

**CAMPIONAMENTO DI SEGNALI, ANALISI SPETTRALE,
RICOSTRUZIONE ED ALIASING**

CAMPIONAMENTO

La teoria del campionamento descrive le relazioni tra un segnale continuo e i suoi campioni, cioè i suoi valori ad intervalli fissi della variabile. Consideriamo segnali di una sola variabile, a valori reali; se il segnale è un'immagine, questo vuol dire che ne considereremo una riga alla volta. Chiamiamo variabile spaziale la variabile del segnale: nel caso si tratti di una riga di pixel di un'immagine, la variabile spaziale descrive la posizione del centro di ciascun pixel nella riga (ed il valore del segnale consiste nell'intensità di illuminazione del pixel); se invece si tratta di un segnale acustico, la variabile spaziale è in realtà il tempo (ed il valore del segnale è l'intensità sonora al variare del tempo). Finora abbiamo considerato segnali nel dominio dello spazio; la loro trasformata di Fourier ci permette di rappresentarli nel dominio della frequenza: in tal caso il segnale viene scomposto come somma od integrale di onde sinusoidali.

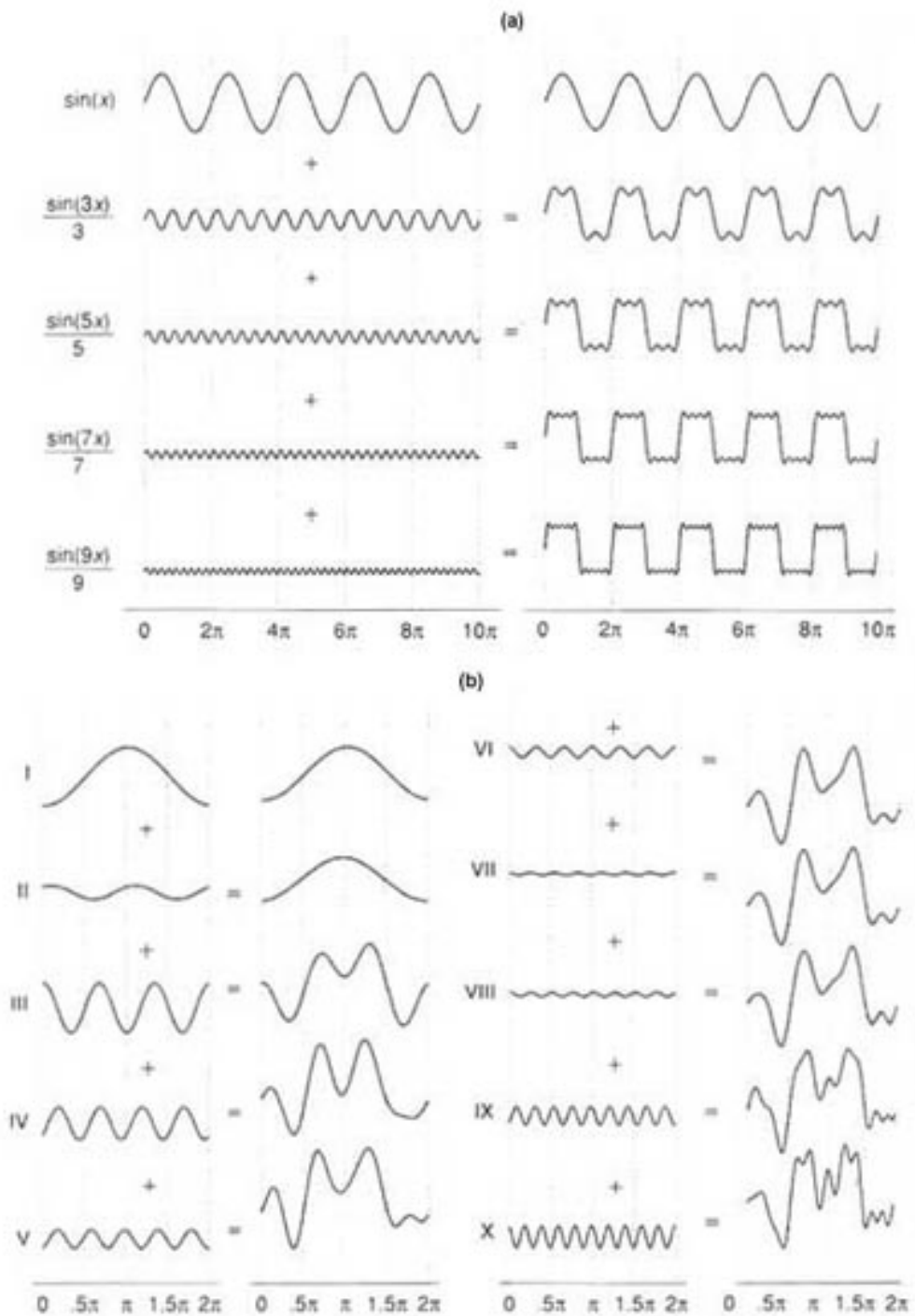


Fig.1. Segnali periodici e loro approssimanti di Fourier

I segnali periodici, come quelli mostrati in Fig.1, possono essere rappresentati come la somma di funzioni sinusoidali sfasate le cui frequenze sono multipli interi (armoniche) della frequenza fondamentale del segnale (che è il reciproco del

periodo). Nel caso di segnali non periodici, la trasformata di Fourier si applica a segnali definiti su tutta la retta reale, quindi di durata, o lunghezza, infinita. In realtà i segnali che considereremo hanno lunghezza o durata finita: ad esempio, un'immagine consiste di righe di un numero finito di pixel. Ma possiamo ugualmente applicare la trasformata di Fourier prolungando il segnale al di fuori del suo intervallo di definizione, ponendolo uguale a zero al di fuori. Allora la trasformata di Fourier ci dà l'ampiezza di ciascuna onda sinusoidale che contribuisce alla scomposizione del segnale. Talvolta la trasformata di Fourier di un segnale si chiama il suo *spettro di Fourier*, o spettro di frequenze. Nel caso di un segnale non periodico, lo spettro di frequenze non consiste di multipli interi di qualche frequenza fondamentale: può contenere qualsiasi frequenza. La ricostruzione del segnale originale a partire dal suo spettro di Fourier è quindi ottenuta non dalla somma di funzioni sinusoidali, bensì da un integrale, che si chiama trasformata inversa di Fourier.

Alternativamente, un segnale di lunghezza finita L può essere prolungato a tutta la retta per periodicità. Supponiamo ad esempio che il segnale abbia supporto in un intervallo di lunghezza L , e si annulli ai bordi dell'intervallo. Dopo la periodizzazione, il segnale originale diventa un periodo del segnale prolungato. In tal caso il suo spettro di Fourier è discreto: le frequenze che vi compaiono sono i multipli di $1/L$. Però questo spettro discreto consiste nella restrizione a questa successione discreta di frequenze della trasformata di Fourier del segnale originale (inteso come prolungato a zero a tutta la retta reale). Quindi questo punto di vista discreto alternativo è una interpolazione di quello continuo: i valori dello spettro discretizzato giacciono sul grafico della trasformata di Fourier continua (tranne alcune discrepanze ai bordi del periodo dove il segnale periodizzato di solito ha un salto), e, se si prende il periodo L via via più grande, questi valori approssimano sempre meglio quelli dello spettro continuo. *Per maggiori dettagli si veda il [corso di Analisi Armonica](#), capitoli 5 e 11, ed i cenni seguenti.*

Qui ci limitiamo a rammentare alcune definizioni e le loro interrelazioni, cominciando con la definizione di trasformata di Fourier di un segnale f , che indichiamo con F :

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(2\pi ux) - i \sin(2\pi ux))dx$$

ovvero, in termini di esponenziali complessi,

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi iux} dx$$

dove i è l'unità immaginaria.

Anche se stiamo limitando l'attenzione a segnali a valori reali, per ogni frequenza u il valore $F(u)$ è un numero complesso, che possiamo scrivere come $R(u) + i I(u)$

dove $R(u)$ e $I(u)$ sono rispettivamente la sua parte reale e la sua parte immaginaria. L'ampiezza di $F(u)$ è data da

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

e lo sfasamento (anche conosciuto come angolo di fase) è dato da

$$\phi(u) = \arctg\left(\left|\frac{I(u)}{R(u)}\right|\right)$$

Rammentiamo anche la definizione di trasformata inversa di Fourier, che ci permette di trasformare una funzione integrabile $F(u)$ dal dominio della frequenza al dominio dello spazio, nel modo seguente:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)(\cos(2\pi ux) + i \sin(2\pi ux))dx$$

ovvero

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u)e^{2\pi iux} dx$$

Spesso, quando si disegna il grafico di una trasformata di Fourier, si disegna solo il grafico della sua ampiezza rispetto alla frequenza, ignorando l'angolo di fase (perché altrimenti il grafico dovrebbe essere disegnato come una curva in tre dimensioni, una per la variabile reale spaziale e due per rappresentare i valori complessi della trasformata). La Fig.2 mostra diversi segnali in entrambi i domini.

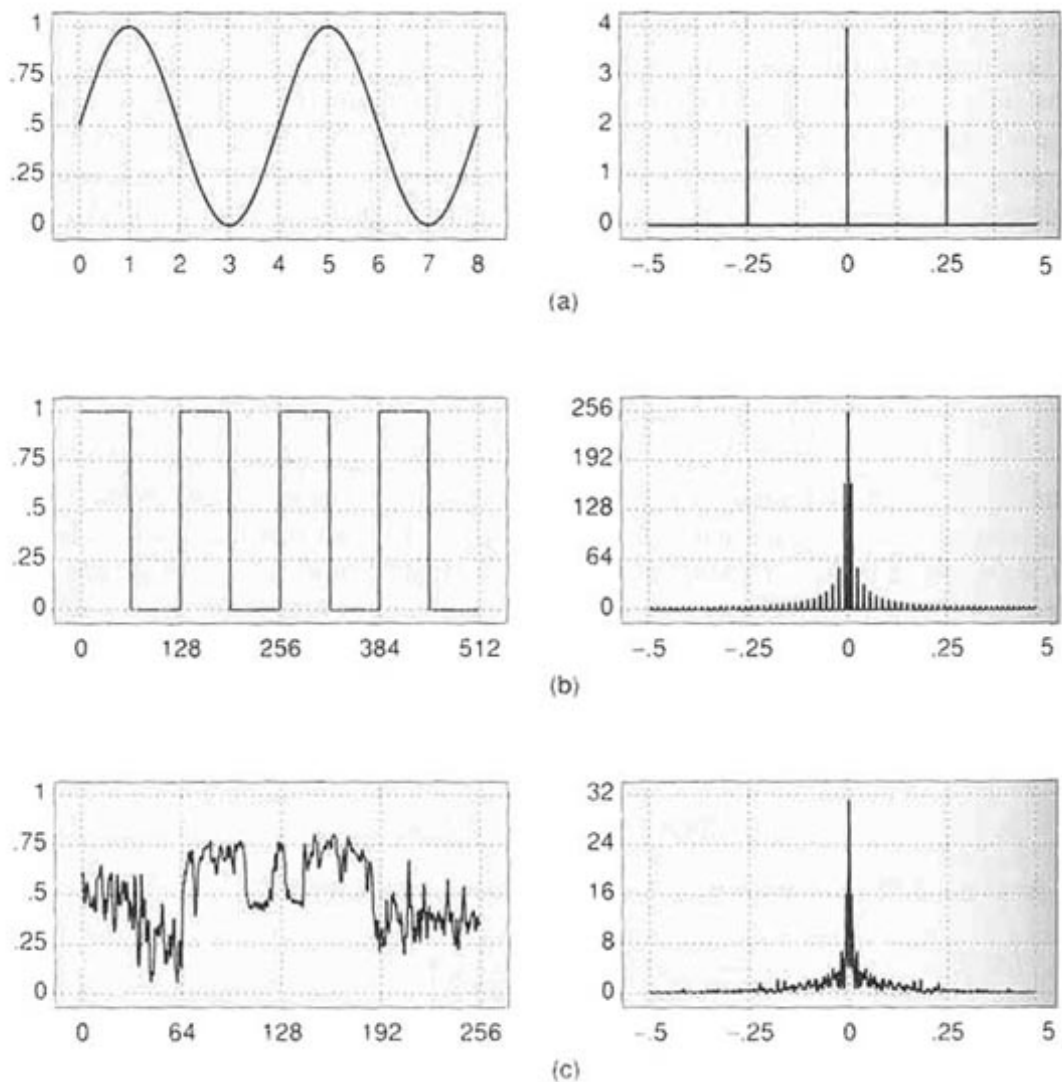


Fig.2. Esempi di segnali e loro trasformate di Fourier

In questi grafici, come già osservato prima, i numeri sull'asse delle ascisse rappresentano la posizione dei centri dei pixel; nel dominio della frequenza invece i numeri sull'asse delle ascisse misurano i cicli per pixel (o meglio, i cicli per un intervallo spaziale pari alla distanza fra i centri di due pixel consecutivi). La componente a frequenza $u=0$ rappresenta la componente dello spettro a frequenza continua (cioè l'integrale del segnale originale, a meno di normalizzazione).

Poiché i pixel sono discreti, è naturale considerare la variante alternativa "discreta" dello spettro di Fourier dei segnali (quella esposta più sopra quando si è parlato di periodizzazione). Esiste una versione discreta della definizione di trasformata di Fourier che è adatta per questo scopo, la trasformata discreta di

Fourier, che introduciamo alla pagina seguente (*per maggiori dettagli si veda il [corso di Analisi Armonica, capitolo 11](#)*).

La trasformata discreta di Fourier è definita da

$$F(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \left(\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - i \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \exp\left(-\frac{2\pi ink}{N}\right),$$

$$\text{con } 0 \leq n \leq N-1,$$

e la trasformata discreta di Fourier inversa è

$$f(k) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) \left(\cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \right) = \sum_{n=0}^{N-1} F(n) \exp\left(\frac{2\pi ink}{N}\right),$$

$$\text{con } 0 \leq k \leq N-1$$

In queste formule, il segnale viene considerato come un segnale periodico nel periodo $[0, N]$, campionato a passo 1: a meno di cambiamento di scala, lo si può quindi immaginare come un segnale periodico di periodo 1 campionato a passi di $1/N$, o più in generale di periodo L campionato a passi di L/N . E' facile mostrare che, se scegliamo un passo di campionamento sufficientemente piccolo, cioè N sufficientemente grande, si ottiene una buona approssimazione del comportamento della trasformata continua di Fourier per la maggior parte dei segnali.

Con la trasformata discreta di Fourier si ottiene sempre uno spettro finito. Equivalentemente, grazie alla periodizzazione del segnale f , si possono definire la trasformata discreta di Fourier e la sua inversa tramite sommatorie da $-N/2$ a $N/2$ invece che da 0 a N . Questo accorgimento ci permette di evidenziare con facilità il fatto seguente: se il segnale (che, rammentiamo, si suppone a valori reali) è pari, allora la parte immaginaria della sua trasformata discreta di Fourier è ovunque nulla, perché il contributo di ogni termine sinusoidale per ogni valore della variabile x è cancellato dal suo contributo uguale e di segno opposto per il valore opposto della variabile. Pertanto tutti i termini in seno scompaiono, e rimangono solo quelli in coseno: così la trasformata risulta essere reale e pari. In questi casi, quando disegniamo il grafico della trasformata, non abbiamo bisogno di limitarci a disegnare del suo modulo $|F(u)|$. Quindi potremo avere grafici che stanno al di sotto dell'asse delle ascisse, in corrispondenza a valori negativi di $F(u)$.

Supponiamo di considerare segnali il cui spettro di Fourier sia limitato in banda, cioè nullo al di fuori di un intervallo di frequenze. Poiché consideriamo segnali

reali, la trasformata di Fourier ha parte reale pari e parte immaginaria dispari, come segue immediatamente dalle formule viste sopra (per maggiori dettagli si veda il [corso di Analisi Armonica, capitolo 5, sezione 2](#)). Supponiamo allora che il segnale abbia spettro di Fourier nullo al di fuori di un intervallo di frequenze $[-\omega_c, \omega_c]$.

Scegliamo la frequenza ω_c come la più piccola possibile con questa proprietà. La parità ci consente di limitare l'attenzione alle frequenze positive, cioè all'intervallo $[0, \omega_c]$, cosa che faremo sistematicamente in tutti i grafici. Diremo allora che ω_c è la frequenza di taglio (o di Nyquist) del segnale, o alternativamente che esso ha banda limitata da ω_c .

Consideriamo un ciclo di un segnale la cui componente a frequenza più alta è alla frequenza $2\pi\omega_c$. Questa componente è una funzione sinusoidale con ω_c punti di massimo e ω_c punti di minimo in ciascun intervallo di lunghezza 2π , come mostrato in Fig.3.

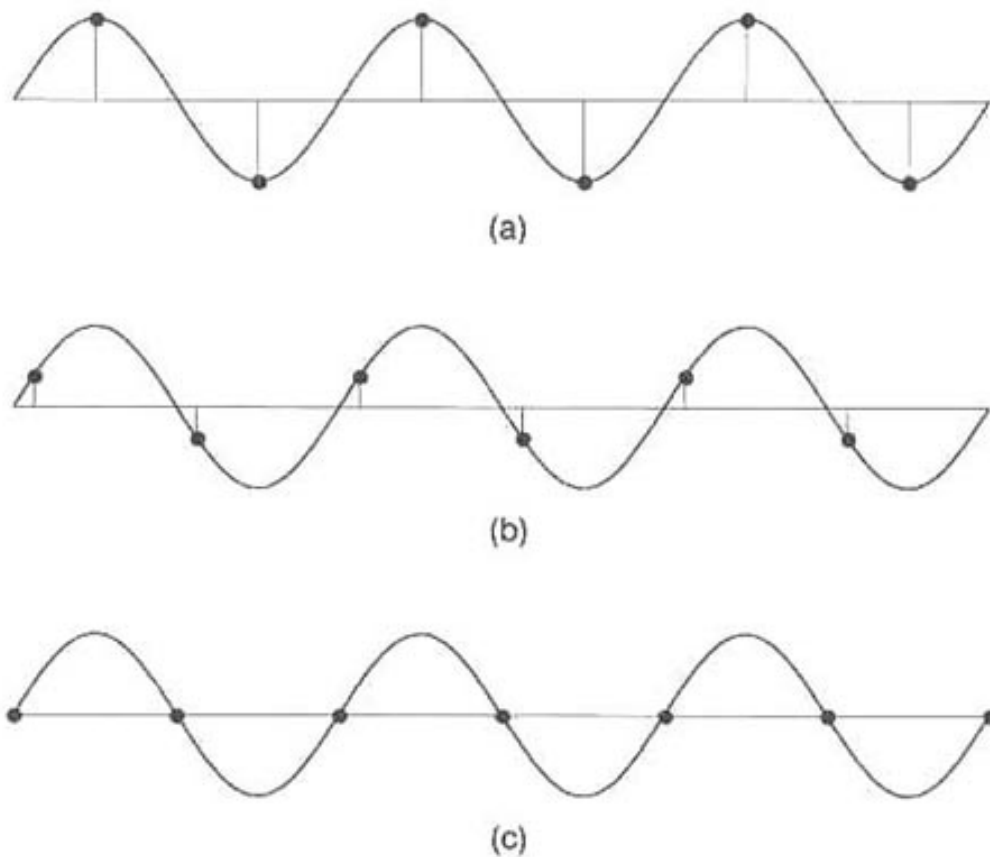


Fig.3. Una funzione sinusoidale può avere campioni nulli alla frequenza di Nyquist oppure oscillanti, a seconda della sua fase

Quindi è intuitivo che siano necessari almeno $2\omega_c$ campioni in ogni intervallo di lunghezza 2π per ottenere una buona approssimazione della forma della componente della frequenza più alta del segnale. Si noti però che $2\omega_c$ campioni bastano a dare una idea precisa della forma di questa componente solo se i campioni sono presi esattamente ai punti delle ascisse corrispondenti ai punti di massimo e di minimo (Fig.3(a)). Se essi sono presi altrove allora l'ampiezza non viene rappresentata correttamente (Fig.3(b)) e può addirittura essere identicamente zero se i campioni sono presi nei punti intermedi fra i massimi ed i minimi (Fig.3(c)). Se campioniamo sotto la frequenza di Nyquist, allora i valori campionati che otteniamo per la componente di frequenza massima sono gli stessi che avremmo ottenuto campionando il segnale ad una frequenza più bassa, come mostrato in Fig.4. (Per maggiori dettagli si veda il [corso di Analisi Armonica, capitolo 10, sezione 5.](#))

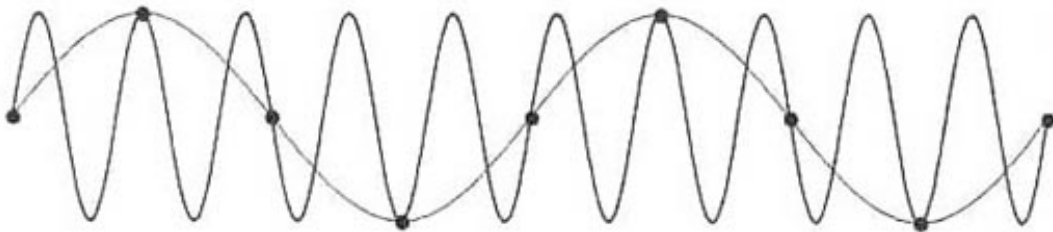


Fig.4. Una funzione sinusoidale campionata ad una frequenza inferiore a quella di Nyquist ha gli stessi campioni di una senoide a frequenza inferiore (*aliasing*)

Questo esempio mostra che alte frequenze nel segnale originale viste ad un passo di campionamento insufficiente si presentano come basse frequenze nel segnale ricostruito: tale fenomeno è conosciuto come [aliasing](#).

Se un segnale, ad esempio un'immagine, viene campionato ad una frequenza insufficiente, allora, dopo che si ricostruisce il segnale a partire da tali campioni, componenti di alta frequenza del segnale originale appaiono alla stregua di componenti di bassa frequenza nel segnale ricostruito a partire da questi campioni inadeguati. Questo è il tipico esempio di aliasing.

Un esempio di aliasing per un'immagine è mostrato in Fig.5.

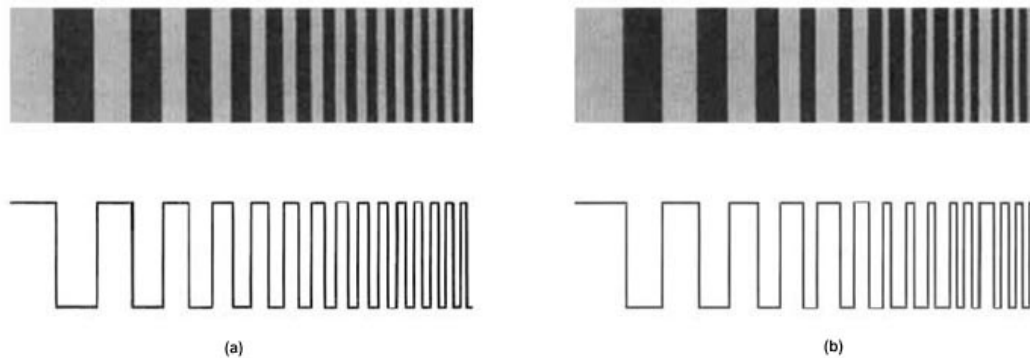


Fig.5. Aliasing nel campionamento di bande di grigio di ampiezza via via minore

La Fig.5(a) è l'immagine originale accompagnata dal grafico della sua luminosità lungo una retta orizzontale: la luminosità ha salti di ampiezza costante ma di lunghezza via via più piccola: in altre parole, la frequenza spaziale aumenta da sinistra a destra. La Fig.5(b) è ottenuta scegliendo un pixel ogni otto e ripetendo otto volte il valore di intensità su quel pixel: questo corrisponde ad un campionamento a frequenza otto volte minore. Gli effetti di aliasing sono evidenti: le bande non diventano via via più strette con regolarità, il loro spessore fluttua.

La forma di un segnale è determinata dal suo spettro di frequenza. Quanto più l'andamento del segnale presenta punti angolosi ed oscillazioni brusche, tanto più elevate sono le componenti ad alta frequenza; i segnali con discontinuità hanno uno spettro in frequenza a supporto infinito. La Fig.6 rappresenta il campionamento di una scena consistente di triangoli, con punti di campionamento su un reticolo.

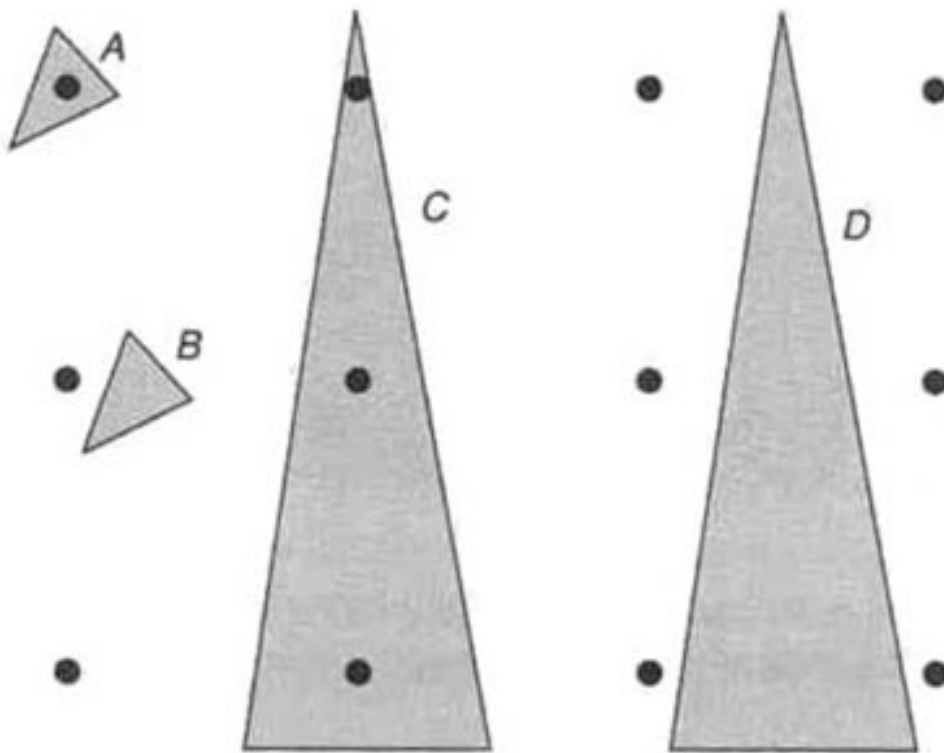


Fig.6. Intere figure possono essere omesse in un campionamento puntuale a passo inadeguato

La scena consiste di triangoli scuri su sfondo bianco. Al bordo di questi triangoli l'intensità luminosa ha un salto, quindi lo spettro di frequenza non è a banda limitata, e la nostra [presentazione euristica](#) del teorema del campionamento rivela che nessun passo di campionamento è sufficientemente piccolo da permettere una ricostruzione esatta di questa immagine. Ciò che si ottiene nella ricostruzione è una scalettatura a passo uguale a quello del campionamento, perché un punto di campionamento o è dentro o è fuori di un triangolo, ma non può rappresentare un valore intermedio e graduale di appartenenza al triangolo.

La scalettatura è una delle due manifestazioni tipiche di fenomeni analoghi all'aliasing nella grafica al computer. L'altra manifestazione tipica si ha nel caso di tessiture ed oggetti con una naturale periodicità quando sono visti in prospettiva: ad esempio, un pavimento con piastrelle regolari. Quando le piastrelle sono proiettate sul piano prospettico, diventano via via più piccole all'aumentare della loro distanza dall'osservatore. Un campionamento a passo regolare quindi salta alternativamente intere righe o bande di piastrelle, esattamente come avviene in Fig.5(b). La conseguenza è una deformazione periodica e molto evidente del pattern della piastrellatura o tessitura, con effetti qualitativi più pesanti che non siano quelli della scalettatura.

FILTRAGGIO

Sulla scia delle tecniche legate al campionamento, ora mostriamo come creare un nuovo segnale filtrato rimuovendo le alte frequenze che contengono il rumore, cioè disturbo. Tronchiamo lo spettro di frequenza del segnale al di sopra di una data frequenza di taglio (chiameremo questa operazione prefiltraggio). Il nuovo segnale, essendo a banda limitata, è ricostruibile senza perdite a partire da un numero finito di campioni, per il [teorema del campionamento](#) (per la cui dimostrazione si veda il [corso di Analisi Armonica, capitolo 7, sezione 4, e capitolo 10, sezione 1](#)), in base al quale la frequenza di campionamento necessaria per ricostruire il segnale senza perdite deve essere almeno il doppio della frequenza di taglio. **Cautela:** *ciò che viene ricostruito senza perdite non è il segnale originale, ma quello prefiltrato a banda di frequenza limitata.*

Perciò, quanto più bassa è la frequenza di taglio ω_c , tanto minore è la frequenza di campionamento necessaria per ricostruire esattamente il segnale filtrato e quindi il numero di campioni utilizzati, ma meno il segnale assomiglia all'originale (è più addolcito, con picchi e spigoli più smussati).

Tagliare la banda spettrale del segnale significa applicare un filtro passa basso (a frequenza ω_c). Le alte frequenze vengono annullate dal filtro, le basse frequenze restano. Il filtro passa basso causa sfocatura (*blurring*) nel dominio dello spazio, poiché elimina i dettagli fini, che sono immagazzinati nelle componenti di alta frequenza (Fig.7).

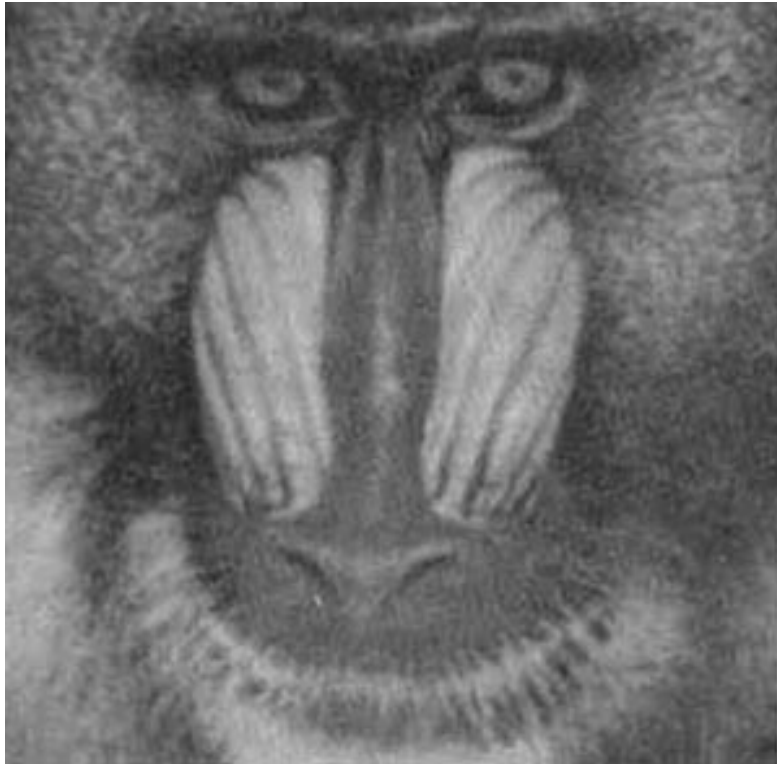


Fig.7. Immagine filtrata con un filtro passa-basso nel dominio della frequenza: il contrasto diminuisce

Ogni filtro, per definizione, agisce sulla trasformata di Fourier del segnale come la moltiplicazione puntuale per una funzione della variabile frequenza, che chiameremo la funzione filtro. Nel dominio dello spazio, la moltiplicazione per la funzione filtro diventa la convoluzione per la sua antitrasformata di Fourier. Per maggiori dettagli si veda il [corso di Analisi Armonica](#), capitolo 5, sezione 3.

Consideriamo allora il caso del filtro passa basso a frequenza di taglio ω_c . Nel dominio della frequenza, la sua funzione filtro vale zero al di fuori dell'intervallo $[-\omega_c, \omega_c]$, e vale 1 all'interno di questo intervallo, perché all'interno il filtro non deve cambiare niente, e quindi deve moltiplicare per 1. Si dice che il suo grafico è un'onda quadra. Nel dominio dello spazio questo filtro passa basso agisce come l'operatore di convoluzione con un peso oscillante di tipo *sinc*, e più precisamente come $\text{sinc}(2\omega_c x)$, dove $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/\pi x$.

La funzione *sinc* ha supporto illimitato, ma noi abbiamo bisogno di limitare l'attenzione ad un numero finito di campioni, affinché il procedimento numerico abbia termine (ovviamente il tempo di elaborazione cresce col numero di campioni utilizzati). Per questo dobbiamo troncare il filtro *sinc*. Purtroppo, il troncamento di una funzione genera discontinuità a salto, che, in virtù del

fenomeno di Gibbs ([corso di Analisi Armonica, capitolo 3, sezione 18](#)), l'approssimazione di Fourier trasforma in fluttuazioni oscillatorie spurie in prossimità del salto, cioè della frequenza di taglio (ringing). Per evitare questi effetti si modifica il tipo di troncamento del filtro, in modo che **la funzione filtro non abbia salti**. Ad esempio si può far uso di una funzione filtro col grafico triangolare anziché rettangolare (una tale funzione è la convoluzione di un'onda quadra con sé stessa, quindi la sua antitrasformata di Fourier è sinc^2). Oppure si può utilizzare una funzione filtro *Gaussiana* ([corso di Analisi Armonica, capitolo 5, sezione 4](#)), che non è a supporto compatto, ma decresce così rapidamente che agli effetti numerici si può considerare tale. Questi tipi di filtraggio portano ad approssimazioni numeriche accettabili sia nell'approssimazione del segnale, sia nel tempo di calcolo.

RICOSTRUZIONE ED ALIASING

Supponiamo che il segnale f abbia spettro in frequenza (cioè trasformata di Fourier) a banda limitata (cioè che lo spettro sia nullo sopra una frequenza che indicheremo con ω_c), e campioniamo il segnale f a frequenza $\omega_s = 2 \omega_c$. Per comodità, anche se non è necessario, supponiamo che il segnale f sia a valori reali (se così non è possiamo applicare quanto segue separatamente alla parte reale ed a quella immaginaria di f). Allora la trasformata di Fourier di f (che è a valori complessi) ha parte reale pari, parte immaginaria dispari, ed entrambe sono nulle al di fuori dell'intervallo $[-\omega_c, \omega_c]$, che ha lunghezza $2 \omega_c = \omega_s$. Chiamiamo ϕ il segnale campionato. Dalla teoria del campionamento segue che lo spettro in frequenza di ϕ si ottiene periodicizzando quello di f , cioè replicandolo a passo ω_s .

Sia x un valore fissato della variabile spaziale (in altre parole, x rappresenta un pixel se il segnale è l'intensità di colore in una riga di pixel di un'immagine fotografica, oppure un tempo se il segnale è un segnale musicale). Denotiamo con δ_x la distribuzione impulsiva (*delta di Dirac*) centrata al punto x . Rammentiamo che se si moltiplica la distribuzione δ_x per la funzione f , il risultato è il multiplo di δ_x dato dalla moltiplicazione per il numero $f(x)$: cioè $f \delta_x = f(x) \delta_x$ (per maggiori dettagli si veda il [corso di Analisi Armonica, capitolo 8](#)). Da questo fatto segue immediatamente che campionare un segnale equivale a moltiplicarlo nel dominio dello spazio con una distribuzione *treno di impulsi (comb)*: la distribuzione treno di impulsi è la serie delle delta di Dirac centrate ai punti del campionamento. In altre parole, questa distribuzione differisce dalla funzione zero solo ai punti del campionamento, e la si può approssimare con una serie di funzioni impulsive -in inglese *spike*- (cioè di funzioni non negative, di integrale 1 e col grafico "alto e stretto"). I termini della serie approssimante sono traslati equispaziati (di passo dato dal passo di campionamento $1/(2\omega_c)$) di una funzione spike h^τ , maggiore o uguale a zero, infinitamente derivabile, di integrale 1 e tale che, per ogni intervallo arbitrariamente piccolo centrato ad uno dei punti del campionamento e per ogni ε positivo arbitrario, esiste un intervallo di ampiezza τ tale che l'integrale della corrispondente funzione spike h^τ vale su quell'intervallo più di $1 - \varepsilon$ purché τ sia sufficientemente piccolo. La serie approssima il treno di impulsi al tendere di τ a 0.

Rammentiamo qui alcuni risultati dimostrati nel [corso di Analisi Armonica](#). La trasformata discreta di Fourier di una distribuzione treno di impulsi con i "denti"

(cioé le delta di Dirac che la compongono) spazati di passo τ è un altro treno di impulsi con i denti spazati di $1/\tau$ (Fig. 8(a)).

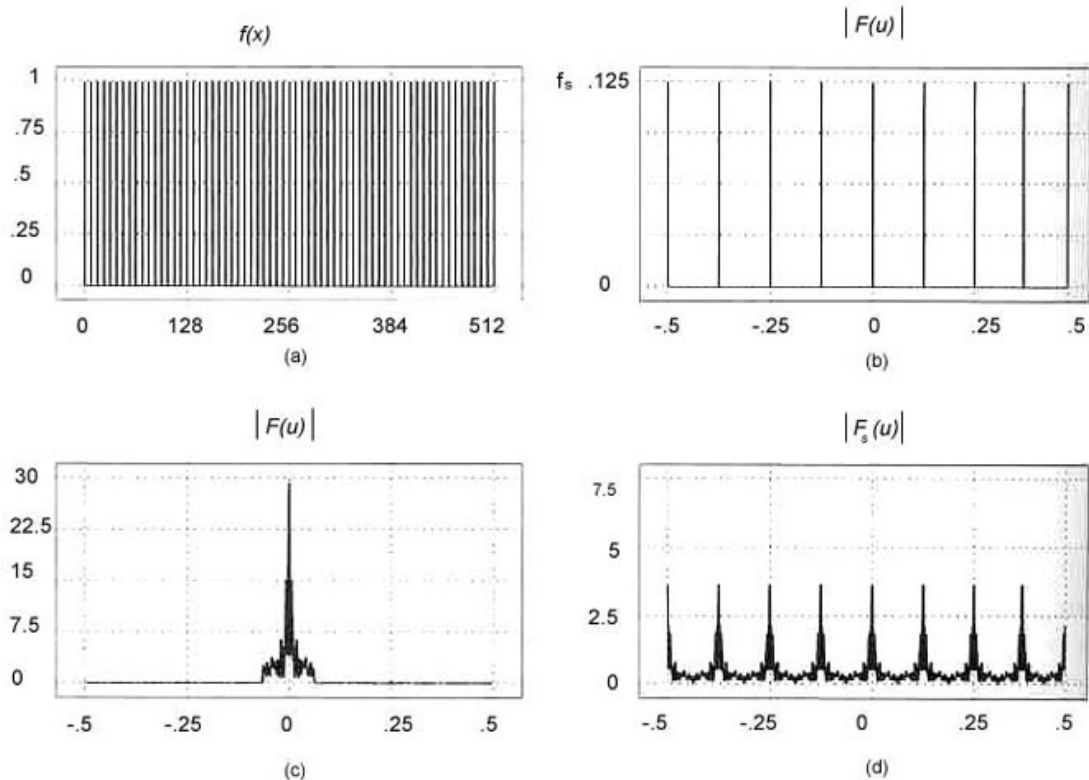


Fig.8. (a) Il treno di impulsi e la sua trasformata di Fourier; (b) trasformata di Fourier di un segnale campionato.

Questo segue da due risultati preliminari: il fatto che il treno di impulsi di passo 1 coincide con la sua trasformata di Fourier nel senso delle distribuzioni ([formula di Poisson, corso di Analisi Armonica, capitolo 7, sezione 3 e capitolo 9, sezione 2](#)), e la [regola di dilatazione per la trasformata di Fourier \(corso di Analisi Armonica, capitolo 5, sezione 2\)](#). Poiché la moltiplicazione nel dominio del tempo corrisponde a una convoluzione nel dominio della frequenza, la trasformata di Fourier del segnale campionato è la convoluzione della trasformata di Fourier della distribuzione treno di impulsi con il segnale originale. Il risultato è la replica iterata dello spettro di Fourier originale, cioè una successione di copie replicate e traslate dello spettro originale. Infatti, come visto sopra, ciascun campione corrisponde a moltiplicare il segnale originario per una delta di Dirac centrata all'istante di campionamento: quindi la successione dei campioni corrisponde alla moltiplicazione del segnale originale per una serie di delta di Dirac equispaziate (un treno di impulsi nel dominio dello spazio). Ma abbiamo detto che la trasformata di Fourier di questo treno di impulsi spaziali è un altro treno di impulsi nel dominio della frequenza, via via più radi quanto più fitti sono quelli originali nel dominio dello spazio, quindi una serie di traslati di delta di Dirac. La

moltiplicazione col treno di impulsi nel dominio dello spazio corrisponde alla convoluzione con questo nuovo treno di impulsi nel dominio della frequenza, cioè con questa successione di delta equispaziate. Ma grazie ad un altro risultato del [corso di Analisi Armonica, capitolo 8, sezione 13](#), la convoluzione con una delta di Dirac centrata ad una frequenza, diciamo, ω_0 è una traslazione di passo ω_0 . Pertanto la trasformata di Fourier della successione dei campioni di passo τ è una somma di traslati di passo $1/\tau$ della trasformata di Fourier del segnale originale. Se questa trasformata aveva supporto da $-\omega_c$ a ω_c ed il passo di campionamento è minore o uguale di $1/\omega_s = 1/(2\omega_c)$, allora queste copie replicate sono separate fra loro di almeno $2\omega_c$, cioè la lunghezza del loro supporto, e quindi non si sovrappongono. In tal caso la serie che ci dà la trasformata di Fourier della successione dei campioni non è altro che una successione di repliche a supporto disgiunto dello spettro originario. Questo fatto è illustrato nella Figura 8(b).

Allora come si fa a ricostruire il segnale originale a partire dai suoi campioni? Abbiamo visto che il risultato del campionamento di un segnale (Fig.9(a)) ad una frequenza di campionamento finita è un segnale con uno spettro di frequenze a supporto illimitato (Fig.9(b)). Se analizziamo nel dominio della frequenza questo segnale campionato, vi troviamo una successione di copie replicate e traslate dello spettro originale. La moltiplicazione in questo dominio della trasformata di Fourier del segnale per una funzione tipo onda quadra (cioè un filtro passa basso, che lascia invariato lo spettro di Fourier nell'intervallo da $-\omega_c$ a ω_c e lo tronca a 0 al di fuori) elimina queste copie replicate dello spettro (Fig.9(c)), lasciando solo una singola copia dello spettro originale (Fig.9(d)), dalla quale, grazie alla trasformata inversa di Fourier, si ricostruisce senza perdite il segnale originale. In altre parole, se il segnale ha ampiezza di banda limitata, lo possiamo ricostruire esattamente a partire dai suoi campioni moltiplicando la trasformata di Fourier della successione dei campioni con un opportuno filtro passa basso nel dominio della frequenza, o equivalentemente, convolvendo i campioni nel dominio dello spazio con la trasformata di Fourier di questo filtro, la quale è $\text{sinc}(Ax)$ con $A = 2\omega_c = \omega_s$ (*Teorema del campionamento: si veda il corso di Analisi Armonica, capitolo 7, sezione 4 e capitolo 10, sezione 1*).

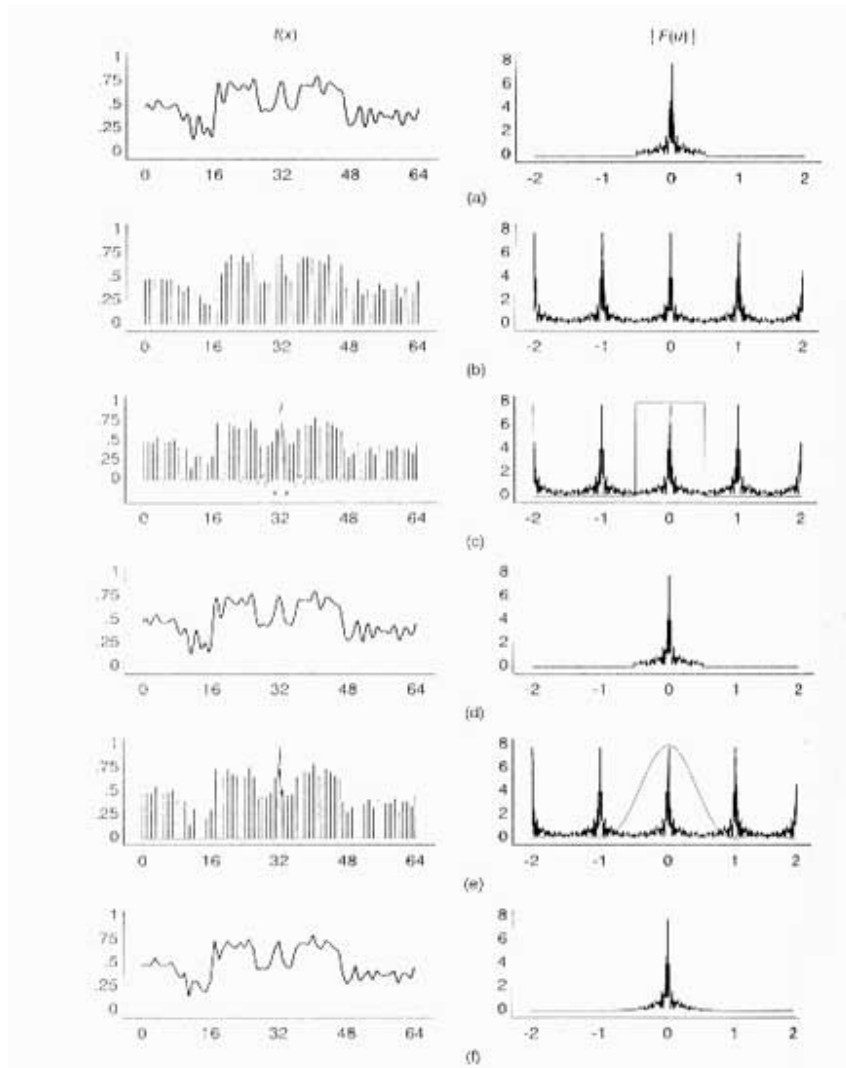


Fig.9. Campionamento adeguato: nessuna sovrapposizione nel dominio della frequenza e ricostruzione senza perdite

In effetti, il ricorrere al dominio della frequenza è necessario solo per dimostrare la validità del procedimento: il calcolo numerico avviene sempre soltanto nel dominio dello spazio, e si svolge convolvendo con i valori della funzione *sinc* (o altri filtri simili), perché l'effettuare il calcolo esplicito delle trasformate di Fourier sarebbe di gran lunga troppo oneroso dal punto di vista numerico (ogni singolo valore richiederebbe il calcolo numerico di un integrale sull'intera retta reale). E' comunque istruttivo esaminare alcuni segnali filtrati con vari filtri ed i loro spettri di Fourier, cosa che facciamo ora.

Premettiamo che, nel disegnare la trasformata di Fourier nei disegni delle Fig.9 – 11, abbiamo fatto una semplificazione inaccurata: i filtri nel dominio della

frequenza non sono stati disegnati all'altezza giusta. La loro altezza dovrebbe essere 1 in Fig.9 e 2 in Figg.10 - 11 per restituire la copia originale dello spettro con la grandezza che aveva all'inizio. Questo segue dal fattore di normalizzazione della proprietà di dilatazione della trasformata di Fourier (si veda il [corso di Analisi Armonica](#), capitoli 5 e 8).

Il filtro passa basso (cioè con grafico rettangolare) che si utilizza in questo procedimento di filtraggio consente una ricostruzione esatta del segnale originale perché nel suo supporto esso lascia invariati i valori dello spettro originale. Se si usano filtri di tipo diverso, il segnale ricostruito non è esattamente uguale all'originale. A titolo di esempio, consideriamo il caso di un filtro il cui grafico è di forma triangolare (cioè dato dalla convoluzione di un filtro passa basso per sé stesso). Le Figg. 9(e) e 9(f) mostrano il risultato della ricostruzione dei campioni con un filtro triangolare. E' immediato verificare che la convoluzione con questo filtro è una interpolazione lineare dei campioni.

Se la frequenza di campionamento è troppo bassa, si ha un fenomeno chiamato *aliasing*: le copie replicate degli spettri in frequenza si sovrappongono, come in Fig.10.

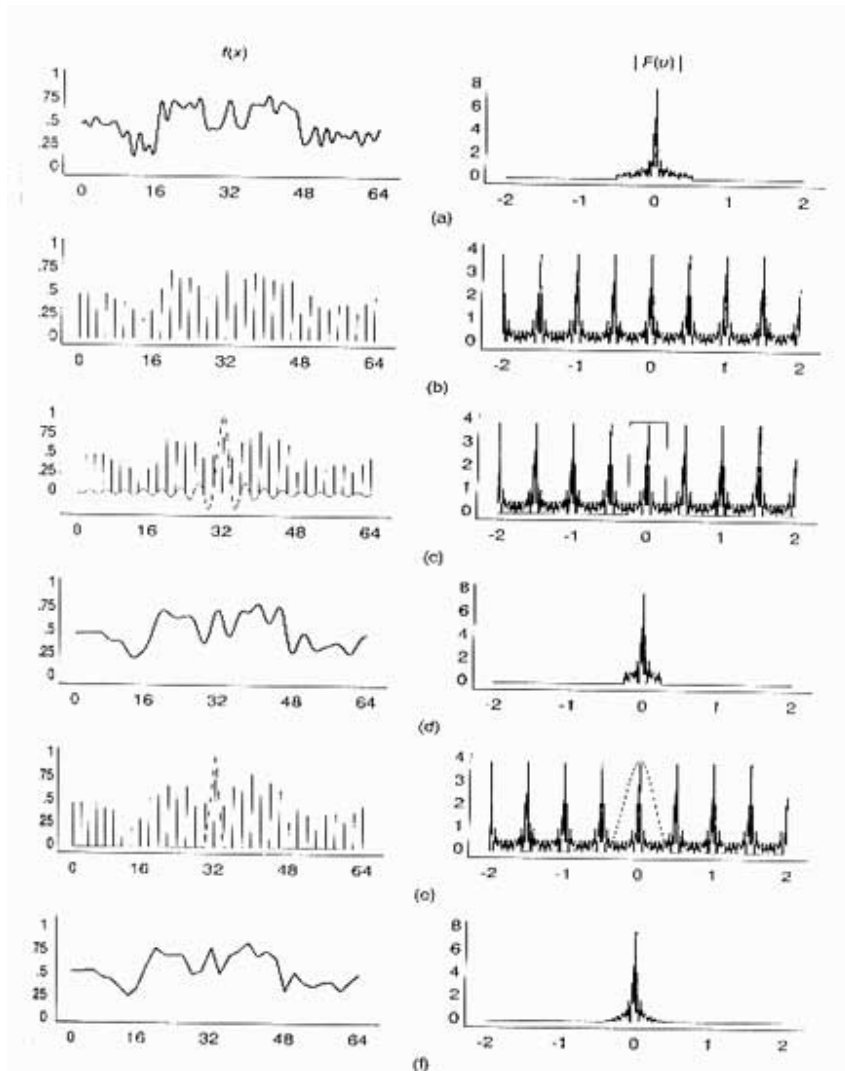


Fig.10. Campionamento inadeguato: ricostruzione con aliasing

In questo caso, il filtro passa basso del processo di ricostruzione non può rimuovere quelle parti iniziale e finale degli spettri replicati adiacenti a quello originale le quali si sovrappongono allo spettro del segnale originale. Quindi componenti ad alta frequenza degli spettri replicati sono mescolate con le componenti a bassa frequenza del segnale originale, e sono trattati come basse frequenze (cioè non eliminate dal filtro) durante il processo di ricostruzione. Pertanto un passo di campionamento inadeguato causa l'aliasing: alcune componenti spettrali a frequenze che sono alte (cioè da eliminare) prima della ricostruzione si mascherano come frequenze basse dopo. Ci sono due vie per risolvere questo problema. Possiamo scegliere di campionare una frequenza sufficientemente alta, un approccio possibile solo se il segnale ha una ampiezza di banda finita; oppure possiamo filtrare il segnale prima del campionamento,

rimuovendo tutte le componenti sopra ω_c come mostrato in Fig.11. Osserviamo che quest'ultimo approccio ha una fase iniziale di prefiltraggio: infatti, esso consiste nel filtrare prima lo spettro di Fourier del segnale originale con un opportuno filtro passa basso, per trasformare tale segnale in un nuovo segnale a banda spettrale limitata (il quale appare quindi addolcito rispetto all'originale), e dopo il filtraggio campionare il nuovo segnale addolcito alla frequenza di campionamento appropriata (quella data dal doppio della frequenza di taglio del filtro). Questi campioni rappresentano la versione digitalizzata del segnale: da essi si può ricostruire il segnale, ma la ricostruzione non ci dà il segnale originale, bensì quello addolcito. Osserviamo ancora che il prefiltraggio nel dominio della frequenza equivale ad una convoluzione con una *sinc* nel dominio dello spazio.

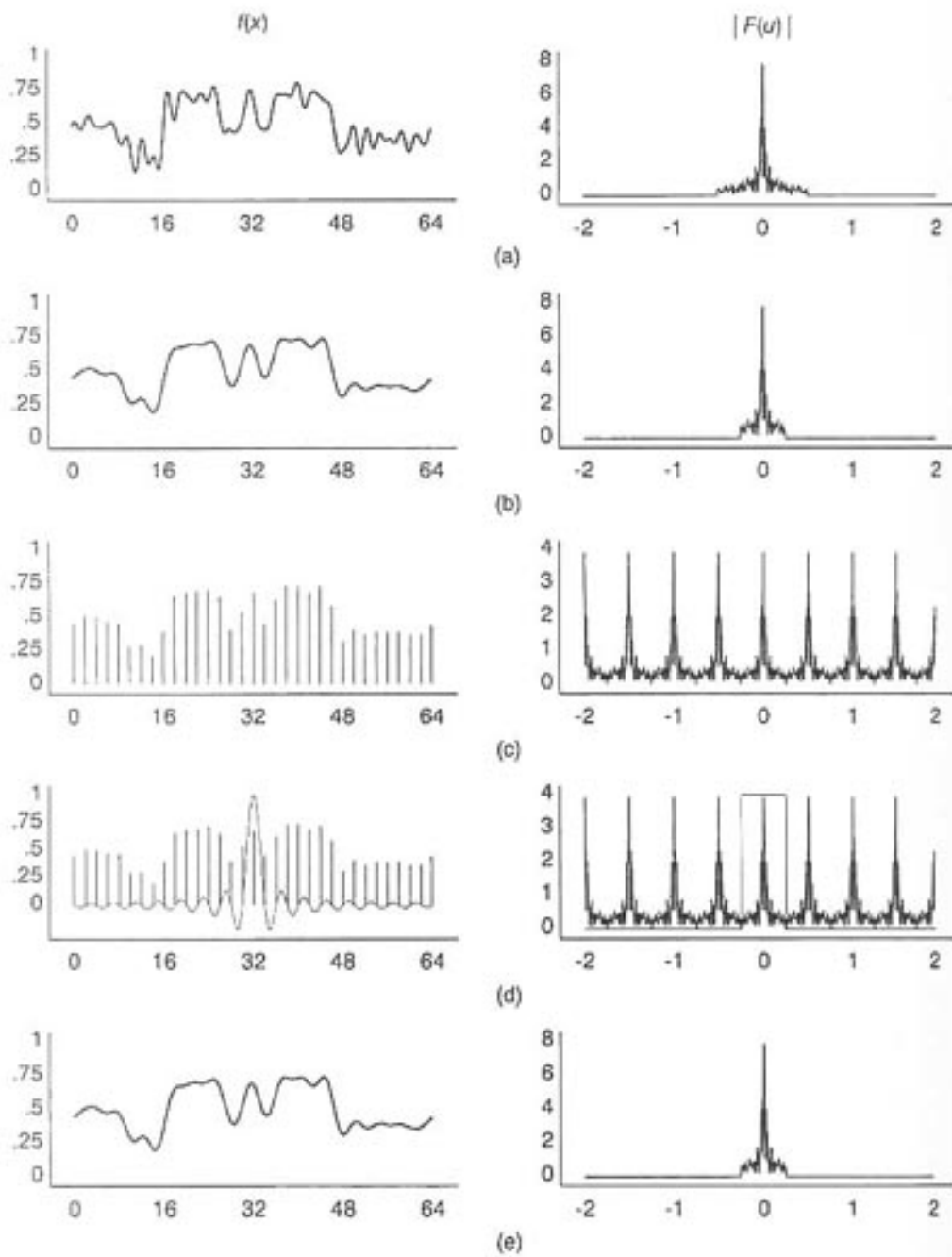


Fig.11. Prefiltraggio passa-basso per rendere adeguato il campionamento

Mettiamo però in guardia il lettore sul fatto che nell'hardware video la ricostruzione è fatta convolvendo il segnale con una funzione diversa dalla *sinc*

(e quindi non esatta). Infatti i campioni nel frame buffer vengono trasformati in un segnale video continuo, mediante un processo di *sample and hold* (campionamento con mantenimento): se il segnale che stiamo ricostruendo è una riga di un'immagine, il valore di ogni campione viene mantenuto per un intervallo spaziale pari ad un pixel. Questo processo corrisponde a convolvere la successione dei campioni con un filtro passa-banda largo un pixel, come mostrato in Fig. 12 , e fa pensare ai pixel come se fossero tessere quadrate che coprono il display. Il segnale risultante presenta salti nel passare da un pixel al successivo: questi salti corrispondono a componenti ad alta frequenza che i campioni non possedevano, un effetto noto come *rastering*. Benché l'hardware video dovrebbe campionare e mantenere l'intensità di ogni pixel, i circuiti che generano il voltaggio che pilota il tubo catodico di solito non hanno una risposta abbastanza veloce da mostrare discontinuità nell'intensità tra pixel adiacenti. Anche la distribuzione gaussiana dell'intensità di luce di un fosforo illuminato dal raggio catodico smussa le discontinuità del segnale a campioni mantenuti e quindi aiuta a ridurre questo problema. Quindi il segnale campionato è ricostruito dall'equivalente di una convoluzione con un filtro passa banda, seguito da una convoluzione con una Gaussiana. Il rastering è particolarmente evidente nello zoom, che aumenta l'area allocata a un singolo pixel, e quindi colora quest'area ormai grande di una tinta piatta costante che al bordo del pixel scatta di colpo ad un valore diverso. Il rastering è anche più evidente in stampa, nella registrazione digitale di film, e nei display LCD, che sono tutte tecnologie in cui la transizione di luminosità fra un pixel ed il successivo è molto netta.

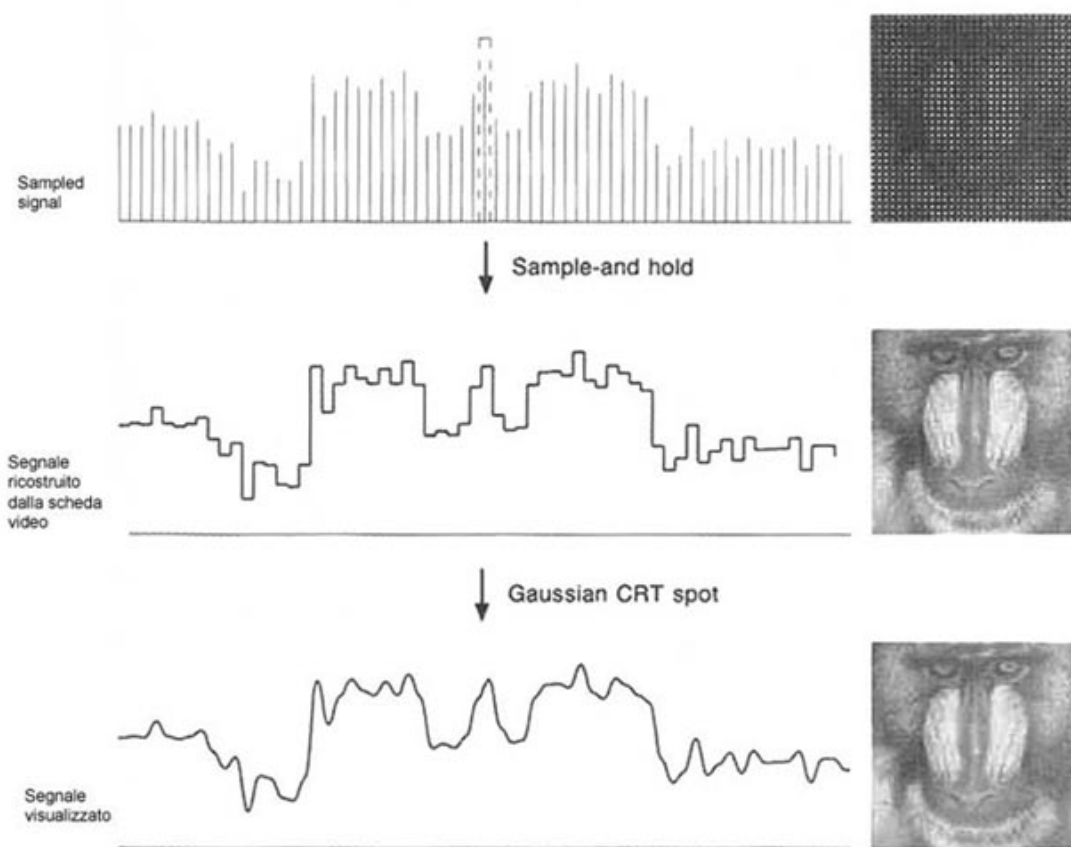


Fig.12. Rastering: sample and hold e smussamento gaussiano dei pixel

Abbiamo già visto, nel [teorema del campionamento](#), che un segnale con spettro di Fourier nell'intervallo di frequenze da $-\omega_c$ a ω_c deve essere campionato a una frequenza maggiore o uguale di $2\omega_c$, cioè ad un passo minore o uguale di $1/(2\omega_c)$, per poter essere ricostruito senza perdite. Ma questo è il caso ottimale, quello che permette la frequenza di campionamento più bassa possibile. Il valore della più bassa frequenza di campionamento accettabile dipende dal filtro che si vuole usare per la ricostruzione, ed $1/(2\omega_c)$ è ciò che si ottiene con la moltiplicazione nel dominio della frequenza col filtro passa banda da $-\omega_c$ a ω_c , cioè con la convoluzione nel dominio dello spazio con una *sinc* non troncata. Se il filtro per ricostruire i campioni è diverso, come avviene sempre quando ricostruiamo un'immagine (perché, quanto meno, si tronca la *sinc* per ridurre i calcoli), allora il segnale ricostruito non è identico all'originale, ed inoltre, per ottenere un risultato comunque accettabile, la frequenza di campionamento deve essere più alta.

Consideriamo, per esempio, una frequenza di campionamento di poco maggiore di $2\omega_c$ sul segnale $\cos(2\pi \omega_c x)$. I campioni risultanti si dispongono lungo due archi di un'onda sinusoidale a bassa frequenza, e quindi sembra che il segnale campionato sia un'onda sinusoidale a bassa frequenza, come mostrato in Fig.13. Cioè, con questo passo di campionamento, il segnale originale viene modulato in ampiezza a bassa frequenza. La modulazione a bassa frequenza rimane dopo la ricostruzione (e quindi si ottiene un segnale ricostruito mal modulato) se il segnale è ricostruito con un filtro passa banda largo un pixel, perché in tal caso la ricostruzione si fa tramite il mantenimento dei campioni, che sono modulati a bassa frequenza, per un intervallo lungo un pixel. Questo equivale ad estendere per un pixel il valore campionato, ossia convolvere per la costante 1, che è il valore centrale della *sinc*, invece che convolvere con la *sinc*.



Fig.12. Modulazione a bassa frequenza che resta dopo la ricostruzione tramite un filtro passa banda largo un pixel

Invece, se la convoluzione è calcolata con una *sinc* non troncata, il segnale originale viene ricostruito senza errori, per il teorema del campionamento (si veda il calcolo di questo esempio nel [corso di Analisi Armonica, capitolo 10, sezione 5](#)). Poiché è inevitabile usare filtri troncati (e quindi non ideali) prima e dopo il campionamento, questo significa che si devono utilizzare frequenze di campionamento più elevate per ridurre le perdite.

RICOSTRUZIONE NUMERICA DEL SEGNALE TRAMITE FILTRAGGIO DEI DATI CAMPIONATI

Il modo grafico in cui abbiamo presentato il [teorema del campionamento](#) (per questa dimostrazione si veda il [corso di Analisi Armonica, capitolo 10, sezione 1](#)) presuppone che i dati campionati (a frequenza sufficientemente elevata rispetto alla frequenza di Nyquist ω_c) vengano trasformati secondo Fourier, ottenendo in tal modo una successione di repliche dello spettro di Fourier originale. Questa successione viene poi filtrata con un filtro passa basso a frequenza di taglio ω_c , ed infine si calcola la trasformata inversa di Fourier. Ma nell'implementazione numerica non c'è bisogno di passare al dominio delle frequenze. Il calcolo si può svolgere direttamente nel dominio dello spazio, dove la moltiplicazione spettrale per il filtro passa basso diventa la convoluzione con una funzione *sinc* di passo appropriato (il passo è tale che gli zeri della *sinc* coincidano con i punti di campionamento, eccetto che all'origine; per la rilevanza di questo fatto, si veda l'enunciato del [teorema del Campionamento](#) dato nel [Corollario 7.4.5 nelle note del corso di Analisi Armonica, capitolo 7, sezione 4, e le successive Note 7.4.6 e 7.4.7](#). Grazie a questa convoluzione si ottiene la seguente formula di ricostruzione del segnale f ad ogni valore x della variabile spaziale:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2\omega_c}\right) \text{sinc}(2\omega_c x - k)$$

A questo punto è facile capire come si inizia il processo numerico della ricostruzione del segnale. Si inizia con un procedimento di interpolazione a *metà strada* fra due campioni consecutivi. Supponiamo di conoscere i valori campionati (esatti a meno di arrotondamento numerico) ai punti $\{k/2\omega_c\}$. Nella prima fase, ricostruiamo i valori esatti del segnale ai punti di mezzo rispetto a punti di campionamento, cioè i punti $\{x_k = (k+1/2)/2\omega_c\}$, per tutti gli m interi. Per ottenere questi valori basta svolgere la somma della formula (1) precedente, che richiede l'impiego dei fattori $\text{sinc}(2\omega_c x - k)$. Dalla scelta di x segue che questi fattori sono precisamente i numeri $\text{sinc}(k + 1/2)$, al variare di k sugli interi. Naturalmente, la somma è una serie, e quindi avremmo bisogno di una successione infinita di tali fattori, ma in realtà ci possiamo arrestare quando arriviamo ad una precisione sufficiente. Se ad esempio desideriamo ricostruire il segnale con una precisione numerica di con la terza cifra decimale esatta, potremo ragionevolmente scartare i valori della *sinc* inferiori a 10^{-4} . Infatti, i numeri inferiori a 0.5×10^{-3} sono precisamente quelli il cui arrotondamento ha le

prime tre cifre decimali nulle; consideriamo fattori 5 volte minori per sicurezza, in quanto stiamo trascurando non un unico addendo, ma un'intera coda della serie in (1). Se i valori campionati sono tutti dello stesso segno, allora la serie è a segni alterni, perché i valori di $\text{sinc}(k + 1/2)$ sono a segni alterni (il grafico della sinc si annulla solo sugli interi non nulli, ed ha valori alternativamente positivi e negativi negli intervalli $[k, k+1]$). In tal caso, il [teorema di Leibnitz](#) per le serie a segni alterni (*si veda il corso di Analisi Armonica, capitolo 1, sezione 1 2*) ci assicura che l'errore commesso nell'arrestare la somma è minore (in modulo) del primo addendo trascurato, e quindi non avremmo bisogno di un ordine di grandezza di vantaggio per tenerci sul sicuro. Purtroppo, però, i valori campionati potrebbero avere segni qualsiasi. Naturalmente, tutte queste stime devono essere riscalate se consideriamo segnali con valori elevati.

Ricordiamo che $\text{sinc}(x) < 1/\pi x$. Quindi, nel nostro caso servono solo valori di $x = k + 1/2$ tali che $\pi x < 10^4$, cioè circa 3500 valori: si tratta di un calcolo assai veloce per un elaboratore elettronico, purché siano stati precedentemente tabulati (una volta per tutte) i valori della sinc a questi punti intermedi. Se invece ci basta la prima cifra decimale, allora sono necessari solo i primi 35 valori intermedi della sinc , che sono riportati per riferimento nella Tabella 10.1 del [corso di Analisi Armonica, capitolo 10, sezione 3](#). Poiché la funzione sinc è pari, è sufficiente riportare in questa tabella i valori della funzione sinc solo per x positivo. Per comprendere come ottimizzare le fasi ulteriori della ricostruzione del segnale (cioè a punti diversi da quelli a meta' strada fra due punti di campionamento consecutivi), dobbiamo ricordare che i valori ricostruiti grazie al procedimento di interpolazione appena descritto sono i valori esatti del segnale, a meno di arrotondamento. Perciò, aggiungendo questi valori ai campioni di partenza, otteniamo precisamente i valori del segnale originale campionati a frequenza doppia. Allora, se ripetiamo con questa successione raddoppiata di valori il procedimento di interpolazione appena descritto per i valori intermedi, ora otteniamo i valori esatti ai multipli di $1/4$. Naturalmente, dobbiamo ora utilizzare una funzione sinc di frequenza raddoppiata (ricordiamo che la sinc deve annullarsi ai punti di campionamento, tranne che in zero). Ma raddoppiare la frequenza significa comprimere il grafico della sinc lungo l'asse delle ascisse: non ne cambia i valori, sposta solamente i punti dove sono raggiunti (dimezzandone la grandezza). Perciò, in questa nuova fase di interpolazione che ha l'obiettivo di ricostruire il segnale ai multipli di $1/4$, si usa la stessa tabella di valori della sinc impiegata nella fase precedente. E così via: iterando il procedimento di interpolazione ricostruiamo esattamente il segnale a ciascun valore razionale di x , tranne che per il comporsi degli errori di arrotondamento. Tutte le fasi richiedono sempre la stessa tabella di fattori numerici interpolanti, e quindi il metodo si presta particolarmente bene ad essere implementato in hardware con un unico chip.