§2 Limiti elementari di funzioni[(1.2)]

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

1.2 Dimostrandone la correttezza, trovare i limiti delle seguenti funzioni
$\lim_{x\to x_o} \frac{x+3}{x}$, $x_o \neq 0$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{x+3}{x}$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x}$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+3}{x^2}$

2.2 $^* \lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$, $\quad \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{\sin \pi x}$, $\quad \lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, $\quad \lim_{x\to +\infty} \log\sin\frac{1}{x} - \log\frac{1}{x}$

3.2 $^* \lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^4-x^2}-x^2)$, $\quad ^* \lim_{x\to\pm\infty}(x^3-x)^{1/3}-x$, $\quad ^* \lim_{x\to\pm\infty}(x^3-x^2)^{1/3}-x$

4.2 $\lim_{x\to 0^+}(\sin x)^{1/(\cos x-1)}$, $\quad \lim_{x\to\pi^+}(\tan x)^{1/(\pi-x)}$, $\quad \lim_{x\to 0} x\tan(ax+\arctan\frac{b}{x})$

5.2 $\lim_{x\to a}(\frac{\sin x}{\sin a})^{1/x-a}$ $a \neq k\pi$ e k intero relativo, $\quad \lim_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\cot \pi x}$

6.2 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{3+x^a}{2+x})^x$ $a \in \mathbf{R}$, $\quad \lim_{x\to+\infty} x^a + x^b\sin x$ con $a, b \in \mathbf{R}$, $\quad \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$

7.2 $\lim_{x\to+\infty}\big(1+2\sin\frac{1}{x}\big)^x$, $\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{1/3}-(1-2x)^{1/4}}{x+x^2}$, $\quad ^* \lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2-x}-x$

8.2 $\lim_{x\to\pm\infty} x\big(\arctan\frac{x+1}{x+2}-\frac{\pi}{4}\big)$, $\quad ^* * \lim_{x\to+\infty}(\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x})$

9.2 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x}{1+x})^x$, $\quad \lim_{x\to+\infty} e^{x\cos\frac{1}{x}}x^{-x}$, $\quad \lim_{x\to 0^-}(1-2^x)^{\frac{1}{\sin x}}$

10.2 $\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{1/x}$, $\quad \lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$, $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \log(\cos x)}{x\sin x}$

11.2 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty}(x+1)e^{\frac{x}{x-1}}-xe$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} xe^{\frac{1-x}{2-x}}-xe$
$\lim_{x\to\pm\infty}(x+1)e^{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}}-xe$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty}(x+1)e^{\frac{x^2}{x^2-1}}-xe$

12.2 Sapendo che $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$ si trovino i seguenti limiti:
$\lim_{x\to\infty}\big((1+\frac{1}{x})^x - e\big)x$, $\quad \lim_{x\to\infty}\big((1+\frac{1}{x^2})^x-1\big)x$, $\quad \lim_{x\to\infty} x\log(a+\frac{1}{x})-x\log a \quad (a>0)$

13.2 $\lim_{x\to 1}(\frac{1+x}{2+x})^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$, $\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2})^{\frac{2x+1}{x-1}}$, $\quad \lim_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$

14.2 $\lim_{x\to 0^+}\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$, $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\frac{x}{2}}$, $\quad \lim_{x\to -1^+}\frac{\sqrt{\pi}-\sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}$

15.2 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$, $\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{1/3}-(1-2x)^{1/4}}{x+x^2}$, $\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+x)-\cos(a-x)}{x}$

16.2 $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{1-(\frac{x}{\pi})^2}$, $\quad \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x^n})^n \quad (n \in \mathbf{Z})$, $\quad \lim_{x\to+\infty}(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2})^x$

[(1.2)] Da svolgersi senza usare gli sviluppi di Taylor ma usando, eventualmente, solo limiti notevoli attraverso il simbolo o-piccolo e cambi di variabili. Negli esercizi con * trovare $\mathcal{U}$ in funzione di $\mathcal{V}$ (*formula (4.5) pag.125 del libro di testo)* ossia trovare $(x_o-\delta\,, x_o+\delta)$ in funzione di $(l-\varepsilon\,, l+\varepsilon)$ Nel seguito la quantità δ verrà scritta come δ_ε per sottolineare la sua dipendenza da ε oppure $\delta_\varepsilon(x_o)$ per sottolineare la sua dipendenza anche da x_o. Per risolvere tutti gli esercizi è sufficiente sapere quanto scritto sul libro di testo *fino a pag.174*. Gli esercizi con $*$ sono da considerarsi un pò più difficili degli altri oppure la loro risoluzione richiede l'uso di formule scritte nei capitoli precedenti. In ogni caso si tenga presente che dire $\lim_{x\to x_o} f(x)=l$ (l finito), equivale a dire che per $x\to x_o$ si ha $f(x)=l+o(1)$ dove $\lim_{x\to x_o} o(1)=0$ (x_o può essere finito oppure infinito.

17.2 $\lim_{x\to\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+\sqrt{1+x^4}}-|x|\sqrt{2})$, $\lim_{x\to\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+\sqrt{1+x^2}}-|x|\sqrt{2})$

18.2 $\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+a)-\ln x]$, $\lim_{x\to\pm\infty} \sqrt{(x+a)(x+b)}-x$, $\lim_{x\to+\infty}(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}$

19.2 $\lim_{x\to\pm\infty}(x-|x|)(x+|x|)e^x$, $\lim_{x\to 0} e^{(x+[x])\sin\frac{1}{x}}$, $\lim_{x\to+\infty}(x-[x])[x]$

20.2* $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}$, $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{\tan x-\sin x}$, $\lim_{n\to\infty}\big(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\big)$(2.2)

21.2 È data la funzione $f(x)\colon Dom(f)\subset\mathbf{R}\ \to\ Im(f)\subset\mathbf{R}$. Si specifichi il significato delle seguenti affermazioni
1) $\lim_{x\to a^+} f(x)\neq l$, 2) $\nexists\ \lim_{x\to a^+} f(x)$, 3) f è non limitata superiormente

22.2* Dire se esiste in $\mathbf{R}^*$ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{1}{x}}$,

23.2 Una somma di P lire è depositata in una banca che paga un interesse al tasso annuale dell'$r\%$ calcolato m volte l'anno. Dimostrare che la somma totale del capitale più l'interesse alla fine di n anni è data da $P(1+\frac{r}{m})^{mn}$. Trovare il limite quando $m\to+\infty$ e sia r che n sono fissi. Nel limite di $m\to+\infty$ si dice che il tasso è calcolato continuativamente. Quanto tempo ci vuole affinché si raddoppi il capitale depositato presso una banca se il tasso di interesse è del 6% e tale interesse è calcolato continuativamente. Rispondere alla stessa domanda se il tasso è calcolato quattro volte l'anno (3.2)

24.2* Dimostrare che $\lim_{x\to c} f(x)=l \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\ \overline{\delta}_\varepsilon\ t.c.\ \xi,\eta\in(c-\overline{\delta}_\varepsilon,c+\overline{\delta}_\varepsilon),\ \xi,\eta\neq c\ \Rightarrow\ |f(\xi)-f(\eta)|<\varepsilon.$

25.2* Si analizzino i punti in cui la funzione $\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ ammette limite

26.2 Data una funzione f tale che $(Dom(f)=\mathbf{R}\backslash\{x_o\})$, sia L per definizione l'affermazione per cui $\lim_{x\to x_o} f(x)=l\in\mathbf{R}$. Si dica quale delle 1)–4) implica L oppure L implica una delle 1)–4). Nel caso di mancata equivalenza si diano degli esempi di funzioni che ne evidenzino la differenza.

1) $\forall\ \delta>0\ \exists\ \varepsilon_\delta>0\ t.c.\ |x-x_o|<\delta\ x\neq x_o\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon_\delta$

2) $\exists\ \delta>0\ t.c.\forall\ \varepsilon>0\ |x-x_o|<\delta\ x\neq x_o\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$

3) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon\ t.c.\ |x-x_o|<\delta_\varepsilon\ x\neq x_o\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon^2$

4) $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta_\varepsilon>0\ t.c.\ |f(x)-l|<\varepsilon\ \Rightarrow\ |x-x_o|<\delta_\varepsilon\ x\neq x_0$

27.2** Data una funzione $f\colon E\subseteq\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ si dica chi è l'insieme

1) $A\stackrel{\text{def}}{=}\cap_{k=1}^{\infty}\cup_{n=1}^{\infty}\{x\in\overline{E}\colon\ \xi,\eta\in(x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n})\cap E\backslash\{x\}\ \Rightarrow\ |f(\eta)-f(\xi)|<\frac{1}{k}\}$

Definizione *Sia data $f\colon[a,b]\to\mathbf{R}$ e sia $c\in(a,b)$. Si definiscono le quattro quantità : 1) limite*

(2.2) Si dimostri per induzione una opportuna formula trigonometrica pari al prodotto in questione

(3.2) Per chi avesse seguito od anche solamente udito del problema "dell'anatocismo" (dal greco *aná*, di nuovo e *tokismós*, interesse) relativo al differente calcolo che le banche italiane praticavano per gli interessi attivi (ogni tre mesi) e passivi (ogni anno) e su cui tra l'altro si è espressa la Corte di Cassazione (sentenza del 2000–2001) in favore della clientela delle banche e quindi contro le banche stesse, sa che il calcolo degli interessi, appunto, non è affatto insensibile al periodo fra un conteggio e l'altro *superiore destro per* $x \to c^+$ *la quantità* $\inf_{\delta>0} \sup_{c<x<c+\delta} f(x)$ *e si indica con* $\overline{\lim_{x\to c^+}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^+(c^+)$. *2) limite superiore sinistro per* $x \to c^-$ *la quantità* $\inf_{\delta>0} \sup_{c-\delta<x<c} f(x)$ *e si indica con* $\overline{\lim_{x\to c^-}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f^+(c^-)$. *3) limite inferiore destro per* $x \to c^+$ *la quantità* $\sup_{\delta>0} \inf_{c<x<c+\delta} f(x)$ *e si indica con* $\underline{\lim_{x\to c^+}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_-(c^+)$. *4) limite inferiore sinistro per* $x \to c^-$ *la quantità* $\sup_{\delta>0} \inf_{c-\delta<x<c} f(x)$ *e si indica con* $\underline{\lim_{x\to c^-}} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_-(c^-)$.

Analoghe definizioni si hanno per definire $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)$ *e* $\underline{\lim_{x\to+\infty}} f(x)$ *e* $x \to -\infty$ *chiaramente.* $\overline{\lim_{x\to+\infty}} f(x) = \inf_k \sup_{x>k} f(x)$ *e* $\underline{\lim_{x\to-\infty}} f(x) = \sup_k \inf_{x>k} f(x)$

Definizioni analoghe sono presenti nel capitolo sulle successioni.

Il motivo per cui si definiscono tali grandezze è dovuto al fatto che esse, contrariamente ai limiti, esistono sempre, finite o infinite come dimostra il prossimo esercizio

28.2** Dimostrare che esistono (finiti o infiniti) le quantità 1)–4) precedenti e anche quelle con $x \to +\infty$.
• Dimostrare che $f_-(c^+) \leq f^+(c^+)$, $f_-(c^-) \leq f^+(c^-)$,
• Dimostrare inoltre che: 1) se f ammette limite destro (sinistro) in c pari a $l \in \mathbf{R}$, allora $f^+(c^+) = f_-(c^+) = l$ $(f^+(c^-) = f_-(c^-) = l)$ 2) se $f^+(c^+) = f_-(c^+)$ $(f^+(c^-) = f_-(c^-))$ allora esiste il limite destro (sinistro) l ed è uguale rispettivamente a $f^+(c^+) = f_-(c^+)$.
• Data la funzione $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ si dica chi sono $f^+(0^+)$, $f^+(0^-)$, $f_-(0^+)$, $f_-(0^-)$.

29.2** Data una funzione $f\colon E \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si descriva analogamente all'esercizio **24.2*** l'insieme dei punti $x \in \overline{E}$ in cui la funzione ha limite $+\infty$
• Si descriva analogamente all'esercizio **24.2***, l'insieme dei punti $x \in \overline{E}$ in cui la funzione ha limite superiore destro e sinistro uguali a $+\infty$

30.2 Data una funzione $f(x)$ si dimostri che se $\lim_{x\to0^+} \sup_{x_1,x_2\in(0,x)} |f(x_1)-f(x_2)| = 0$ allora esiste finito $\lim_{x\to0^+} f(x)$
• Dire se vale la stessa cosa con $\lim_{x\to0^+} \sup_{x_1,x_2\in(x,2x)} |f(x_1)-f(x_2)| = 0$[(4.2)]

31.2** Dimostrare il seguente risultato oppure trovare un controesempio: non esiste una funzione $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ma tale limite è diverso da $f(x_0)$ per una infinità non numerabile di punti di $[a,b]$.

SOLUZIONI

§2

1.2 $L = \frac{x_o+3}{x_o}$, $L = +\infty$ per $x \to 0^+$ e $L = -\infty$ per $x \to 0^-$, $L = \pm\infty$, $L = 0$, **2.2** $L = \frac{3}{2}$, $L = -\frac{1}{\pi}$, $L = \cos a$, $L = 0$, **3.2** $L = -\frac{1}{2}$, $L = 0$, $L = -\frac{1}{3}$, **4.2** $L = +\infty$, $L = +\infty$ $L = \frac{b}{1-ab}$, **5.2** $L = e^{\cot a}$, e^{-1}, **6.2** Primo; $L = +\infty$ per $a > 1$, $L = e$ per $a = 1$, $L = 0$ per $a < 1$. Secondo; ci sono numerosi casi. conviene suddividere il piano (a,b) in quattro quadranti e studiare separatamente il limite in

(4.2) da *H.Jacobowitz; S.A.Kalikov American Mathematical Monthly* Vol.78, No.10 (Dec., 1971),1148 ciascun quadrante. *Il primo quadrante* è $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Se $a > b \geq 0$ allora $L = +\infty$, se $0 \leq a \leq b$ il limite non esiste. Del *secondo quadrante* $a \leq 0$ e $b \geq 0$ escludiamo $a = 0$. Il limite non esiste mai ossia per ogni $a < 0$ e $b \geq 0$. Del *terzo quadrante* escludiamo $b = 0$. Se $a < 0$ e $b < 0$ $L = 0$, se $a = 0$ e $b < 0$ $L = 1$. Del *quarto quadrante* escludiamo tanto $a = 0$ quanto $b = 0$. Se $a > 0$ e $b < 0$ si ha $L = +\infty$, $L = 1$ **7.2** $L = e^2$, $L = -\frac{1}{2}$, $L = -\frac{1}{2}$ per $x \to +\infty$ e $+\infty$ per $x \to -\infty$ **8.2** $L = -\frac{1}{2}$, $L = 0$, **9.2** $L = \frac{1}{e}$, $L = 0$, $L = +\infty$, **10.2** $L = e$, e^2, Terzo; $L = +\infty$ per $x \to 0^+$, $L = -\infty$ per $x \to 0^-$ **11.2** $L = \frac{1}{8}$, $L = 2e$, $L = e$ $L = +\infty$, $L = 0$ **12.2** $L = -\frac{e}{2}$, $L = 1$, $L = \frac{1}{a}$ **13.2** $L = (\frac{2}{3})^{1/2}$ $L = \frac{1}{4}$, $L = 1$ **14.2** $L = \sqrt{2}$, $L = 6$, $L = \sqrt{2}$ **15.2** $L = \frac{3}{2}$, $L = -\frac{1}{2}$, $L = -2\sin a$ **16.2** $L = \frac{\pi}{2}$ $L = +\infty$, e, 1, a seconda che $n \leq 1$, $n = 1$, $n > 1$, $L = e^2$ **17.2** $L = 0$, $L = \mp\infty$ **18.2** $L = a$, per $x \to +\infty$ si ha $L = \frac{a+b}{2}$ se $a + b \neq 0$ mentre $L = 0$ se $a + b = 0$ e per $x \to -\infty$ si ha $L = +\infty$ **19.2** $L = 0$, $\not\exists\, L$, $\not\exists\, L$ **20.2*** $L = \frac{1}{2}$, $L = 1$, $L = \frac{\sin x}{x}$ **22.2** Il limite non esiste **23.2** Pe^{rn}, $n = \frac{\ln 2}{r} \sim 11.55$ $n = \frac{\ln 2}{4\ln(1+\frac{r}{4})} \sim 11.64$. La differenza è piccola in quanto $\ln(1 + \frac{r}{4})$ è molto vicino a $\frac{r}{4}$ per r piccolo. Se il tasso di interesse fosse più alto la differenza sarebbe maggiore

25.2* ammette limite in tutti i punti $x \neq \frac{1}{k\pi}$. Non ammette limite né per $x \to 0$ né per $x \to \pm\infty$

26.2 1) $\not\Rightarrow$ L e L $\not\Rightarrow$ 1) si prenda la funzione $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ 2) $\Rightarrow$ L e L $\not\Rightarrow$ 2)

La funzione $f(x) \equiv c$ con c costante verifica 2) e L. Invece la funzione $f(x) = x$ verifica L ma non 2). 3) $\Rightarrow$ L e L $\Rightarrow$ 3). Sia L data da $\forall\ \varepsilon_1 > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon_1}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta_{\varepsilon_1}$ $x \neq x_o \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon_1$. Se è vera 3) allora basta prendere $\varepsilon < \sqrt{\varepsilon_1}$ mentre se è vera L basta prendere $\varepsilon_1 < \varepsilon^2$ 4) $\not\Rightarrow$ L e L $\not\Rightarrow$ 4) si prenda la funzione $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$

27.2** È l'insieme dei punti in cui la funzione ammette limite finito che può riscriversi come $A = \cup_{l\in\mathbf{R}} \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in E \cup E' \colon\ y \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E\backslash\{x\} \Rightarrow |f(y) - l| < \frac{1}{k}\}$ ovvero $A = \cup_{l\in\mathbf{R}} \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \{x \in E \cup E' \colon\ f^{-1}(l - \frac{1}{k}, l + \frac{1}{k}) \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E\backslash\{x\}\}$

28.2** $f^+(0^+) = f^+(0^-) = 1$, $f_-(0^-) = f_-(0^+) = -1$,

29.2** I punti in cui la funzione ammette limite uguale a $+\infty$ si possono descrivere come $B \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in E \cup E' \colon\ y \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E\backslash\{x\} \Rightarrow f(y) > k\}$ oppure $\cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in E \cup E' \colon\ f^{-1}(k, +\infty) \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E\backslash\{x\}\}$

I punti in cui il limite superiore è $+\infty$ è dato da $C \stackrel{\text{def}}{=} \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} \{x \in E \cup E' \colon\ \exists x' \in (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E\backslash\{x\} \Rightarrow f(x') > k\}$

31.2** Usare il risultato **32.2**

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

§2

1.2 - Primo - Vogliamo dimostrare che se $x_o \neq 0$ allora $\lim_{x\to x_o} \frac{x+3}{x} = \frac{x_o+3}{x_o}$ e quindi che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon,x_o}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta_{\varepsilon,x_o} \Rightarrow |\frac{x+3}{x} - \frac{x_o+3}{x_o}| < \varepsilon$.

Primo caso $x_o > 0$: Dopo avere semplificato, la disequazione da risolvere è data da $|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_o}| < \frac{\varepsilon}{3}$ ossia $\frac{1}{x_o} - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_o} + \frac{\varepsilon}{3}$ e quindi $\frac{3-\varepsilon x_o}{3x_o} < \frac{1}{x} < \frac{3+\varepsilon x_o}{3x_o}$. Si possono ora verificare tre eventualità. La prima è che $3 - \varepsilon x_o > 0$ ossia $\varepsilon < \frac{3}{x_o}$ da cui discende $\frac{3x_o}{3-\varepsilon x_o} > x > \frac{3x_o}{3+\varepsilon x_o}$

che riscriviamo per brevità $x_2 > x > x_1$; $x_2 - x_o \doteq d_2 = \frac{\varepsilon x_o^2}{3-\varepsilon x_o}$ mentre $d_1 \doteq x_o - x_1 = \frac{\varepsilon x_o^2}{3+\varepsilon x_o}$ e $d_1 < d_2$ chiaramente. È quindi evidente che $\delta_{\varepsilon,x_o} = d_1$ (vedi fig.1)
La seconda eventualità che può presentarsi è quando $3 - \varepsilon x_o < 0$. In tal caso della disequazione $\frac{1}{x_o} - \frac{\varepsilon}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x_o} + \frac{\varepsilon}{3}$ la parte di sinistra è automaticamente verificata senza imporre ulteriori condizioni su x. La parte destra dà $x > \frac{3x_o}{3+\varepsilon x_o} = x_1$ come prima. In questo caso ho $\delta_{\varepsilon,x_o} = x_o - x_1$.
La terza è che $\varepsilon = \frac{3}{x_o}$ ed in tal caso si ha $\frac{x_o}{2} < x$ da cui $\delta_{\frac{x_o}{3}} = \frac{x_o}{2}$

Secondo caso $x_o < 0$: le disequazioni da risolvere sono sempre $\frac{3-\varepsilon x_o}{3x_o} < \frac{1}{x} < \frac{3+\varepsilon x_o}{3x_o}$. Anche qui si hanno due possibilità. La prima è che $3 + \varepsilon x_o > 0$ ossia $\varepsilon < -\frac{3}{x_o}$,; ne segue che $\frac{3x_o}{3-\varepsilon x_o} > x > \frac{3x_o}{3+\varepsilon x_o}$ riscritta come $x_1 < x < x_2 < 0$. Stavolta $d_2 = \frac{\varepsilon x_o^2}{3-\varepsilon x_o} < d_1 = \frac{\varepsilon x_o^2}{3+\varepsilon x_o}$ e ciò implica che $\delta_{\varepsilon,x_o} = \frac{\varepsilon x_o^2}{3-\varepsilon x_o}$
La seconda possibilità è che $3 + \varepsilon x_o < 0$ ossia $\varepsilon > -\frac{3}{x_o}$. In questo caso è la parte destra della $\frac{3-\varepsilon x_o}{3x_o} < \frac{1}{x} < \frac{3+\varepsilon x_o}{3x_o}$ ad essere sempre verificata mentre la parte sinistra dà $x < x_3 = \frac{3x_o}{3-\varepsilon x_o} < 0$. $x_3 - x_o = \frac{\varepsilon x_o^2}{3-\varepsilon x_o} \doteq \delta_{\varepsilon,x_o}$.
Riunendo i due casi si può dire che $\delta_{\varepsilon,x_o} = \frac{\varepsilon x_o^2}{3+\varepsilon|x_o|}$. Come si vede δ_{ε,x_o} dipende tanto da ε quanto da x_o ed è evidente non solo che $\delta_{\varepsilon,x_o} \to 0$ per $\varepsilon \to 0$ (la qual cosa non sorprende) ma anche che $\delta_{\varepsilon,x_o} \to 0$ per $x_o \to 0$ e quindi $\inf_{x_o \in (\frac{a-|a|}{2}, \frac{a+|a|}{2})} \delta_{\varepsilon,x_o} = 0$; quest'ultimo fatto implica che la funzione non è *uniformemente continua* su alcun intervallo $(a, 0)$ con $a < 0$ oppure $(0, a)$ con $a > 0$. Infatti dalla definizione di estremo inferiore segue che $\forall\ \lambda > 0\ \exists\ x_\lambda \in (\frac{a-|a|}{2}, \frac{a+|a|}{2})$ *t.c.* $0 \leq \delta_{\varepsilon,x_\lambda} < \lambda$. Ora se la funzione fosse uniformemente continua si avrebbe $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ *t.c.* $x \in (\frac{a-|a|}{2}, \frac{a+|a|}{2}),\ y \in (\frac{a-|a|}{2}, \frac{a+|a|}{2}),\ |x - y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ e la cosa importante da osservare è che la maggiorazione data da ε "scatta" non appena i punti x y distano fra loro meno di δ_ε e non importa dove i punti siano posizionati all'interno dell'intervallo $(\frac{a-|a|}{2}, \frac{a+|a|}{2})$. Supponiamo quindi che la funzione sia uniformememente continua e che ad un dato valore di ε corrisponda un certo δ_ε. Tenendo fisso ε, scegliamo un x_o tale che $\delta_{\varepsilon,x_o} = \frac{\varepsilon x_o^2}{3+\varepsilon|x_o|} = \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ (possibile in quanto si prende $\lambda = \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ e $x_o = x_\lambda$) e consideriamo i valori di y tali che $|x_o - y| < \delta_\varepsilon$. La continuità della funzione però assicura $|f(x_o) - f(y)| < \varepsilon$ solamente se $|x_o - y| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ (più piccolo di δ_ε) mentre la uniforme continuità ci direbbe $|f(x_o) - f(y)| < \varepsilon$ non appena $|x - y| < \delta_\varepsilon$. Da ciò "segue" la non uniforme continuità. Il precedente argomento, benché sufficientemente esplicativo non è del tutto rigoroso. Infatti se $|x_o - y| \geq \frac{1}{2}\delta_\varepsilon$ non è detto che $|f(x_o) - f(y)| \geq \varepsilon$. La dimostrazione "inattaccabile" della non uniforme continuità consiste nell'usare la sua definizione propria ossia una funzione non è uniformemente continua in un intervallo I se $\exists\ \varepsilon > 0$ *t.c.* $\forall\ \delta > 0\ \exists\ x \in I,\ y \in I,$ *t.c.* $|x - y| < \delta\ \wedge\ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Consideriamo ora un qualsiasi intervallo del tipo $(\frac{a-|a|}{2}, \frac{a+|a|}{2}) \doteq I_a$ e consideriamo una famiglia numerabile di coppie di valori $\{x_k\}, \{x'_k\} \equiv \{\frac{1}{k}\}, \{\frac{1}{k+1}\}$. Tale famiglia verifica le seguenti proprietà: 1) $x_k \to 0$ e $x'_k \to 0$ per $k \to +\infty$ e quindi tanto x_k quanto x'_k appartengono definitivamente ad un qualsiasi intervallo I_a 2) $|x_k - x'_k| \to 0$ per $k \to +\infty$, e quindi dato un qualsiasi $\delta > 0$ troverò sempre almeno una coppia di valori la cui distanza è minore di δ. 3) $|f(x_k) - f(x'_k)| = 3$ e quindi la distanza in ordinate è superire a qualsiasi numero inferiore a tre. Le proprietà 1)–3) implicano che $f(x)$ non è uniformemente continua nell'intervallo considerato. Lo studente/ssa verifichi che le stesse considerazioni valgono se si fosse presa come famiglia $\{x_k\}, \{x'_k\} \equiv \{\frac{1}{k^2}\}, \{\frac{1}{(k+1)^2}\}$ mentre non valgono se si prendesse la famiglia $\{x_k\}, \{x'_k\} \equiv \{\frac{1}{\sqrt{k}}\}, \{\frac{1}{\sqrt{k+1}}\}$. Viceversa supponiamo di considerare la stessa funzione nell'intervallo (a, b) con $a > 0$. Ne segue che $\delta_{\varepsilon,x_o} \geq \frac{\varepsilon a^2}{3+\varepsilon b}$ e quindi l'estremo inferiore è $\frac{\varepsilon a^2}{3+\varepsilon b}$ da cui segue che la funzione è uniformemente continua. Inoltre lo studente/ssa verifichi come in questo caso non si possa applicare la dimostrazione rigorosa di non uniforme continuità.

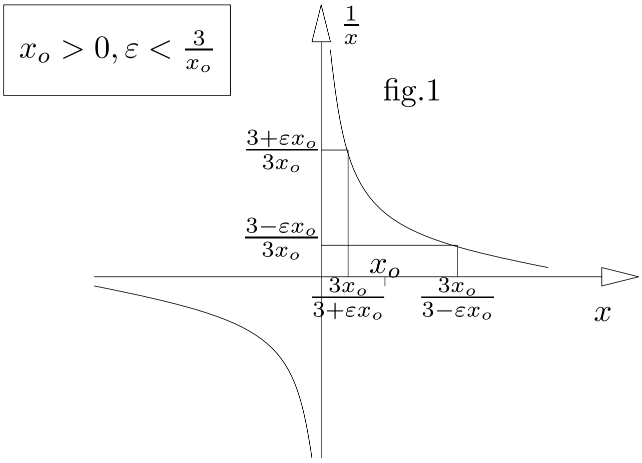


fig.1

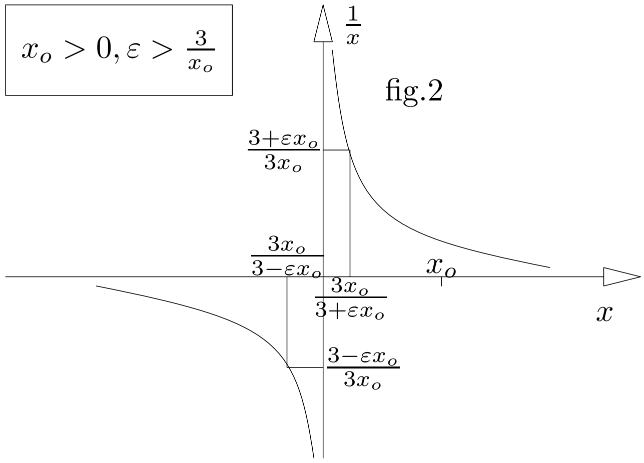


fig.2

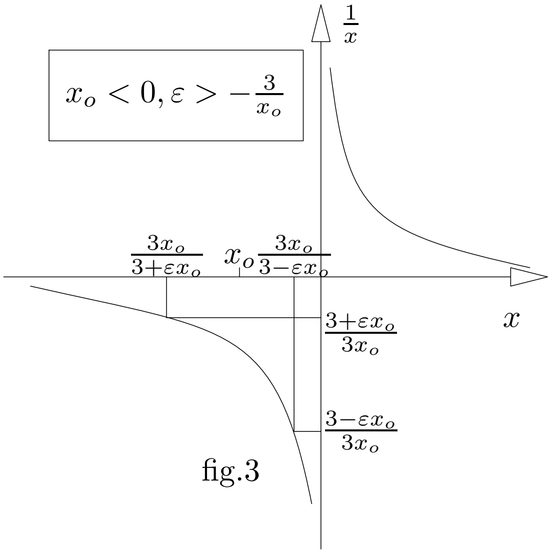


fig.3

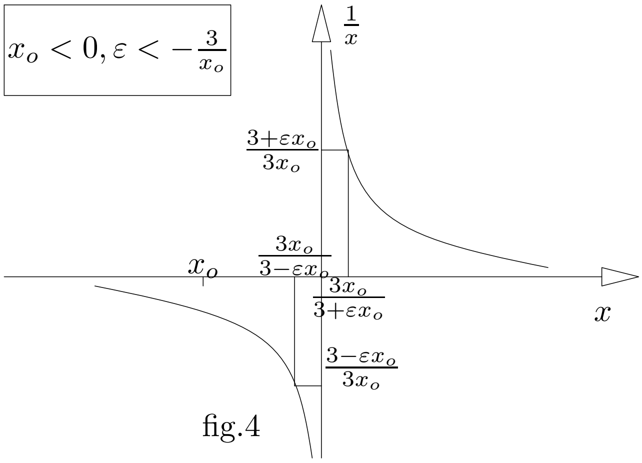


fig.4

1.2 - Secondo - Cominciamo dal limite destro. Bisogna far vedere che $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_{_M}\ t.c.\ x \in (0, \delta_{_M}) \Rightarrow\ f(x) > M$. Se $M \leq 0$ allora $\delta_{_M}$ può qualsiasi numero positivo essendo $\frac{x+3}{x} > 0$ per x positivo. La disequazione da risolvere è $\frac{x+3}{x} > M$ ossia $x(M-1) < 3$ (si è usato il fatto che $x \to 0^+$). Ora se $M \leq 1$ la disequazione è verificata per ogni $x > 0$ e quindi si può in un certo senso dire che $\delta_{_M} = +\infty$. Se invece $M > 1$ allora la disequazione è verificata per $0 < x < \frac{3}{M-1}$ e quindi $\delta_{_M} = \frac{3}{M-1}$ (notare che $\delta_{_M} \to 0$ per $M \to +\infty$).

Per il limite sinistro bisogna verificare se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_{_M}\ t.c.\ x \in (-\delta_{_M}, 0) \Rightarrow\ f(x) < M$. Bisogna risolvere la disequazione $\frac{x+3}{x} < M$ ossia $x(M-1) < 3$. Se $M-1 > 0$ allora è vera per ogni x negativo e quindi $\delta_{_M}$ è un qualsiasi numero positivo. Se $M-1 < 0$ allora si ha $x > \frac{3}{M-1}$ e quindi $\delta_{_M} = \frac{3}{1-M}$.

1.2 - terzo - Limite per $x \to +\infty$. Bisogna verificare se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ x_{_M}\ t.c.\ x > x_{_M}\ \Rightarrow\ f(x) > M$. Dunque bisogna risolvere la disequazione $x^2 + 3 > xM$. È una disequazione di secondo grado il cui discriminante è $\Delta = M^2 - 12$. Se $\Delta < 0$ ossia $-2\sqrt{3} < M < 2\sqrt{3}$ allora per il segno del trinomio di secondo grado $x^2 - xM + 3 > 0$ per ogni x. Da ciò segue che per $-\sqrt{13} < M < 2\sqrt{3}$ prendiamo $x_{_M} = 0$. Deve essere però chiaro che per $2\sqrt{3} < M < 2\sqrt{3}$ si potrebbe prendere $x_{_M}$ qualsiasi numero reale.
Se $M = \pm 2\sqrt{3}$ allora $x_{\mp\sqrt{3}}$
Se viceversa $\Delta > 0$ ossia $M < -2\sqrt{3}\ \vee\ M > 2\sqrt{3}$ e quindi allora si ha la soluzione $x < x_- = \frac{1}{2}(M - \sqrt{M^2-12})\ \vee\ x > x_+ = \frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2-12})$. È immediato verificare che tanto x_- quanto x_+ sono numeri positivi per ogni $M < -2\sqrt{3}\ \vee\ M > 2\sqrt{3}$. In questo caso però si ha $x_{_M} = x_+$ (perché non è possibile prendere $x_{_M} = x_-$?) Si può verificare che $x_+ \to +\infty$

per $M \to +\infty$ ed inoltre ci si può chiedere come ci tende. Ad esempio si può osservare che $\frac{1}{2}(M + \sqrt{M^2 - 12}) > \frac{1}{2}M$ e quindi $x_{_M} > \frac{1}{2}M$.
Nel caso di $\lim_{x\to -\infty}$ si possono rifare i calcoli oppure si può osservare che $f(-x) = -f(x)$ ossia la funzione è dispari. Se ne concluse immediatamente che $f(x) < -M$ non appena $x < -x_M$ e quindi il risultato è ottenuto.

1.2 - quarto - Limite a $+\infty$. $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon$ *t.c.* $x > x_\varepsilon \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$. Poiché $f(x) > 0$ per $x > 0$ si deve risolvere $\varepsilon x^2 - x - 3 > 0$ e quindi $x < x_- = \frac{1}{2\varepsilon}(1 - \sqrt{1 + 12\varepsilon^2}) \vee x > x_+ = \frac{1}{2\varepsilon}(1 + \sqrt{1 + 12\varepsilon^2})$. Essendo $x_- < 0$ e $x_+ > 0$ si ha $x_\varepsilon = x_+$. In questo caso si può verificare che $x_\varepsilon \to +\infty$ se $\varepsilon \to 0$ ed inoltre $x_\varepsilon > \frac{1}{2\varepsilon}$.

Per quanto concerne il limite a $-\infty$ si deve risolvere $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon$ *t.c.* $x < x_\varepsilon \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$. Se $x < -3$ la disequazione diventa $-\frac{x+3}{x^2} < \varepsilon$ ossia $\varepsilon x^2 + x + 3 > 0$ ed il discriminante è $1 - 12\varepsilon^2$. Se $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{12}}$ allora $\varepsilon x^2 + x + 3 > 0$ per qualsiasi valore di x e quindi si può prendere $x_\varepsilon = -3$. Se invece $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{12}}$ allora si ha $x < x_- = \frac{1}{2\varepsilon}(-1 - \sqrt{1 - 12\varepsilon^2})\ \vee\ x > x_+ = \frac{1}{2\varepsilon}(-1 + \sqrt{1 - 12\varepsilon^2})$ e quindi si può prendere $x_\varepsilon = x_-$ ed osservare che $x_\varepsilon < -\frac{1}{2\varepsilon}$.

2.2 - Primo - È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$(5.2). $f(x) = \frac{\tan 3x}{3x}\frac{2x}{\sin 2x}\frac{3}{2}$. Scriviamo $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ dove $h(x) = \frac{\tan 3x}{3x}$ $g(x) = \frac{2x}{\sin 2x}$.

Per il momento immaginiamo che $\lim_{x\to x_o} h(x) = l$, $\lim_{x\to x_o} g(x) = l'$. Sappiamo che $\forall\ \varepsilon' > 0\ \exists\ \delta^h_{\varepsilon'}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta^f_{\varepsilon'}\ \Rightarrow\ |h(x) - l| < \varepsilon'$ e $\forall\ \varepsilon' > 0\ \exists\ \delta^g_{\varepsilon'}$ *t.c.* $|x - x_o| < \delta^g_{\varepsilon'}\ \Rightarrow\ |g(x) - l'| < \varepsilon'$. Dalla relazione di limite sappiamo che $|g| \le \max\{|l' + \varepsilon|, |l' - \varepsilon|\} \le |l'| + \varepsilon$ per $|x - x_o| < \delta^g_{\varepsilon'}$.

Si ha $|h(x) \cdot g(x) - l \cdot l'| \le |h(x) - l| \cdot |g(x)| + |l| \cdot |g(x) - l'| \le \varepsilon'(|l'| + \varepsilon') + |l'|\varepsilon' \le \varepsilon'(|l| + 2|l'|)$ non appena $|x - x_o| \le \min\{\delta^h_{\varepsilon'}\delta^g_{\varepsilon'}\}$ e $\varepsilon' < |l'|$. Dato ora un qualsiasi $\varepsilon > 0$, scegliamo $\varepsilon' < \min\{\dfrac{\varepsilon}{|l| + 2|l'|}, |l'|\}$. Ne segue che se $|x - x_o| \le \min\{\delta^h_{\varepsilon'}\delta^g_{\varepsilon'}\} \overset{\text{def}}{=} \delta^f_\varepsilon$, $\varepsilon' < \min\{\dfrac{\varepsilon}{|l| + 2|l'|}, |l'|\}$, allora $|f(x) - l \cdot l'| < \varepsilon$

Quello che dunque va calcolato è $\delta^h_{\varepsilon'}$ e $\delta^g_{\varepsilon'}$. Cominciamo dal secondo. Dalla trigonometria sappiamo che $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ (si tenga comunque presente che noi abbiamo $\frac{2x}{\sin 2x}$.) Di nuovo immaginiamo che la sitauzione genericamente sia del tipo $p(x) \le q(x) \le r(x)$ e che $\lim_{x\to x_o} p(x) = l$, $\lim_{x\to x_o} r(x) = l$.

Scrivendo $|q(x) - l| = |q(x) - p(x) + p(x) - l| \le |r(x) - p(x)| + |p(x) - l| \le |r(x) - l| + 2|p(x) - l| < \varepsilon'$ non appena $|p(x) - l| < \frac{\varepsilon'}{3}$ e $|r(x) - l| < \frac{\varepsilon'}{3}$. Se quindi $|x - x_o| < \min\{\delta^p_{\frac{\varepsilon'}{3}}, \delta^r_{\frac{\varepsilon'}{3}}\}$ abbiamo $|q(x) - l| < \varepsilon'$. Nel nostro caso $x_o = 0$, $p(x) \equiv 1$ e $r(x) = \frac{1}{\cos x}$. $\delta^1_{\varepsilon'} = +\infty$ mentre $\delta^{\frac{1}{\cos}}_{\frac{\varepsilon'}{3}}$ va calcolato.

$\frac{1}{\cos x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\cos x(1 + \cos x)} \le 4x^2$, non appena $-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{\pi}{6}$. Se ora $4x^2 < \frac{\varepsilon'}{3}$ abbiamo $\delta^{\frac{1}{\cos}}_{\frac{\varepsilon'}{3}} = \min\{\frac{\pi}{6}, \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{3}}\}$ Poiché al posto di $\frac{x}{\sin x}$ abbiamo $\frac{2x}{\sin 2x}$ ne segue che $\min\{\frac{\pi}{12}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\} = \delta^{\frac{2x}{\sin 2x}}_{\varepsilon'}$ (un primo risultato).

Rimane da calcolare $\delta^{\frac{\tan 3x}{3x}}_{\frac{\varepsilon'}{3}}$. $\frac{\tan 3x}{3x} - 1 = \frac{\sin 3x}{3x}(\frac{1}{\cos 3x} - 1) + (\frac{\sin 3x}{3x} - 1)$. $|\frac{\sin 3x}{3x}(\frac{1}{\cos 3x} - 1) + (\frac{\sin 3x}{3x} - 1)| \le |\frac{1}{\cos 3x} - 1| + |1 - \cos 3x|$ e vogliamo risolvere la disequazione $\frac{\tan 3x}{3x} - 1. < \varepsilon'$. Risolviamo quindi le due disequazione $|\frac{1}{\cos 3x} - 1| < \frac{\varepsilon'}{2}$ e $|1 - \cos 3x| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

(5.2) I dettagli nel calcolo che segue sono a beneficio soprattutto di quegli studenti che avessero un libro di testo che certamente dimostra i teoremi da usare ma le cui dimostrazioni sono alquanto scarne

Da $\delta_{\frac{\varepsilon'}{3}}^{\frac{1}{\cos x}} = \min\{\frac{\pi}{6}, \frac{\varepsilon'}{2\sqrt{3}}\}$ ottenuta prima ricaviamo $\delta_{\frac{\varepsilon'}{2}}^{\frac{1}{\cos x}} = \min\{\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}\varepsilon'}{4}\}$ e quindi $\delta_{\frac{\varepsilon'}{2}}^{\frac{1}{\cos 3x}} = \min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\}$

$(1-\cos x) = \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} \leq 2x^2$ per $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ e quindi per $|x| \leq \min\{\frac{\pi}{6}, \frac{\varepsilon'}{2}\}$ si ha $|1-\cos x| < \frac{\varepsilon'}{2}$. Dunque per $|x| \leq \min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{3}\}$ si ha $|1-\cos 3x| < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Se quindi $|x| < \min\left\{\{\min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\}, \min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{3}\}\right\} = \min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\}$ allora $|\frac{\tan 3x}{3x} - 1| < \varepsilon'$

Alla fine, riunendo i due risultati $|x| < \min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\}$ e $|x| < \min\{\frac{\pi}{12}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\}$ si ottiene $|x| < \min\{\frac{\pi}{18}, \frac{\varepsilon'}{4\sqrt{3}}\}$ e si ricordi che $\varepsilon' < \min\{\dfrac{\varepsilon}{|l|+2|l'|}, |l'|\},$.

2.2 - Secondo - Si scrive $\pi x = \pi(x-1) + \pi$ ottenendo $\sin \pi x = -\sin \pi(x-1)$ (usare un pò di trigonometria) e quindi scrivendo $x-1 = t$ si ottiene $\lim_{t\to 0} \frac{\pi t}{\sin \pi t} \frac{-1}{\pi} = \frac{-1}{\pi}$.

2.2 - Terzo - Si possono usare formule trigonometriche che danno qualcosa di molto simile a quanto si ottiene scivendo $\sin x = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$ da cui $\frac{\sin x - \sin a}{x-a} = \frac{\sin(x-a)\cos a + (\cos(x-a)-1)\sin a}{x-a}$. Ora si cambia variabile $x-a = t$ ed osservando che $\lim_{t\to 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0$ e $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ si ottiene il risultato.

2.2 - Quarto - Dopo aver osservato che $\frac{1}{x} \to 0^+$ per $x \to +\infty$ e quindi $\sin\frac{1}{x} > 0$ definitivamente, si scrive $\lim_{x\to+\infty} \log \frac{x}{\sin\frac{1}{x}} = 0$ usando $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ ossia (cambiando variabile) $\lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$. *Non si commetta il grave errore, purtroppo riscontrato sovente negli studenti, di scrivere* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1$

3.2 - Primo - Limite a $+\infty$ - È una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$ e razionalizzando si ottiene $\lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{\sqrt{x^4-x^2}+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^{-2}}+1)} = -\frac{1}{2}$
Limite a $-\infty$ - stesso identico procedimento
La applicazione della definizione comporta gli stessi calcoli del terzo esercizio di **7.2** per cui $x_\varepsilon = \sqrt{\frac{1+2\varepsilon}{2}} \max\{1, \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\}$

3.2 - Secondo - Limite a $+\infty$ - Si usa la relazione $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ per cui $(x^3-x)^{1/3} - x = \frac{x^3-x-x^3}{(x^3-x)^{2/3}+x(x^3-x)^{1/3}+x^2}$. Dunque si ottiene $\frac{-x}{(x^3-x)^{2/3}+x(x^3-x)^{1/3}+x^2} = \frac{-x}{x^2[(1-x^{-2})^{2/3}+(1-x^{-2})^{1/3}+1]}$ da cui si evince che il limite è zero.
Il limite a $-\infty$ è identico al precedente. Si possono rifare i calcoli oppure si può osservare che la funzione è dispari. Infatti $f(-x) = ((-x)^3 - (-x))^{\frac{1}{3}} - (-x)) = (-x^3+x)^{\frac{1}{3}} + x = -\big[(x^3-x)^{1/3} - x\big] = -f(x)$.
Applicando la definizione per $x \to -\infty$ si ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon$ *t.c.* $x < x_\varepsilon \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$. Poiché $(x^3-x)^{1/3} - x > 0$ per $x < 0$, risolviamo la disequazione $(x^3-x)^{1/3} - x < \varepsilon$ ossia $x < x_\varepsilon \frac{-1-3\varepsilon^2-\sqrt{1+6\varepsilon^2+3\varepsilon^4}}{6\varepsilon}$.
Per $x \to +\infty$ si possono rifare i conti oppure osservare che essendo f dispari, per $x > -x_\varepsilon$ si ha $0 < -f(x) < \varepsilon$ ossia $0 > f(x) > -\varepsilon$

3.2 - Terzo - Limite a $+\infty$ - Ripetendo pari pari i calcoli fatti per il secondo esercizio dello stesso gruppo si ottiene che il limite è $-\frac{1}{3}$. Infatti $(x^3-x^2)^{1/3} - x =$
$= \frac{x^3-x^2-x^3}{(x^3-x^2)^{2/3}+x(x^3-x^2)^{1/3}+x^2} = \frac{-x^2}{x^2[(1-x^{-1})^{2/3}+(1-x^{-1})^{1/3}+1]}$ da cui il limite è $-\frac{1}{3}$.

Applicando la definizione per $x \to +\infty$ si ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon$ *t.c.* $x > x_\varepsilon \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$. Poiché $(x^3-x^2)^{1/3}-x > 0$ per $x < \frac{3}{8}$, risolviamo la disequazione $-(x^3-x^2)^{1/3}+x-\frac{1}{3} < \varepsilon$ che diventa $3\varepsilon x^2 - 3x(\frac{1}{3}+\varepsilon)^2 - (\frac{1}{3}+\varepsilon)^3 > 0$ e quindi $x > x_\varepsilon = \max\{\frac{3(\frac{1}{3}+\varepsilon)^2+(\frac{1}{3}+\varepsilon)\sqrt{(1+3\varepsilon)(1+4\varepsilon)}}{6\varepsilon}, \frac{3}{8}\}$
Nel caso del limite a $-\infty$ si ha sempre zero come limite ed inoltre si ha $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon$ *t.c.* $x < x_\varepsilon\ \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$. Poiché $(x^3-x^2)^{1/3}-x > 0$ per $x < \frac{3}{8}$, risolviamo la disequazione $(x^3-x^2)^{1/3}-x+\frac{1}{3} < \varepsilon$ che diventa $3\varepsilon x^2 + 3x(\frac{1}{3}-\varepsilon)^2 - (-\frac{1}{3}+\varepsilon)^3 > 0$ e quindi $x < x_\varepsilon = \min\{\frac{-3(-\frac{1}{3}+\varepsilon)^2-|-\frac{1}{3}+\varepsilon|\sqrt{1-2\varepsilon-12\varepsilon^2}}{6\varepsilon}, \frac{3}{8}\}$ (se il discriminante fosse negativo allora $x_\varepsilon = \frac{3}{8}$).

4.2 - Primo - Dopo avere osservato che $\sin x > 0$ per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ riscriviamo il tutto nel seguente modo $e^{\ln((\sin x)^{\frac{1}{\cos x-1}})} = e^{\frac{1}{\cos x-1}\ln\sin x}$. L'esponente tende a $+\infty$ per cui il limite è $+\infty$

4.2 - Secondo - $e^{\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\pi-x}\ln\tan x}$. Sia $t = x-\pi$ da cui $t \to 0^+$ per $x \to \pi^+$. Il limite si può riscrivere come $\lim_{t\to 0^+} e^{-\frac{1}{t}\ln t} = 0$ essendo un limite notevole

4.2 - Terzo - è una forma indeterminata del tipo $0\cdot\pm\infty$; Limite destro: $\sin(ax+\arctan\frac{b}{x}) = \sin ax\cos\arctan\frac{b}{x} + \cos ax\sin\arctan\frac{b}{x}$. Dall'esercizio **5.1.2** 1) si deduce che
$\cos\arctan\frac{b}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2}}$ mentre $\sin\arctan\frac{b}{x} = \frac{b/x}{\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2}}$. La funzione si può riscrivere quindi come
$x\frac{\sin(ax+\arctan\frac{b}{x})}{\cos ax\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2}}-\sin ax\frac{b/x}{\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2}}}$ e per $x \to 0^+$ il limte della funzione diventa
$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\frac{b}{|b|}}{\cos ax\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2}}-\frac{\sin ax}{ax}\frac{ba}{\sqrt{1+(\frac{b}{x})^2}}}$ da cui deriva $\lim_{x\to 0^+}\frac{x\frac{b}{|b|}\sqrt{x^2+b^2}}{|x|(1-ba\frac{\sin ax}{ax})} = \frac{|b|\frac{b}{|b|}}{1-ab} = \frac{b}{1-ab}$.
Il limite sinistro produce gli stessi calcoli in quanto $\lim_{x\to 0^-} x\sin(ax+\arctan\frac{b}{x}) = -x\frac{b}{|b|}$ da cui deriva lo stesso limite. Alternativamente si può notare che $f(x) = -f(-x)$

5.2 - Primo - È una forma indeterminata del tipo 1^∞. In genere si seguono due possibili procedimenti. Il primo consiste nello scrivere f^φ come $e^{\varphi\log f}$. Il secondo nello scrivere $f^\varphi = ((1+(f-1))^{\frac{1}{(f-1)}})^{\varphi(f-1)}$ ed osservare che $\lim_{f\to 1}(1+(f-1))^{\frac{1}{(f-1)}} = e$. Dunque il limite può risolversi come $\lim e^{\varphi(f-1)}$ che a volte è più immediato risolvere.
Dunque $\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a})\right)^{1/x-a} = \lim_{x\to a} e^{(\frac{\sin x}{\sin a}-1)\frac{1}{x-a}}$. $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \cos a$ (vedi l'esercizio **2.2**) e quindi il limite vale $e^{\cot a}$.

5.2 - Secondo - Da quanto detto prima si scrive $\lim_{x\to 1} e^{\sin\pi x\frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}} = e^{-1}$.

6.2 - Primo - Se $a > 1$ il limite è $+\infty$ (non vi sono forme indeterminate). Se $a = 1$ è una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$. Procedendo come in **5.2** bisogna esaminare $\lim_{x\to+\infty} x(\frac{1}{2+x}) = 1$ da cui $L = e$. Se $a < 1$ è una forma del tipo $0^{+\infty}$ e quindi $L = 0$

6.2 - Secondo - primo quadrante sul piano (a,b) $a \geq 0,\ b \geq 0$. Sia $a > b \geq 0$. Scriviamo la funzione come $x^a(1+x^{b-a}\sin x)$ e $b-a < 0$ chiaramente. Ne segue che $\lim_{x\to+\infty} x^{b-a}\sin x = 0$ in quanto si può usare il teorema del confronto avendo la maggiorazione $0 \leq |x^{b-a}\sin x| \leq x^{b-a}$. È ora chiaro che il limite è $+\infty$. Va osservato che mentre $\lim_{x\to+\infty} x^{b-a}$ esiste e fa 0 *non esiste* $\lim_{x\to+\infty}\sin x$ (dimostrarlo) ma il limite del prodotto di $\sin x$ e x^{b-a} esiste. Supponiamo inoltre di voler applicare la definizione di limite e di voler trovare le varie grandezze che di essa fanno parte.
Il primo passo consiste nel mostrare che se $x > 2^{a-b}$ allora $x^{b-a}|\sin x| \leq \frac{1}{2}$ e la verifica è immediata non appena si nota che $|x^{b-a}\sin x| \leq x^{b-a}|\sin x| \leq x^{b-a}$.
Il secondo passo consiste nelle minorazioni $1+x^{b-a}\sin x \geq 1-|x^{b-a}\sin x| \geq 1-x^{b-a}|\sin x| \geq 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ se $x > 2^{a-b}$

Il terzo passo è dato da $x^a(1+x^{b-a}\sin x)\geq \frac{1}{2}x^a$ per $x>2^{a-b}$.
Nel quarto ed ultimo passo si applica la definizione ossia $\forall\ M>0\ \exists\ x_{_M}\ t.c.\ x>x_{_M}\ \Rightarrow f(x)>M$. Ora noi abbiamo $f(x)>\frac{1}{2}x^a$e dunque risolviamo la disequazione $\frac{1}{2}x^a>M$ ossia $x>(2M)^{1/a}$ e quindi $x_{_M}=\max\{2^{b-a},(2M)^{1/a}\}$ (6.2). Tale soluzione vale pure se $M\leq 0$ in quanto $\frac{1}{2}x^a\geq M$ non appeba $x>0$
Sempre nel caso $a\geq 0,\ b\geq 0$ sia ora $0\leq a\leq b$. Si può riscrivere la funzione come $x^a(1+x^{b-a}\sin x)$ ma stavolta $b-a\geq 0$. Supponiamo che $a=b$ e quindi $f(x)=x^a(1+\sin x)$ e dimostriamo che il limite non esiste. Dobbiamo dimostrare che
$\forall\ l\in\mathbf{R}\ \exists\ \varepsilon_l>0\ t.c.\ \forall\ x_o\in\mathbf{R}\ \exists\ x_{\varepsilon_{l},l}>x_o\ t.c.\ |f(x_{\varepsilon_{l},l})-l|\geq\varepsilon_l$.
Tale espressione *è equivalente* alla seguente
$\forall\ l\in\mathbf{R}\ \exists\ \varepsilon_l>0\ t.c.\ \forall\ x_o\in\mathbf{R}\ x>x_o\ \not\Rightarrow\ |f(x)-l|<\varepsilon$.(7.2)
Supponiamo che $l<0$. Poiché $f(-\frac{\pi}{2}2k\pi)\equiv 0$ si può prendere $\varepsilon_l=\frac{|l|}{2}$ ed osservare che per ogni $x>0$, prendendo $x_n=-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ dove x_n è il valore immediatamente successivo ad x ossia $|x-x_n|\leq\pi$, si ha $f(x_n)=0$ per cui $|f(x_n)-l|=|l|\geq\varepsilon_l=\frac{|l|}{2}$
Supponiamo ora che $a=b>0$ e $l\geq 0$. Poniamo $\varepsilon_l=\max\{\frac{l}{2},\frac{1}{2}\}$ e sia $\{x_k\}=\{2k\pi\}$ dimodoché $f(x_k)=(2k\pi)^a$. Sia k_l il più piccolo intero tale che $f(x_{k_l})\geq l+\varepsilon_l$ $(k_l=1+\big[\frac{(l+\varepsilon_l)^{1/a}}{2\pi}\big])$. Per ogni $x>0$, prendo un valor intero di k tale che $x_k>\max\{x_{k_l},x\}$. In tal modo si ottiene $f(x_k)-l\geq f(x_{k_l})-l$ e quindi $f(x_k)-l\geq\varepsilon_l$ è implicata da $f(x_{k_l})-l.\geq\varepsilon_l$ ossia $(2k_l\pi)^a\geq l+\varepsilon_l$.
Il caso precedente è contorto (solo in apparenza) in quanto si è voluto trattare allo stesso tempo $l>0$ e $l=0$.
Sia ora $a=0$. Ne segue che $f(x)=1+\sin x$. Il caso $l<0$ è uguale a quando $a>0$. Se $l>0\ \wedge\ l\neq 1$ poniamo $\varepsilon_l=\frac{|l-1|}{2}$. Per ogni $x>0$ prendiamo $x_k=2\pi k$ con $x_k>x$ da cui $f(x_k)=1$ e quindi $|1-l|\geq\frac{|1-l|}{2}$.
Se $l=1$ si prende $\varepsilon_1=\frac{1}{2}$ e $\{x_k\}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ per cui si ha il risultato.

Come si vede per dimostrare la non esistenza di un limite semplice come il precedente è necessario procedere ad un certo numero di operazioni dipendentemente dai valori "importanti" che si danno ad l. Tale sitazione non è chiaramente presente quando il limite esiste in quanto si applica la definizione solamente a quel valore di l che si ha ragione di ritenere sia il limite. In tal caso viene in aiuto il `teorema 4.8` per il quale basta trovare due sottosuccessioni che tendono verso lo stesso punto di accumulazione e per le quali i limiti sono diversi oppure per almeno una di esse il limite non esiste. Nel caso della funzione $f(x)=x^a(1+\sin x)$ prendiamo $\{x_k\}=\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi\}$ e $\{x'_k\}=\{2k\pi\}$. Se $a>0$ $f(x_k)\equiv 0$ mentre $f(x'_k)\to+\infty$ e quindi non esiste il limite. Se $a=0$ $f(x'_k)\equiv 1$ da cui la non esistenza del limite anche in questo caso. Come si vede i vantaggi dell'uso del teorema ponte sono notevoli se si vogliono abbreviare i calcoli.
Sia ora $a<0$ e $b\geq 0$. Sia $x_n=\pi n$ e $y_n=\frac{\pi}{2}+2n\pi$. $f(x_n)\to 0$ mentre $f(y_n)\to+\infty$ se $b>0$ e $f(y_n)\to 1$ se $b=0$. In ogni casi il limte non esiste.
Sia $a\leq 0$ e $b<0$. Se $a<0$ e $b<0$ il limte è zero. Infatti $f(x)$ è somma di due funzioni cascuna delle quali tende a zero (usare la maggiorazione $|x^b\sin x|\leq x^b$ ed il teorema del confronto). Se $a=0$ e $b<0$ gli stessi argomenti ci dicono che il limite fa 1.
Sia $a>0$ e $b<0$. $f(x)$ è somma di due funzioni. La prima è $x^a\to+\infty$ mentre la seconda è $x^b\sin x\to 0$ per cui la somma tende a $+\infty$.

6.2 - Terzo - Il limite è dato da $\lim_{x\to 0}\exp(\frac{\cos x-1}{\sin x})$ ed usando $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ e

(6.2) Lo studente/essa deve convincersi che risolvere un limite significa trovare δ in funzione di ε oppure x_M in funzione di M etc. a seconda dei vari casi. Il fatto che spesso ci si accontenti di dire quale è il valore del limite facendo ricorso a limiti notevoli o ad osservazioni più o meno evidenti non deve trarre in inganno. Ci si accontenta solo per questioni di brevità. È viceversa essenziale saper calcolare le quantità che fanno parte delle varie definizioni.
(7.2) Notare che ε dipende da l

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$ si ha che il limite è $e^0=1$.

7.2 - Primo - $\lim_{x\to+\infty}\exp(2x\sin\frac{1}{x})=e^2$ usando sempre $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$ stavolta però dopo un cambio di variabile.

7.2 - Secondo - Usando $\lim_{x^2\to 0}\frac{(1\pm x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2}=\pm\frac{1}{3}$ e $\lim_{2x\to 0}\frac{(1\pm 2x)^{\frac{1}{4}}-1}{2x}=\pm\frac{1}{4}$ si ha $(1+x^2)^{1/3}-(1-2x)^{1/4}=1+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)-1+\frac{1}{4}2x+o(x)$ e quindi la funzione diventa $\frac{\frac{1}{3}x^2+o(x^2)+\frac{1}{4}2x+o(x)}{x+x^2}=\frac{1}{2}\frac{1+2o(1)+\frac{2}{3}x+2o(x)}{1+o(x)}$ per cui il limite è $\frac{1}{2}$.

7.2 - Terzo - Limite a $+\infty$ - Razionalizzando e manipolando un poco si ottiene $\frac{-x}{x(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1)}$ da cui si ottiene $L=-\frac{1}{2}$. Per quanto riguarda il limite sinistro non si ha una forma indeterminata e quindi il limite è $+\infty$.
Eseguendo i calcoli si deve avere $\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ x_\varepsilon\ t.c.\ x>x_\varepsilon\Rightarrow\ |f(x)+\frac{1}{2}|<\varepsilon$. La non negatività del radicando impone $x\le 0\ \vee\ x\ge 1$. Essendo $x\ge 1$ si ha $\sqrt{x^2-x}-x+\frac{1}{2}<0$ per cui la disequazione del limite diventa $-\sqrt{x^2-x}+x-\frac{1}{2}<\varepsilon$ ossia $\sqrt{x^2-x}>x-\frac{1}{2}-\varepsilon$. Tale disequazione necessita di due discussioni. La prima si ha quando $x-\frac{1}{2}-\varepsilon<0$ ossia $x<\frac{1}{2}+\varepsilon$ che è però da escludere in quanto nella definizione deve potersi avere x illimitata a destra. La seconda è $x\ge\frac{1}{2}+\varepsilon$. La disequazione $\sqrt{x^2-x}>x-\frac{1}{2}-\varepsilon$ diventa $2\varepsilon x>(\frac{1}{2}+\varepsilon)^2$ e quindi $x_\varepsilon=\max\{\frac{1}{2\varepsilon}(\frac{1}{2}+\varepsilon)^2,\frac{1}{2}+\varepsilon\}$ e si può verificare che $x_\varepsilon\ge 1$ per ogni valore di ε

Vediamo ora $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}-x=+\infty$. $\forall\ M>0\ \exists\ x_{_M}\ t.c.\ x<x_{_M})\Rightarrow\ f(x)>M.$
Se $M>0$ ma $x+M<0$ ossia $x<-M$ allora la disequazione è vera per ogni $x<-M$ da cui segue che $x_{_M}=-M$ (se $M+x\ge 0$ non è interessante in quanto sarebbe x non illimitato a sinistra come invece deve).

8.2 - Primo - Si usi l'esercizio **3.1.2** 6) dove al posto di x vi è $\frac{x+1}{x+2}<1$ ed al posto di y vi è 1. Per $x\to+\infty$ $\arctan\frac{x+1}{x+2}-\arctan 1$ è compreso fra $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ e dunque si ha $\arctan\frac{x+1}{x+2}-\arctan 1=\arctan\frac{-1}{2x+3}$. Eseguiamo ora alcuni (ovvi) cambi di variabili. Il primo cambio è $2x+3=t$ per cui il limite diventa $\lim_{t\to+\infty}\frac{t-3}{2}\arctan\frac{-1}{t}$; il secondo cambio è $\frac{-1}{t}=z$ per cui il limite diventa $\lim_{z\to 0}(-\frac{1}{2z}-\frac{3}{2})\arctan z$ che evidentemente è uguale a $\lim_{z\to 0}-\frac{1}{2z}\arctan z$. Il terzo cambio è $\arctan z=u$ da cui $\lim_{u\to 0}\frac{-u}{2\tan u}=\lim_{u\to 0}\frac{-1}{2\frac{\tan u}{u}}$ ed essendo $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ mentre $\lim_{x\to 0}\cos x=1$ il limite è $\frac{-1}{2}$.

8.2 - Secondo - Dalla trigonometria si ha
$\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}=-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})$ per cui $|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}|\le 2|\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})|\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ e quindi per $x>[(\frac{1}{\varepsilon})^2]$ si ha $|\cos\sqrt{x+1}-\cos\sqrt{x}|\le\varepsilon$.

Nella maggiorazione $|-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})|\le\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ si sono usate due diverse maggiorazioni del seno. La prima è data da $|\sin a\le|a|$ e la seconda è $|\sin a|\le 1|$ Si puó verificare che usando le due maggiorazioni in combinazione diversa dalla precedente non si arriverebbe al risultato. Infatti se si usasse sempre la seconda si otterrebbe $|-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})|\le 2$ che è certamente vera ma non consente di usare il teorema del confronto. Se si usasse sempre la prima si avrebbe $|-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})|\le 2(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})\le\frac{1}{2}$ e ricadremmo nella situazione precedente. Se si usassero la seconda e poi la prima rispettivamente si avrebbe $|-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}-\frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})|\le 2(\frac{1}{2}\sqrt{x+1}+\frac{1}{2}\sqrt{x})$ e stavolta la maggiorazione di destra addirittura non è limitata per $x\to+\infty$.

Si potrebbe osservare che una indicazione circa il valore del limite viene dal fatto che 1 *è trascurabile in* $\sqrt{x+1}$, *quando* $x \to +\infty$; *quindi l'espressione* $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ *"è circa uguale" a* $\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0$. *Assumere tale ragionamento come indicativo non è sbagliato ma bisogna comunque scrivere la dimostrazione altrimenti si incappa in errori grossolani come dimostra il seguente esempio. Si vuol sapere* $\lim_{x\to+\infty} \cos\sqrt{x+\sqrt{x}} - \cos\sqrt{x}$. *Se si trasponesse a questo caso il ragionamento di plausibilità fatto prima, si direbbe che* $\sqrt{x}$ *è trascurabile rispetto ad* x *e quindi anche in questo caso il limite vale* 0 *ma così non è. I*

Innanzitutto osserviamo che $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(\frac{1}{2}\sqrt{x_k+\sqrt{x_k}} - \frac{1}{2}\sqrt{x_k}) = \frac{1}{4}$ *per qualsiasi successione* x_k *che tende a* $+\infty$. *Sia* $\{x_k\} = \pi^2(1+4k)^2$, $\quad \{x'_k\} = 4\pi^2(1+2k)^2$. *È chiaro che* $\lim_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{x_k+\sqrt{x_k}} - \frac{1}{2}\sqrt{x_k}) = \sin\frac{1}{4}$ *ed analogamente per* x'_k. *Dalla relazione* $\cos\sqrt{x+\sqrt{x}} - \cos\sqrt{x} = -2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x})$ *non ci resta che studiare* $\lim_{k\to+\infty} \sin(\frac{1}{2}\sqrt{x_k+\sqrt{x_k}} + \frac{1}{2}\sqrt{x_k})$ *ed ugualmente per* x'_k.

$$\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x_k+\sqrt{x_k}} + \frac{1}{2}\sqrt{x_k}) = \sin\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\cos\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x_k}}} + \cos\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\sin\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x_k}}}$$

$\cos\frac{1}{2}\sqrt{x_k} = 0$ *mentre* $\sin\frac{1}{2}\sqrt{x_k} = 1$ *per ogni* k *per cui la precedente espressione diventa* $\cos\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x_k}}}$. *Dalla relazione* $\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x_k}}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x_k}} + o(\frac{1}{\sqrt{x_k}})$ *(che viene dalla definizione di limite) si ha* $\sqrt{x_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x_k}}} = \sqrt{x_k} + \frac{1}{2} + o(1)$ *e quindi* $\cos\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x_k}}} = \cos\big(\frac{1}{2}\sqrt{x_k} + \frac{1}{4} + o(1))\big) = \cos\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\sin(\frac{1}{4}+o(1)) + \sin\frac{1}{2}\sqrt{x_k}\cos(\frac{1}{4}+o(1)) = \cos(\frac{1}{4}+o(1))$. *Ne segue che* $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x_k+\sqrt{x_k}} + \frac{1}{2}\sqrt{x_k}) = \cos\frac{1}{4}$ *e quindi* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\cos\sqrt{x_k+\sqrt{x_k}} - \cos\sqrt{x_k} = -2\sin\frac{1}{4}\cos\frac{1}{4} = -\sin\frac{1}{2}$

Rifaccciamo ora i conti con $\{x'_k\}$. $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}(\frac{1}{2}\sqrt{x'_k+\sqrt{x'_k}} - \frac{1}{2}\sqrt{x'_k}) = \frac{1}{4}$ *e quindi*

$$\lim_{k\to+\infty}\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x'_k+\sqrt{x'_k}} - \frac{1}{2}\sqrt{x'_k}) = \sin\frac{1}{4}.$$

$$\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x'_k+\sqrt{x'_k}} + \frac{1}{2}\sqrt{x'_k}) = \sin\frac{1}{2}\sqrt{x'_k}\cos\frac{1}{2}\sqrt{x'_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x'_k}}} + \cos\frac{1}{2}\sqrt{x'_k}\sin\frac{1}{2}\sqrt{x'_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x'_k}}}$$

e dal fatto che $\cos\frac{1}{2}\sqrt{x'_k} = -1$ *mentre* $\sin\frac{1}{2}\sqrt{x'_k} = 0$ *resta solamente* $\cos\frac{1}{2}\sqrt{x'_k}\sin\frac{1}{2}\sqrt{x'_k}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x'_k}}}$ *che tende a* $\sin\frac{1}{4}$. *Riunendo alla fine si ottiene*

$$\lim_{k\to+\infty}\cos\sqrt{x'_k+\sqrt{x'_k}} - \cos\sqrt{x'_k} = 2\sin\frac{1}{4}\sin\frac{1}{4}$$

Per capire meglio le cose è opportuno confrontare le due espressioni $|-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1} - \frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+1} + \frac{1}{2}\sqrt{x})|$ e $|-2\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\sqrt{x})\sin(\frac{1}{2}\sqrt{x+\sqrt{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x})|$. L'argomento del primo seno è $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}$ (che tende ad $\frac{1}{2}$ per

$x \to +\infty$) e $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$ che invece tende a zero. Tenendo conto che poi bisogna moltiplicare per $\sin(\dfrac{1}{2}\sqrt{x+1} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x})$, che non tende ad alcun limite quando $x \to +\infty$, si capisce come i due casi differiscano parecchio

9.2 - Primo - Si può scrivere come $\lim_{x\to+\infty} \exp(x(-\frac{1}{x+1})) = e^{-1}$,

9.2 - Secondo - $\lim_{x\to+\infty} \exp(x(\cos\frac{1}{x} - \ln x)) = 0$

9.2 - Terzo - (Si può fare il limite destro in 0?) Riscriviamo la funzione come $e^{\frac{1}{\sin x}\ln(1-2^x)} = e^{\frac{1-2^x}{x}\frac{x}{\sin x}\frac{\ln(1-2^x)}{1-2^x}}$ per cui il limite è dato da $-\ln 2 \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-2^x)}{1-2^x}$. Cambiando variabile $1-2^x = t$ il limite diventa $\lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{t} = -\infty$ per cui $L = +\infty$.

10.2 - Primo - È una forma indererminata del tipo ∞^0 che può trasformarsi come $e(1+e^{-x}x)^{1/x}$ che non è più una forma indeterminata. Il limite è chiaramente e

10.2 - Secondo - È una forma indererminata del tipo $1^{+\infty}$ che nel limite riscriviamo come $\exp(\frac{1}{x}(e^x - 1 + x))$. Usando il limite notevole $\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)}{x} = 1$ otteniamo e^2.

10.2 - Terzo - È una forma indererminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si usa il fatto che $\log(\cos x) = \log(-1 + \cos x + 1) = (\cos x - 1) + o(\cos x - 1)$ per $x \to 0$. Dunque per $x \to 0$ si ha $\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ ed usando $\sin x = x + o(x^2)$ il limite si riscrive come $\dfrac{x(1+\frac{o(x^2)}{x}) - x^2(\frac{1}{2}+\frac{o(x^2)}{x^2})}{x^2(1+\frac{o(x^2)}{x})}$ e quindi nel limite per $x \to 0^+$ si ha $L = +\infty$ mentre per $x \to 0^-$ si ha $-\infty$.

11.2 - Primo - Forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Scriviamo $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} =$ $= \frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}$ e nel limite per $x \to 0$ dà $\frac{1}{8}$.

11.2 - Secondo e Terzo - *È sbagliato ragionare nel seguente modo (ad esempio nel secondo esercizio):* $\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{x}{x+1}} = 1$ *e quindi* $\lim_{x\to\pm\infty}(x+1)e^{\frac{x}{x+1}} - xe = \lim_{x\to\pm\infty}(x+1)e - xe = \lim_{x\to\pm\infty} e \equiv e$. *Il motivo dell'errore si capisce facilmente se si pensa che che* $e^{\frac{x}{x+1}} = e + o(1)$ *per* $x \to +\infty$ *e quindi si ottiene* $\lim_{x\to+\infty}((x+1)e + (x+1)o(1) - xe) = \lim_{x\to+\infty}(e + xo(1))$. *Ma* $xo(1)$ *è una forma indeterminata e quindi non si può proseguire nel limite.*

Il modo giusto di ragionare è il seguente: si considera il limite notevole $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$ che equivale a dire $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$. Ponendo $y = \frac{1}{x-1}$ con $x \to \pm\infty$ si ha $e^{\frac{1}{x-1}} = 1 + \frac{1}{x-1} + o(\frac{1}{x-1})$. Ora si scrive $f(x) = (x+1)e^{\frac{x}{x+1}} - xe = (x+1)e^{1+\frac{1}{x-1}} - xe = e(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe = e(x+1)\big(1 + \frac{1}{x-1} + o(\frac{1}{x-1})\big) - xe$; da ciò si ottiene $ex + e + e\frac{x+1}{x-1} + e(x+1)o(\frac{1}{x-1}) - xe$ e nel limite di $x \to \pm\infty$ si ha $2e$ (stesso discorso vale per il terzo limite dell'esercizio). Come si vede, quello che prima era $o(1)$ ora diventa $e\frac{1}{x-1} + eo(\frac{1}{x-1})$ e il primo termine dà un contributo non nullo al limite.

12.2 - Primo - È una forma indeterminata del tipo $\infty \cdot 0$. Usando il suggerimento si ha $\log(1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o(\frac{1}{x^2})$ per $x \to \pm\infty$ e quindi $x(1+\frac{1}{x})^x - ex = xe^{x\log(1+\frac{1}{x})} - ex = xe^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})} - ex = xe - \frac{e}{2} + o(1) - ex = -\frac{e}{2} + o(1)$ (avendo usato il limite notevole $e^y = 1 + y + o(y)$ per $y \to 0$).

12.2 - Secondo - È una forma indeterminata del tipo $0 \cdot +\infty$. $(1 + \frac{1}{x^2})^x = e^{x\ln 1+\frac{1}{x^2}}$ per cui sfruttando la relazione data all'inizio si ottiene $e^{x(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^4}+o(x^4))} = e^{\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^3})}$. Ora che $\lim_{x\to+\infty}(e^{\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^3})} - 1)x = 1$ è dato da un limite notevole.

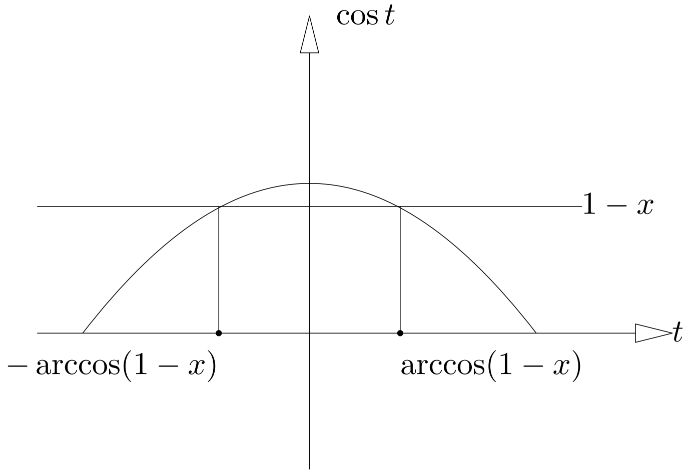
12.2 - Terzo - è una forma indeterminata del tipo del tipo $+\infty - \infty$. Riscriviamo la funzione come $x\log(1+\frac{1}{ax}) = x(\frac{1}{ax}+o(\frac{1}{x}))$ per cui il limte è $\frac{1}{a}$.

13.2 - Primo - L'esponente è una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Razionalizzando diventa $\frac{1}{1+\sqrt{x}}$ per cui il limite è $(\frac{2}{3})^{1/2}$.

13.2 - Secondo - L'esponente è una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ che si può riscrivere come $\frac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ che tende a 2 per $x \to +\infty$. Un calcolo analogo si può fare per la base della potenza e quindi il limite è $\frac{1}{4}$.

13.2 - Terzo - È una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$. Come al solito il limite della funzione è uguale a $\lim_{x\to 1}\exp(\frac{\tan x - \sin x}{1+\sin x}\frac{1}{\sin x}) = \lim_{x\to 1}\exp(\frac{1-\cos x}{(1-\sin x)\cos x}) = 1$.

14.2 - Primo - È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Cambiamo variabile $\cos t = 1-x$ e per $x \to 0^+$ $t\to 0$. Per $t\to 0^+$ si ha $\lim_{t\to 0^+}\frac{\arccos\cos t}{\sqrt{1-\cos t}} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t}{\sqrt{1-\cos t}}$. Ora si ha $1-\cos t = \frac{1}{2}t^2+o(t^2)$ per cui $\sqrt{1-\cos t} = \frac{1}{\sqrt{2}}|t|\sqrt{1+o(1)}$. Inserendo nel limite si ottiene $\lim_{t\to 0^+}\sqrt{2}\frac{t}{|t|\sqrt{1+o(1)}} = \sqrt{2}$. Se viceversa $t\to 0^-$ si ha $t = -\arccos(1-x)$ e dunque $\lim_{t\to 0^-}\sqrt{2}\frac{-t}{|t|\sqrt{1+o(1)}} = \sqrt{2}$. Riguardo ai due cambi di variabile, uno per $t\to 0^+$ ed uno per $t\to 0^-$, bisogna fare attenzione al segno meno. Infatti nell'intorno di $t=0$ la funzione $\cos t$ non è iniettiva e quindi si può separatamente invertire per $t>0$ e $t<0$. Il grafico seguente illustra la situazione



14.2 - Secondo - È una forma indeterminata del tipo$\frac{0}{0}$. Si utilizza $\lim_{x\to 0}\frac{(1\pm x)^{1/2}-1}{x} = \pm 1/2$. Infatti $x\sin x \to 0$ per $x\to 0$ e quindi si ottiene $\sqrt{1+x\sin x} = 1+\frac{1}{2}x\sin x + o(x\sin x)$. Inoltre si ha $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{1+(\cos 2x - 1)} = = 1+\frac{1}{2}(\cos 2x - 1) + o(\cos 2x - 1)$.
Dunque il limite diventa $\frac{1+\frac{1}{2}x\sin x + o(x\sin x) - 1 + \frac{1}{2}(1-\cos 2x) + o(1-\cos 2x)}{\tan^2\frac{x}{2}}$ ed usando ora $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ si perviene a $\frac{\frac{1}{2}x^2+x^2}{\frac{x^2}{4}}$ il cui limite è 6.

14.2 - Terzo - Razionalizzando si ha $\frac{\pi - \arccos x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}$. Poi uso la **3.1.2** 3) ottenendo $\frac{\pi + \arcsin x}{\sqrt{x+1}(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}$ ed usando la **3.1.2** 8) si perviene a $\frac{\pi - 2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{x+1}(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}$ la quale, usando la **3.1.2** 2), diventa $\frac{2\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\sqrt{x+1}(\sqrt{\pi}+\sqrt{\arccos x})}$ e nel limite di $x\to -1^+$ fa $L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

15.2 - Primo - È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Si usano le relazioni $e^{x^2} = 1+x^2+o(x^2)$,

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ e quindi il limite è $\frac{3}{2}$

15.2 - Secondo - È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Usiamo $\lim_{x^2\to 0} \frac{(1\pm x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{x^2} = \pm\frac{1}{3}$ e $\lim_{x\to 0} \frac{(1\pm x)^{\frac{1}{4}}-1}{x} = \pm\frac{1}{4}$ ottenendo $\frac{x^2+o(x^2)-\frac{2x}{4}+o(x)}{x(1+o(x))}$ il cui limite è $-\frac{1}{2}$.

15.2 - Terzo - È una forma indeterminata del tipo del tipo $\frac{0}{0}$. Usando un pò di trigonometria si ottiene $\lim_{x\to 0} \frac{-2\sin a \sin x}{x}$ ed usando $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ si ottiene che $L = -2\sin a$.

16.2 - Primo - È una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. $\sin x = \sin(x-\pi+\pi) = \sin(x-\pi)(-1)$ per cui la funzione diventa $f(x) = \frac{-\pi^2\sin(x-\pi)}{(\pi+x)(\pi-x)}$ il cui limite fa $\frac{\pi}{2}$ usando $\lim_{(x-\pi)\to 0} \frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)} = 1$

16.2 - Secondo - Se $n<0$ il limite è evidentemente $+\infty$. Se $n=0$ ugualmente $L=+\infty$. Se $n>0$ è una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$ per cui $L = \lim_{x\to+\infty} \exp(x^{1-n})$ e si ottiene $L=+\infty$ per $n<1$, $L=e$ per $n=1$ e $L=1$ per $n>1$.

16.2 - Terzo - È una forma indeterminata del tipo $1^{+\infty}$ e quindi procediamo con $\exp x(\frac{2x-1}{x^2-4x+2})$ che tende a e^2.

17.2 - Primo - Per $x\to+\infty$ è una forma indeterminata del tipo del tipo $+\infty-\infty$. Razionalizzando si ha $x\frac{(x^2+\sqrt{1+x^4})-2x^2}{\sqrt{x^2+\sqrt{1+x^4}}+x\sqrt{2}}$ e razionalizzando di nuovo si ha $\frac{x}{(\sqrt{1+x^4}+x^2)(x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+\sqrt{1+x^4}}}$ per cui $L=0$ ed il limite per $x\to-\infty$ ugualmente dà zero.

17.2 - Secondo - Razionalizzando e mettendo in evidenza le quantità opportune si ottiene $\frac{-x^3}{|x|}\frac{1-\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{2}}$ e quindi il risultato

18.2 - Primo - $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{a}{x}) = \lim_{x\to+\infty} x\frac{a}{x} + xo(\frac{1}{x}) = a$

18.2 - Secondo - $|x|\sqrt{1+\frac{a+b}{x}+\frac{ab}{x^2}} - x$ ed usando $\lim_{\frac{1}{x}\to 0} \frac{(1\pm\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{x}} = \pm\frac{1}{2}$ si ottiene: $L = \frac{a+b}{2}$. Per $x\to-\infty$ il limite è $+\infty$.

18.2 - Terzo - Basta riscrivere la funzione (vedi esercizio **3.2**) come $\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)^{\frac{4}{3}}+(x-1)^{\frac{4}{3}}+(x+1)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4x}{x^{\frac{4}{3}}[(1+\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}+(1-\frac{1}{x})^{\frac{4}{3}}+(1+\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{1}{x})^{\frac{2}{3}}]}$ e nel limite tende a zero.

19.2 - Primo - La funzione è identicamente nulla

19.2 - Secondo - per $x\to 0^+$ si ha $f(x) = e^{x\sin\frac{1}{x}}$ mentre per $x\to 0^-$ si ha $f(x) = e^{-1\sin\frac{1}{x}}$ per cui il limte non esiste

19.2 - Terzo - Si considerino le successioni $x_k = k$ e $x'_k = k+\frac{1}{2}$. $f(x_k)\equiv 0$ mentre $f(x'_k) = \frac{1}{2}k$ che tende a $+\infty$.

20.2 - Primo - Usando la **3.1.2** 8) possiamo scrivere il numeratore come $2(\frac{\pi}{4} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) - \arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \arctan x - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Ora usando la **3.1.2** 2) si può riscrivere il tutto come $\arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} - \arctan x$. Ora applichiamo la **3.1.2** 6) (la seconda) ottenendo (si verifichi che delle tre formule è proprio la seconda da applicare) $\arctan\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} -$

$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) - \arctan x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arctan x$ e riapplicando ancora una volta la **3.1.2** 2) si ottiene $\arctan \frac{x^3}{(x^2+\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}$. Dividendo ora per x^3 e facendo il limite si ha $L = \frac{1}{2}$

20.2 - Secondo - Scrivendo $\tan x - \sin x = \sin x(\frac{1}{\cos x} - 1) = \sin x \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{1-2\sin^2 \frac{x}{2}}$ ed usando il conto dell'esercizio precedente si ha $\arctan \frac{x^3}{(1+\sqrt{1-x^2})(x^2+\sqrt{1-x^2})} \frac{1-2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin x \sin^2 \frac{x}{2}}$ il cui limite è $L = 1$.

20.2 - Terzo - Si usa la formula da dimostrarsi per induzione
$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots\ldots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sin x (\sin \frac{x}{2^n})^{-1}$ e per $n \to +\infty$, usando il fatto che $\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$, si ha il risultato.

21.2 - Primo - $\exists\ \varepsilon > 0\ t.c.\ \forall\ \delta > 0,\ x \in (a, a+\delta)\ \not\Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$. Tale affermazione è equivalente a: $\exists\ \varepsilon > 0\ t.c.\ \forall\ \delta > 0\ \exists\ x_o \in (a, a+\delta)\ t.c.\ |f(x_o) - l| \geq \varepsilon$. Ciò non toglie che possano esistere molti altri punti $x' \in (a, a+\delta)$ per cui $|f(x') - l| \geq \varepsilon$.

Sarebbe un grave errore scrivere nel seguente modo: $\exists\ \varepsilon > 0\ t.c.\ \forall\ \delta_\varepsilon > 0\ x \in (a, a+\delta)\ \not\Rightarrow\ |f(x) - l| < \varepsilon$. Infatti davanti al simbolo ε vi è $\exists$ ad indicare che ne basta uno e quindi non ha alcun senso porre ε in basso a δ

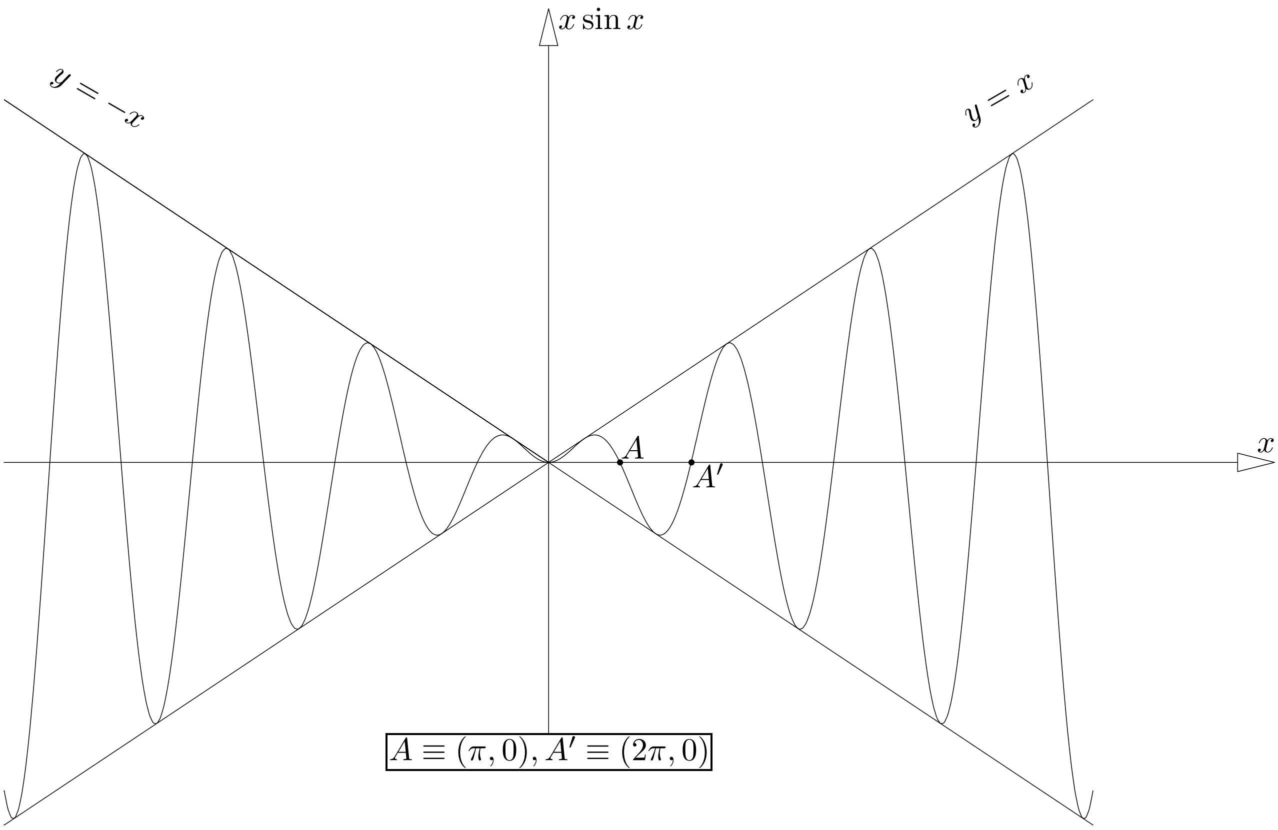
A tal proposito si consideri la funzione $f(x) \equiv 0$ e come a prendiamo $a = 0$. Come l prendiamo un qualsiasi valore non nullo. Ebbene se $\varepsilon < |l|$ allora *qualunque* δ è tale da produrre la proposizione: $\exists\ x\ t.c. |x| < \delta\ \wedge\ |f(x) - l| > \varepsilon$.

È chiaro che se si prendesse $\varepsilon > |l|$ allora nessun δ produrrebbe $\exists\ x\ t.c. |x| < \delta\ \wedge\ |f(x) - l| > \varepsilon$ ma nella definizione davanti a ε vi è $\exists$

È altresì non corretto scrivere $\exists\ \varepsilon > 0\ t.c.\ \forall\ \delta\ x \in (a, a+\delta)\ \Rightarrow\ |f(x) - l| \geq \varepsilon$. Si consideri infatti la funzione $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ l & x = 0 \end{cases}$. Sappiamo che $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ non esiste e quindi non può essere l. Prendiamo ora $l \in [-1, 1]$ e consideriamo la successione $\{x_k\} = \{\frac{1}{2k\pi + \arcsin(l)}\}$. Tale successione ha come limite 0 e $\sin \frac{1}{x_k} = l$ per cui $|\sin \frac{1}{x_k} - l| \equiv 0$. Non accadrà mai, quindi, che per tutti i punti di un intervallo $(-\delta, \delta)$ sia verificata la relazione $|\sin \frac{1}{x} - l| \geq \varepsilon$ e questo quantunque piccolo sia ε. D'altro canto in $(-\delta, \delta)$ vi sono infiniti punti per i quali è verificata $|\sin \frac{1}{x} - l| \geq \varepsilon$ e questo per infiniti valori di ε. Sia infatti $\varepsilon < \min\{|1 - l|, |l + 1|\} \doteq d$ ad esempio $\varepsilon = \frac{d}{2}$ e supponiamo $l > 0$ (in tal modo $d = 1 - l$). All'interno dell'intervallo $(-\delta, \delta)$ vi sono i valori compresi negli intervalli della forma $\arcsin(l + \frac{d}{2}) + 2k\pi < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Ogni punto di tali intervalli verifica $|\sin \frac{1}{x} - l| \geq d$.

21.2 - Secondo - $\forall\ l \in \mathbf{R}^*\ \exists\ \varepsilon_l > 0\ t.c.\ \forall\ \delta\ \exists\ x_o \in (a, a+\delta)\ t.c.\ |f(x_o) - l| \geq \varepsilon_l$. Rispetto a prima la funzione in questione non ha alcun limite qualunque sia il valore l. In tal caso, nella definizione, ε dipende da l in quanto bisogna dare una definizione generale valida per ogni l. Nel caso in cui si stia considerando un limite per $x \to +\infty$ oppure $-\infty$ si può prendere la funzione $\sin x$ e verificare che nessun l può essere il limite della funzione.

21.2 - Terzo - $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ x_{_M} \in Dom(f)\ t.c.\ f(x_{_M}) > M$. Non si commetta l'errore di pensare che se una funzione è illimitata allora deve accadere che o la funzione ha un asintoto verticale (a $+\infty$ o $-\infty$ a seconda di come è illimitata) oppure che debba aversi almeno uno dei seguenti quattro casi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Si può facilmente dare un esempio di funzione ($f(x) = x\sin x$) che è illimitata superiormente ed inferiormente sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ (dimostrare ciò a prescindere dal grafico che segue; quest'ultimo deve solo dare una indicazione) ma che non ammette limite per $x \to \pm\infty$.



In ascisse si è dilatato di un fattore 4 mentre in ordinate si è contratto di un fattore 6

Come si vede le continue "oscillazioni" impediscono alla funzione di avere un limite per $x \to \pm\infty$. La dimostrazione di tale fatto si avvale del teorema ponte osservando che $\lim_{k\to+\infty} f(\pi k) = 0 \ \wedge \ \lim_{k\to+\infty} f(\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = +\infty$

22.2 - Secondo - Usiamo il teorema ponte. Consideriamo la successione $x_k = \frac{1}{\pi k} + \varepsilon_k$ dove ε_k è da valutare. $f(x_k) = (\frac{1}{k\pi} + \varepsilon_k)\frac{1}{(-)^{k+1}\sin\frac{(\pi k)^2\varepsilon_k}{1+k\pi\varepsilon_k}}$. Prendendo $\varepsilon_k = \frac{1}{k^3}$ il limite non esiste in quanto la funzione è illimitata sia superiormente che inferiormente. Se prendessimo $\varepsilon_k = \frac{1}{2k^2}$ otterremmo zero.

24.2* Dire che $\lim_{x\to c} f(x) = l$ come al solito significa che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon$ *t.c.* $x \in (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon)\backslash\{c\} \ \Rightarrow \ |f(x) - l| < \varepsilon$.

Dimostriamo $\Rightarrow$. Sia dato $\delta_{\varepsilon/2}$. $|f(\xi) - f(\eta)| \leq |f(\xi) - l| + |f(\eta) - l| < \varepsilon$ e quindi possiamo prendere $\overline{\delta}_\varepsilon = \delta_{\varepsilon/2}$.

Dimostriamo $\Leftarrow$. È la proprietà di completezza dei numeri reali. Per il Teorema ponte ci basta dimostrare che, data una qualsiasi successione $\{x_n\} \to c$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ per un qualche $l \in \mathbf{R}$. L'ipotesi implica che la successione $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy e quindi converge (si veda eventualmente l'esercizio **24.8***).

25.2 Non esiste il limite $x \to +\infty$ in quanto $\sin\frac{1}{x} \to 0^+$ per $x \to +\infty$. Dunque l'argomento della funzione $\sin\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}$ tende a $+\infty$ e il limite non esiste. Non esiste neppure il limite nei punti in cui $\sin\frac{1}{x}$ vale 0 per lo stesso motivo e neppure il limite $x \to 0$. In tutti gli altri punti la funzione ammette limite.

27.2** Se $c \in A$ allora per ogni k intero esiste un valore intero, diciamo $n_o(k)$ tale che $\xi, \eta \in (c - \frac{1}{n_o(k)}, c + \frac{1}{n_o(k)})$, $\xi, \eta \neq c \ \Rightarrow \ |f(\xi) - f(\eta)| < \frac{1}{k}$. In base all'esercizio **24.2*** ciò equivale a dire che esiste il limite per $x \to c$.

28.2** Dimostriamo che esiste $f^+(c^+)$. Sia $x_n \searrow c$ e sia $S_N = \sup\limits_{k\geq N} x_n$. S_N è una successione monotona non crescente che quindi ammmette sempre estremo inferiore al quale converge. L'estremo inferiore può essere $-\infty$. Poiché il risultato non dipende dalla particolare successione, il limite superiore così come definito prima esiste. Lo stesso discorso vale per $f^+(c^-)$. Per i limiti inferiori le successioni interessate sono quelle monotone non decrescenti. Dimostriamo che esiste una successione $\{x_k\}$ tale che $x_n \searrow c$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f^+(c^+)$. Dalla definizione di $f^+(c^+)$ prendiamo una successione $\{\delta_k\}$ con $\delta_j = \frac{1}{j}$. $\forall\ \varepsilon\ \exists\ N_\varepsilon\ t.c.\ f^+(c^+) \leq \sup\limits_{c<x<c+\frac{1}{j_\varepsilon}} f(x) < f^+(c^+)+\varepsilon$. Inoltre abbiamo che $j > j_\varepsilon\ \Rightarrow\ f^+(c^+) \leq \sup\limits_{c<x<c+\frac{1}{j}} f(x) < \sup\limits_{c<x<c+\frac{1}{j_\varepsilon}} f(x) < f^+(c^+) + \varepsilon$. Sia ora $n \in \mathbf{N}_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} j_\varepsilon, j_\varepsilon + 1, j_\varepsilon + 2, \ldots$. Per ogni $n \in \mathbf{N}_\varepsilon$ esiste x_{k_n} tale che $c < x_{k_n} < c + \dfrac{1}{n}$ e $f^+(c^+) < f(x_{k_n}) + \varepsilon$ e per costruzione $n > n'\ \Rightarrow\ x_{k_n} < x_{k_{n'}}$. Ne consegue che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f^+(c^+)$. Identico discorso vale per gli altri tre casi. Per il limite sinistro è la stessa cosa.

• Dimostriamo che $f_-(c^+) \leq f^+(c^+)$. Siano $S_\delta = \sup\limits_{c<x<c+\delta} f(x)$ e $I_\delta = \inf\limits_{c<x<c+\delta} f(x)$. $I_\delta \leq S_\delta\ \forall \delta$. Ne segue che $\sup\limits_{0<\delta} I_\delta \leq \inf\limits_{0<\delta} S_\delta$. Le altre sono analoghe.

• Dimostriamo ora che $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ esiste se solo se $f^+(c^+) = f_-(c^+)$ e $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = f^+(c^+) = f_-(c^+)$.

Supponiamo ora che esista $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l$. Per quanto dimostrato prima esiste una successione $x_n \searrow c$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{k_n}) = f^+(c^+)$ e per il Teorema ponte tale valore deve essere uguale a l. Lo stesso ragionamento porta a dire che $l = f_-(c^+)$.

Supponiamo ora che $f^+(c^+) = f_-(c^+)$. $f(x) < \sup\limits_{c<x<c+\delta} f(x)$ per ogni $c < x < c + \delta$ e inoltre $\forall\ \varepsilon\ \exists\ \delta_\varepsilon\ t.c.\ c < x < c + \delta_\varepsilon\ \Rightarrow\ f^+(c^+) \leq f(x) < f^+(c^+) + \varepsilon$. Ma allora $x \in (c, c + \delta_\varepsilon)\ \Rightarrow\ f^+(c^+) \leq f(x) < f^+(c^+) + \varepsilon$. Rifacendo il discorso per $f_-(c^+)$ otteniamo $x \in (c - \delta_\varepsilon, c)\ \Rightarrow\ f_-(c^+) - \varepsilon < f(x) \leq f_-(c^+)$ e quindi il risultato.

30.2 Da $\lim\limits_{x\to 0} \sup\limits_{x_1,x_2\in(0,x)} |f(x_1) - f(x_2)| = 0$ segue che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ x_\varepsilon\colon\ 0 < x < x_\varepsilon\ \Rightarrow$ $\sup\limits_{x_1,x_2\in(0,x)\setminus\{0\}} |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ e quindi $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ per ogni $x_1, x_2 \in (0, x)$. Ne segue che, data una qualsiasi successione $x_n \to 0$, è di Cauchy la successione $\{f(x_n)\}$ e quindi converge.

• Nel secondo caso il limite della funzione può non esistere finito. Si prenda la funzione $f(x) = |\ln x|^{1/2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ $\sup\limits_{x_1,x_2\in(x,2x)} |f(x_1) - f(x_2)| = \dfrac{\ln 2}{(|\ln x|)^{1/2} + |\ln(2x)|^{1/2}}$ che tende a zero per $x \to 0$.

Se si prende $g(x) = \sin f(x)$ allora ugualmente $\lim\limits_{x\to 0} \sup\limits_{x_1,x_2\in(0,x)} |f(x_1) - f(x_2)| = 0$ grazie alla disuguaglianza $|\sin a - \sin b| \leq |a - b|$

31.2** Supponiamo che esista una funzione f tale che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste ma sia diverso da $f(x_0)$ in una infinità non numerabile di punti di $[a, b]$. Prendiamo uno di tali punti, diciamo x_0 e che sia di condensazione in base alla definizione data nell'esercizio **32.2**. Ciò implica che esisterà un insieme aperto $U \ni x_0$ all'interno del quale c'è una quantità non numerabile di punti di A_n. Sia $\{x_n\}$ una successione di punti convergente a x_0 e quindi $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - l|$ esiste per un certo $l \in \mathbf{R}$ che però è diverso da $f(x_0)$. Inoltre possiamo prendere tutti gli x_n punti di condensazione. Quindi in un intorno di x_{n_0}, diciamo $V \ni x_{n_0}$, cadranno definitivamente tutti i punti della successione $\{x_n\}$ oltre a x_{n_0} stesso. Sia x_{n_k} una sottosuccessione di punti tale che $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x_{n_0}$. Sappiamo che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ e d'altra parte $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) \not\to f(x_{n_0})$. Questo genera una contraddizione. Volendo essere più quantitativi, possiamo dire che $\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, n_\varepsilon : n > n_\varepsilon \implies |f(x_n) - l| < \varepsilon$. Prendiamo $n_0 > n_\varepsilon$. Sappiamo che $\exists\, \varepsilon' > 0 : \forall\, k\, \exists\, k' > k : |f(x_{n_{k'}}) - f(x_{n_0})| \geq \varepsilon'$. Ora scriviamo $|f(x_{n_{k'}}) - l| = |f(x_{n_{k'}}) - f(x_{n_0}) + f(x_{n_0}) - l| \geq \varepsilon' - \varepsilon > \frac{\varepsilon'}{2}$ prendendo $\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2}$.

Vale la pena osservare che il punto essenziale in cui si usa il risultato del problema **3.2** è quando si dice che esiste una sottouccessione $\{x_{n_k}\}$ che converge a x_{n_0} e questo dipende dal fatto che tutti i punti x_n sono di condensazione. In assenza del risultato **3.2** non possiamo affermare che esiste $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ e quindi l'argomento non può proseguire.