mathrm{am}}(N-1, S_{N-1})$, dove

$$P_{\mathrm{am}}(N-1, x) = \max\Big((K-x)_+, \frac{1}{1+r}\, f(N,x)\Big).$$

Ora,

$$f(N,x) = \mathrm{E}^*(P_{\mathrm{am}}(N, x \cdot T_N)) = P_{\mathrm{am}}(N, x\cdot(1+a))\, p + P_{\mathrm{am}}(N, x\cdot(1+b))\,(1-p),$$

dunque la tesi è vera per $n = N-1$. Procedendo analogamente per $n = N-2, \ldots, 0$, si ottiene il risultato finale

$\square$

Osservazione 6.4.2. La funzione $P_{\text{am}}(0,x)$ introdotta nella Proposizione 6.4.1 si può anche rappresentare nel modo seguente:

$$\begin{aligned} &P_{\text{am}}(0,x) = \sup_{\nu\in\mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}(K - x\,V_\nu)_+\Big) \\ &\text{dove} \quad V_0 = 1 \quad \text{e} \quad V_n = T_1\cdots T_n, \quad n = 1,\dots,N. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Infatti, dalla Proposizione 6.3.2 si ha

$$\begin{aligned} P_{\text{am}}(0,S_0) = P_0 &= \sup_{\nu\in\mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}(K - S_\nu)_+\Big) \\ &= \sup_{\nu\in\mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}(K - S_0\,V_\nu)_+\Big) \end{aligned}$$

per ogni scelta di S_0.

La rappresentazione (6.5) consente di effettuare uno studio qualitativo del prezzo dell'opzione all'istante iniziale. Queste informazioni, riassunte nella Proposizione 6.4.3, consentono di tracciare il grafico della funzione $x \mapsto P_{\text{am}}(0,x)$, come riportato in Figura 6.1.

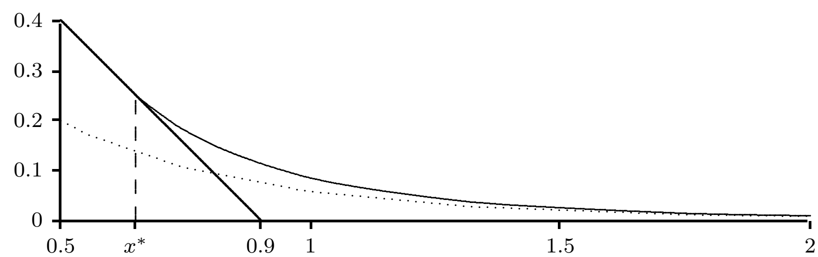

Figura 6.1 Andamento del prezzo al tempo 0 di una opzione put americana, al variare del prezzo del titolo di base (in ascisse). I valori sono $a = -.1$, $b = .2$, $r = .02$, $K = 0.9$, $N = 20$. Qui il valore x^* è dell'ordine di 0.65. Il prezzo si annulla per $x > K(1+a)^{-N} = 7.4$. A puntini è disegnato l'andamento delle corrispondente opzione europea.

Proposizione 6.4.3. *1) La funzione $x \mapsto P_{\text{am}}(0,x)$ è continua, non crescente e convessa.*

2) Supponiamo $a < 0$. Esiste un punto $x^* \in [0,K)$ tale che

1. *per $x \in [0,x^*]$, $P_{\text{am}}(0,x) = (K-x)_+$;*
2. *per $x \in (x^*, K/(1+a)^N)$, $P_{\text{am}}(0,x) > (K-x)_+$;*
3. *per $x \geq K/(1+a)^N$, $P_{\text{am}}(0,x) = 0$.*

Dimostrazione. *1.* Dalla Proposizione 6.4.1, segue immediatamente che $x \mapsto P_{\text{am}}(N,x) = (K-x)_+$ è continua. Dunque, anche $x \mapsto f(N,x) = pP_{\text{am}}(N,x(1+a)) + (1-p)P_{\text{am}}(N,x(1+b))$ è continua e quindi anche $x \mapsto P_{\text{am}}(N-1,x) = \max((K-x)_+, (1+r)^{-1}f(N,x))$ lo è (essendo il max tra funzioni continue). Procedendo analogamente, si prova che $x \mapsto P_{\mathrm{am}}(n, x)$ è continua per ogni $n = N-2, \dots, 1, 0$.

Le altre due proprietà seguono direttamente dalla rappresentazione (6.5) e dal fatto che $x \mapsto (K - x\,V_\nu)_+$ è non crescente e convessa. Ad esempio, per quanto riguarda la convessità, preso $\alpha \in [0,1]$ si ha:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}(K - (\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)\,V_\nu)_+\Big) \\
&\le \alpha \mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}(K - x_1\,V_\nu)_+\Big) + (1-\alpha)\mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}(K - x_2\,V_\nu)_+\Big)
\end{aligned}
$$

e passando al sup per $\nu \in \mathscr{T}_{0,N}$ si ottiene la tesi.

2. Poniamo $g(x) = P_{\mathrm{am}}(0,x) - (K-x)_+$. Poiché $P_{\mathrm{am}}(0,x) \ge (K-x)_+$, $g(x) \ge 0$. In particolare $g(0) = 0$, perché, usando (6.5),

$$
0 \le g(0) = \sup_{\nu \in \mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*\Big(\underbrace{(1+r)^{-\nu}}_{\le 1,\, \forall \nu \ge 0} K\Big) - K \le K - K = 0.
$$

Invece, $g(K) > 0$. Infatti,

$$
g(K) = K \sup_{\nu \in \mathscr{T}_{0,N}} \mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-\nu}\,(1 - V_\nu)_+\Big) \ge K\,\mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-1}\,(1-V_1)_+\Big)
$$

(nel secondo passaggio si è scelto $\nu = 1$). Ora, $V_1 = T_1$ e

$$
\mathrm{E}^*\Big((1+r)^{-1}\,(1-V_1)_+\Big) = (1+r)^{-1}\Big((-a)_+ p + (-b)_+(1-p)\Big) = (1+r)^{-1} a p > 0
$$

quindi $g(K) > 0$.

Dividiamo ora lo studio della funzione g in due casi: (i) $x \in [0,K]$ e (ii) $x > K$.

(i) Se $x \in [0,K]$, allora $g(x) = P_{\mathrm{am}}(0,x) - (K-x)$ è una funzione continua e convessa (essendo somma di una funzione convessa continua e di una funzione lineare). Poniamo allora

$$
x^* = \inf\{x > 0 \,:\, g(x) > 0\}.
$$

Ovviamente, $x^* < K$ (perché $g(K) > 0$) ed inoltre si ha: $g(x) = 0$ per ogni $x \in [0, x^*]$ e $g(x) > 0$ per ogni $x \in (x^*, K)$. Infatti, se per assurdo esistesse un $x \le x^*$ tale che $g(x) > 0$ allora, dalla definizione di x^*, dovrebbe anche essere $x \ge x^*$, il che non è vero a meno che non si sia scelto $x = x^*$. Osservando però che, dal teorema della permanenza del segno (ricordiamo che g è continua), dev'essere $g(x^*) = 0$, segue allora che in effetti $g(x) = 0$ per ogni $x \in [0, x^*]$. Prendiamo ora un $x \in (x^*, K)$ e mostriamo che $g(x) > 0$. Osserviamo intanto che, sempre dalla definizione di x^*, deve esistere una successione $\{x_n^*\}_n$ tale che $x_n^* \downarrow x^*$ e $g(x_n^*) > 0$. Ora, se $x > x^*$ allora

$x > x_n^*$ per qualche n, dunque $x_n^* = tx + (1-t)x^*$ per qualche $t \in (0,1)$. Usando la convessità di g, si ha

$$0 < g(x_n^*) = g(tx + (1-t)x^*) \leq tg(x) + (1-t)g(x^*) = tg(x),$$

il che prova che $g(x) > 0$ per ogni $x \in (x^*, K]$.

(ii) Se invece $x > K$, allora $g(x) = P_{\text{am}}(0,x)$ è una funzione non negativa e, dal punto 1., anche non crescente. Poiché $g(K) > 0$, nell'intervallo in questione g è positiva, tende a decrescere e una volta raggiunto lo zero, si mantiene indenticamente nulla.

Ricapitolando, quanto visto in (i) e (ii) prova l'asserzione (a). Per verificare (b) e (c), basta far vedere che $\bar{x} = K/(1+a)^N$ è il più piccolo punto $> K$ in cui $x \mapsto P_{\text{am}}(0,x)$ si annulla. Cerchiamo allora $\bar{x}$ tale che $P_{\text{am}}(0,\bar{x}) = 0$. Dalla (6.5) dev'essere

$$(K - \bar{x}\, V_\nu)_+ = 0 \quad \text{per ogni } \nu \in \mathscr{T}_{0,N},$$

dunque $\bar{x} \geq K/V_\nu$ per ogni $\nu \in \mathscr{T}_{0,N}$. Allora

$$\bar{x} = \max_{\Omega} \max_{\nu \in \mathscr{T}_{0,N}} \frac{K}{V_\nu} = \frac{K}{\min_\Omega \min_{\nu \in \mathscr{T}_{0,N}} V_\nu}.$$

Ora, poiché $V_\nu = T_1 \cdots T_\nu$ e $T_n \in \{1+a, 1+b\}$, allora

$$\min_{\Omega} \min_{\nu \in \mathscr{T}_{0,N}} V_\nu = \min_{n \in \{0,\dots,N\}} (1+a)^n = (1+a)^N$$

perché, ricordiamo $0 < 1+a < 1$. Dunque $\bar{x} = K/(1+a)^N$ e la tesi è dimostrata.

□

Bibliografia

[1] P. Baldi (2000) *Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni.* Pitagora Editrice.

[2] P. Baldi, L. Mazliak, P. Priouret (2002) *Markov chains, solved exercises with elements of the theory* . Chapman-Hall CRC.

[3] P. Billingsley (1995) *Probability and measure. Third edition.* . John Wiley & Sons, Inc., New York.

[4] D. Lamberton, B. Lapeyre (2000) *Introduction to Stochastic calculus in finance* . Springer.

[5] D. Williams (1991) *Probability with martingales.*. Cambridge University Press.