Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

§1.1 Estremo superiore ed Inferiore - numeri razionali, irrazionali

Per le definizioni e teoremi si fa riferimento ad uno qualsiasi dei libri M.Bertsch - R.Dal Passo *Lezioni di Analisi Matematica*, I edizione settembre 1996, ARACNE EDITRICE, via Raffaele Garofalo, 133 A/B 00173 Roma tel.0672672233/22, M.Bertsch - R.Dal Passo *Elementi di Analisi Matematica*, I edizione ottobre 2001, ARACNE EDITRICE

Si definisce $\mathbf{N} = 0, 1, 2, \ldots$

1.1.1 Sia dato un insieme ordinato A di numeri reali. Si dimostri che la definizione di estremo superiore come il più piccolo dei maggioranti (def1) è equivalente alla seguente (def2):
S è l'estremo superiore di A (in breve $\sup A = S$) se $a \leq S$ $\forall a \in A$ e per ogni numero positivo ε esiste almeno un elemento $a_\varepsilon \in A$ tale che $S - \varepsilon < a_\varepsilon$.

L'esercizio consiste nel dimostrare che: def1 implica def2 e viceversa.

Inoltre si faccia vedere che la definizione di estremo inferiore come il più grande dei minoranti è equivalente a:
s è l'estremo inferiore di A (in breve $\inf A = s$) se $s \leq a$ $\forall a \in A$ e per ogni numero positivo ε esiste almeno un elemento $a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon < s + \varepsilon$.

2.1.1 È nota la definizione di numeri irrazionali. Si dimostri che: 1) ogni frazione $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini con a e b interi ammette uno sviluppo decimale periodico (se lo sviluppo è finito si scrivano infiniti zeri dopo l'ultima cifra diversa da zero e lo si intenda come periodico) 2) una frazione $\frac{a}{b}$ ridotta ai minimi termini con a e b interi ammette uno sviluppo decimale finito se e soltanto se gli unici fattori primi di b sono 2 e 5

3.1.1 Si consideri l'insieme $\mathbf{Q}$ con la relazione d'ordine $\leq$. Sia $A_n \doteq \{x \in \mathbf{Q} \mid x^2 < n,\ n \geq 1\}$. È limitato A_n per ogni n? Ammette A_n estremo superiore in $\mathbf{Q}$?

4.1.1 Trovare estremo superiore ed inferiore dei seguenti insiemi e dire se sono massimi oppure minimi $A_1 = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbf{Z}\backslash\{-1\}\}$, $A_2 = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{2n}{n^2+1},\ n \in \mathbf{Z}\}$, $A_3 = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{\xi}{\xi+1},\ \xi \in \mathbf{R}\backslash\{-1\}\}$, $A_4 = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{3n^2}{4n+1},\ n \in \mathbf{Z}\}$, $A_5 = \{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbf{N}\}$, $A_6 = \{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{n^2+n} - n,\ n \in \mathbf{N}\}$, $A_7 = \{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{n^2+n^{4/3}} - n,\ n \in \mathbf{N}\}$,

5.1.1 Determinare estremo superiore ed inferiore dell'insieme $A = \{x \in \mathbf{R}^* \ | x = \frac{m}{n} + \frac{n}{m}, n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}, m \in \mathbf{N}\backslash\{0\}\}$ e dell'insieme $B = \{x \in \mathbf{R} \ | x = \frac{m}{n} - \frac{n}{m}, n \in \mathbf{N}\backslash\{0\}, m \in \mathbf{N}\backslash\{0\}\}$. La definizione di $\mathbf{R}^*$ si trova a `pag.106` del libro di testo

6.1.1 Dimostrare che se x^{12} e x^7 sono ambedue razionali allora anche x lo è.

7.1.1 Siano dati i numeri positivi e razionali a e b. Dimostrare che $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ è razionale se e solo se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ sono ambedue razionali.

8.1.1 Dimostrare che $\log_{10} 2$ è irrazionale. Dimostrare che $\sqrt{3}(\sqrt{6} - 3)$ è irrazionale. Dimostrare che $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ è irrazionale.

9.1.1 Sia dato un numero intero N maggiore di 3 e la cui rappresentazione decimale è data da $a_1a_2a_3\ldots$. Dimostrare che N è divisibile per 3 se e solo se $a_1+a_2+a_3\ldots$ è divisibile per 3.

10.1.1*** Si provi a dare una dimostrazione che $\sqrt{2}$ è irrazionale indipendente dalla dimostrazione data nel libro di testo (si parta ragionando sempre per assurdo ossia che $\sqrt{2}$ è razionale; quindi esisterebbe un numero intero s tale che $s\sqrt{2}$ è esso stesso intero. Successivamente si dimostri che $1<\sqrt{2}$ e si costruisca il numero $s(\sqrt{2}-1)\ldots$)

11.1.1* Si supponga che la sommatoria infinita $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ sia un numero finito che dipende ovviamente da x. Trovare tale numero attraverso semplici manipolazioni algebriche.
- Sulla stessa falsariga trovare una formula per $\Pi_{k=1}^{\infty}(1+x^{2^k})$

12.1.1** Dimostrare non vi è alcun numero razionale $\frac{p}{q}$ tale che $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|<\frac{1}{4q^2}$. Si ricordi in ogni caso che i razionali sono densi nei reali e quindi per ogni numero $\varepsilon>0$ esistono infiniti numeri razionali $\frac{p}{q}$ tali che $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}|<\varepsilon$

SOLUZIONI

§**1.1**

3.1.1 A_n è limitato per ogni n mentre ammette sup in $\mathbf{Q}$ solo se n è un quadrato perfetto.
4.1.1 $\inf A_1=\min A_1=0$, $\sup A_1=1$, $\inf A_2=\min A_2=-1$, $\sup A_2=\max A_2=1$, $\sup A_3=+\infty$, $\inf A_3=-\infty$, $\inf A_4=-\infty$, $\sup A_4=+\infty$, $\inf A_5=\min A_5=0$, $\sup A_5=1$, $\inf A_6=\min A_6=0$, $\sup A_6=\frac{1}{2}$, $\inf A_7=\min A_7=0$, $\sup A_7=+\infty$,
5.1.1 $\sup A=+\infty$, $\inf A=2$, $\sup B=+\infty$, $\inf B=-\infty$ **11.1.1*** $\frac{1}{1-x}$ $\frac{1}{1-x^2}$

RISOLUZIONE DEGLI ESERCIZI

1.1.1 Facciamo vedere che la def1$\Longrightarrow$def2. Si dimostra per assurdo. Dimostreremo che la negazione di def2 implica la negazione di def1 che però costituisce l'ipotesi e dunque non può essere negata. La contraddizione si risolverà dicendo che è impossibile negare def2.
Dunque la negazione di def2 implica che $\exists\,\varepsilon\ t.c.\ \forall\ a\in A\ a\leq S-\varepsilon$. Ne seguirebbe che $S-\varepsilon<S$ è un maggiorante in contraddizione con il fatto che S è l'estremo superiore come da ipotesi (def1).
Facciamo vedere che def2$\Longrightarrow$def1. Certamente S è un maggiorante essendo $a\leq S\ \forall a\in A$. Inoltre è chiaramente il più piccolo. Infatti poiché per ogni $S'<S$, esiste $a\in A$ tale che $a\in(S',S]$, S' non potrebbe essere un maggiorante.

3.1.1 $A_n=\{x\in\mathbf{Q}\mid -\sqrt{n}<x<\sqrt{n}\}\subset A_{n^2}=\{x\in\mathbf{Q}\mid -n<x<n\}$ e dunque A_n è limitato in $\mathbf{Q}$ in quanto n e $-n$ sono rispettivamente un maggiorante ed un minorante di A_n. Supponiamo ora che $\sqrt{n}\notin\mathbf{Q}$ (ossia per ogni intero p, $n\neq p^2$ ossia n non è un quadrato perfetto). L'estremo superiore, qualora esista, deve essere $\leq\sqrt{n}$ ma $\sqrt{n}$ non può essere poiché non è razionale. Supponiamo allora che esista un estremo superiore razionale $\frac{p}{q}<\sqrt{n}$. Dalla densità (`pag.27 del libro di testo`) di $\mathbf{Q}$ esiste un numero razionale $\frac{h}{k}$ tale che $\frac{p}{q}<\frac{h}{k}<\sqrt{n}$ e dunque $\frac{p}{q}$ non può essere il sup. Se viceversa $\sqrt{n}\in\mathbf{Q}$ allora esso è un maggiorante appartenente a $\mathbf{Q}$ di A_n e per la proprietà di densità è il più piccolo e dunque è il sup.

4.1.1 $A_1=A_+\cup A_-\doteq\{x\in\mathbf{R}|x=\frac{n}{n+1},\ n\in-\mathbf{N}\backslash\{-1\}\}\cup\{x\in\mathbf{R}|x=\frac{n}{n+1},\ n\in\mathbf{N}\}$,
Consideriamo l'insieme A_+. Chiaramente $0\leq x<1$ per cui 0 è certamente un minorante mentre 1 è un maggiorante. Usando la def2 facciamo vedere che 0 è l'estremo inferiore. Dunque bisogna mostrare che per ogni $\varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon\ t.c.\ 0\leq\frac{n_\varepsilon}{1+n_\varepsilon}<\varepsilon$. Ora $\frac{n}{n+1}>\frac{m}{m+1}$ per $n>m\geq 0$. (segue dalla disuguaglianza $\frac{n-m}{(n+1)(m+1)}>0$) e dunque essendo $x_1=\frac{1}{2}$, l'unico modo di soddisfare la disuguaglianza *per ogni* $\varepsilon>0$ è dire che $n_\varepsilon\equiv 0$ e quindi $x_{n_\varepsilon}=0$. Ciò implica che 0 è minimo.

Facciamo vedere ora che 1 è il più piccolo dei maggioranti ossia che per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists$ n_ε t.c. $1 \geq \frac{n_\varepsilon}{1+n_\varepsilon} > 1-\varepsilon$. Basta risolvere la disequazione di primo grado e si trova $n_\varepsilon = 1 + [(1-\varepsilon)/\varepsilon]$.
Consideriamo ora l'insieme A_-. È ovvio osservare che $x > 1$ e quindi se ne conclude che 0 è minimo per la successione definita sul suo dominio $\mathbf{Z}\backslash\{-1\}$.
Essendo $\frac{n}{n+1} < \frac{m}{m+1}$ per $n < m < -1$ ossia $\frac{n-m}{(n+1)(m+1)} < 0$ e ciò è vero appunto per $n < m$, si ha $x \leq \frac{-2}{-2+1} = 2$. 2 quindi è maggiorante. Mostriamo che è estremo superiore. Bisogna quindi far vedere che per ogni $\varepsilon > 0$ $\exists$ n_ε t.c. $2 \geq \frac{n_\varepsilon}{1+n_\varepsilon} > 2-\varepsilon$. Essendo $x_{-3} = \frac{3}{2}$, se ε è troppo piccolo l'unico modo di risolvere la disequazione è dire che $n_\varepsilon \equiv -2$ e quindi 2 è il sup che è anche massimo. Riunendo le due discussioni si può dire che 0 è minimo mentre 2 è massimo.

$A_2 = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{2n}{n^2+1},\ n \in \mathbf{Z}\}$. Per comodità indichiamo x_n l'elemento $x = \frac{2n}{n^2+1}$. Dapprima si osserva che $x_n > 0$ per $n > 0$ e $x_n < 0$ per $n < 0$. Poi si dimostra che $x_n > x_k$ se $k > n$ e $kn > 0$ (la dimostrazione è alla fine dell'esercizio). Dunque per k e n positivi $1 = x_1$ è un maggiorante ed essendo $x_n = -x_{-n}$ se ne conclude che $-1 = x_{-1}$ è un minorante. Con un calcolo del tutto analogo al precedente si dimostra che sono anche rispettivamente sup ed inf e quindi massimo e minimo. È opportuno aggiungere che per stabilire che 1 è un maggiorante bisogna dimostrare che $x_n < 1$ per ogni n. Qui si possono usare due strade. La prima consiste nel far vedere che $x_n < x_k$ se $n > k$ e $kn > 0$ e nell'evidenziare che x_n è negativo per n negativi. L'altra strada consiste nel risolvere la disequazione $\frac{2n}{1+n^2} < 1$ che sebbene facile è pur sempre una disequazione di secondo grado e richiede quindi qualche secondo in più di tempo. Lo studente/ssa verifichi come efficace anche questa seconda strada.
Dimostriamo ora che $x_n > x_k$ se $n < k$ e $kn > 0$. $\frac{2n}{1+n^2} > \frac{2k}{1+k^2} \Longrightarrow nk^2 - kn^2 > k - n$ ossia $k > n$ e $kn > 0$. Se $k < n$ allora deve essere $kn < 0$ ossia $k < 0$ e $n > 0$; in tal caso però $x_k < 0$ e $x_n > 0$.

$A_3 = \{x \in \mathbf{R} | x = \frac{\xi}{\xi+1},\ \xi \in \mathbf{R}\}$. $\frac{\xi}{\xi+1} > 0$ per $\xi < -1 \vee \xi > 0$. Dimostriamo che A_3 è illimitato inferiormente e superiormente per cui l'inf è $-\infty$ mentre il sup è $+\infty$. Dire che un insieme della retta è illimitato inferiormente equivale a dire che comunque si prenda un numero negativo esiste sempre un elemento dell'insieme (che può cambiare col cambiare del numero) più piccolo del numero scelto. In formule ciò equivale a dire che $\forall M < 0$ $\exists$ ξ *t.c.* $\frac{\xi}{\xi+1} < M$. Naturalmente si potrebbe affermare una cosa analoga senza restringersi a $M < 0$ ma non verrebbe aggiunto nulla di importante in quanto volendo dimostrare la illimitatezza inferiore si è interessati ai valori di M sempre più negativi. La disequazione $\frac{\xi}{\xi+1} < M$ per $M < 0$ e quindi per $-1 < \xi < 0$, equivale a $\xi < M(\xi+1)$ (si usa $\xi + 1 > 0$) ossia $\xi(M-1) > -M$ e quindi $\xi < \frac{-M}{M-1} = -1 + \frac{1}{1-M}$. Come si vede $-1 + \frac{1}{1-M}$ è un numero più grande di -1 e più piccolo di 0. Per $\xi \geq 0$ si ha $0 \leq \frac{\xi}{\xi+1} < 1$ e quindi per dimostrare che A_3 è illimitato superiormente bisogna considerare i valori $\xi < -1$. Stavolta bisogna mostrare che $\forall M > 0$ $\exists$ ξ *t.c.* $\frac{\xi}{\xi+1} > M$. Ne segue che $\xi < M(\xi+1)$ (usando $\xi + 1 < 0$) e quindi $\xi(M-1) + M > 0$. Se $M - 1 < 0$ allora tutti i valori di ξ risolvono la disequazione (si ricordi che stiamo considerando $\xi < -1$). Se invece $M - 1 > 0$ allora si ha $\xi > -1 + \frac{1}{1-M}$ che è un numero più piccolo di -1.

$A_4 = \{x \in \mathbf{R} |\ x = \frac{3n^2}{4n+1}\ n \in \mathbf{Z}\}$. Essendo illimitato sia superiormente che inferiormente, l'insieme non ammette estremo superiore ed inferiore in $\mathbf{R}$ ma in $\mathbf{R}^*$. Che sia illimitato superiormente lo si vede risolvendo la disequazione per gli interi relativi $\frac{3n^2}{4n+1} > M$ e pensando che M è un numero positivo grande a piacere. Se $n \geq 0$ si può minorare $\frac{3n^2}{4n+1} > \frac{3n^2}{5n} > M$ e quindi $n > \frac{5}{3}M$. Dunque per quanto grande sia M si può trovare almeno un intero n per cui $x_n > M$. Ciò equivale a dire che l'insieme è illimitato superiormente. Che l'insieme sia illimitato inferiormente lo si vede risolvendo $\frac{3n^2}{4n+1} < M$ e stavolta M è negativo e grande in modulo. Per $n < 0$ si può maggiorare $\frac{3n^2}{4n+1} < \frac{3n^2}{5n} < M$ ossia $n < \frac{5}{3}M$.

$A_5 = \{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{n+1} - \sqrt{n},\ n \in \mathbf{N}\}$. Detto come al solito $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ si ha $x_n > 0$ (ovvio) ed inoltre $x_n < x_k$ se $n > k$. Da ciò segue che $x_0 = 1$ è un maggiorante ed è immediato vedere che è il più piccolo per cui è sup ed anche massimo. Ad ogni modo se volessimo portare i calcoli fino alla fine bisognerebbe impostare il seguente calcolo $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ t.c.\ 1 - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$ ed è chiaro che $n_\varepsilon = 0$ andrebbe sempre bene. Non così è se si pensa che $S = \sup A_5 > 1$. Se infatti si imposta la relazione $S - \frac{S-1}{2} = \frac{S+1}{2} < x_{n_\varepsilon}$ (si è preso $\varepsilon = \frac{S-1}{2} > 0$) non si riuscirà mai a risolvere la disequazione in quanto $x_n < 1$ per ogni n mentre $\frac{S+1}{2} > 1$. Forse meno evidente è capire che l'estremo inferiore è 0. Che l'inf debba essere un numero positivo o nullo deriva da $x_n > 0$ (si supponga per assurdo che l'inf sia negativo e si verifichi la impossibilità di applicare la def2). Supponiamo ora che $\inf A_5 = 0$. Dunque $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ t.c.\ 0 \le x_n < \varepsilon$. Dunque bisogna risolvere $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \varepsilon$. Razionalizzando si ha $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \varepsilon$ e quindi $1 - \varepsilon\sqrt{n} < \varepsilon\sqrt{1+n}$. Ora se $\varepsilon > 1$ allora la disequazione è certamente verificata in quanto $1 - \varepsilon\sqrt{n} < 0$ per ogni n positivo o nullo e quindi $n_\varepsilon = 0$ per ogni $\varepsilon > 1$. Se $\varepsilon = 1$ allora $1 - \varepsilon\sqrt{n} < 0$ per ogni n positivo da cui $n_\varepsilon = 1$. Se $\varepsilon < 1$ allora non appena $n \ge \frac{1}{\varepsilon^2}$ la disequazione è verificata e quindi per $\varepsilon < 1$ prendiamo $n_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon^2}] + 1$.

$A_6 = \{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{n^2+n} - n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Si ha $0 \le x_n$, $x_0 = 0$ e $x_n > x_k$ se $n > k$. Da ciò segue che l'inf (anche minimo) è 0. Infatti si applica la def2 relativa alla definizione di inf e chiaramente $n_\varepsilon \equiv 0$. Per quel che riguarda il sup si ha $x_n = \sqrt{n^2+n} - n = \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} \le \frac{1}{2}$ e quindi si può pensare che $\frac{1}{2}$ sia il sup. È da notare che sovente, nel risolvere un esercizio, accade di capire quale potrebbe essere il risultato prima di dimostrarlo. È esattamente questo uno dei casi. Si individua $\frac{1}{2}$ quale possibile sup e poi si dimostra che effettivamente lo è.
Dobbiamo mostrare che $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\ t.c.\ \frac{1}{2} - \varepsilon < x_{n_\varepsilon}$. Se $\varepsilon > \frac{1}{2}$ allora $n_\varepsilon = 0$ in quanto $x_0 = 0$. Se $\varepsilon = \frac{1}{2}$ allora $n_\varepsilon = 1$ in quanto $x_1 = \sqrt{2} - 1$. Sia ora $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Con un minimo di algebra la disuguaglianza diventa $(\frac{1}{2} - \varepsilon)\sqrt{1 + \frac{1}{n}} < \frac{1}{2} + n$ ed è risolta da $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$ per cui $n_\varepsilon = [\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}] + 1$.
Per quanto concerne la proprietà $\sqrt{n^2+n} - n > \sqrt{k^2+k} - k$ ossia $\sqrt{n^2+n} - \sqrt{k^2+k} > n - k$ e per $n > k$ si eleva al quadrato entrambe i membri ottenendo (dopo ovvie semplificazioni) $(n-k)^2 > 0$.

$A_7 = \{x \in \mathbf{R} | x = \sqrt{n^2 + n^{4/3}} - n,\ n \in \mathbf{N}\}$. Chiaramente $x_n \ge 0$, $x_o = 0$ e $x_n \ne 0$ se $n \ne 0$. La conclusione è che 0 è l'inf. L'insieme x_n è monotono crescente ed il sup è $+\infty$ (basta dimostrare che è non limitato). Dunque bisogna far vedere che $\forall\ r > 0\ \exists\ n_r\ t.c.\ x_{n_r} > r$ ossia $\sqrt{n^2 + n^{4/3}} - n > r$. Segue che $n^{4/3} + 2nr > r^2$ ed è una disequazione non risolvibile. Risolviamo allora $n^{4/3} > 2nr + nr^2$ ossia $n \ne 0$ e $n > (r^2+2r)^3$ e quindi $n_r = \left[(r^2+2r)^3\right] + 1$.

5.1.1 Cominciamo dall'estremo superiore di A. Bisogna far vedere che possiamo risolvere la disequazione $x_{n,m} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} > \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$. Basta far vedere che un sottoinsieme di A ammette $+\infty$ quale estremo superiore in $\mathbf{R}^*$. Come sottoinsieme prendiamo $A_{n_o} = \{x \in \mathbf{R}\ |x = \frac{m}{n_o} + \frac{n_o}{m}, n_o \in \mathbf{N}\backslash\{0\}, m \in \mathbf{N}\backslash\{0\}\} \subset A$ e facciamo vedere che è possibile risolvere $\frac{m}{n_o} + \frac{n_o}{m} > r$ per ogni $r > 0$ ossia $\frac{m^2+n_o^2}{mn_o} > r$ ossia $m^2 - rmn_o + n_o^2 > 0$. Se $r^2n_o^2 - 4n_o^2 < 0$ ossia $r < 2$ allora la disequazione è sempre verificata. Se $r \ge 2$ allora la soluzione è $m < m_- = \frac{1}{2}(rn_o - \sqrt{r^2n_o^2 - 4n_o^2})\ \vee\ m > m_+ = \frac{1}{2}(rn_o + \sqrt{r^2n_o^2 - 4n_o^2})$. Tanto m_- quanto m_+ è positiva ma consideriamo solo $m > m_+$. Dunque l'estremo superiore (in $\mathbf{R}^*$) di A è $+\infty$.
È immediato convincersi che $\inf A = 2$ (applicare la definizione ossia $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ (m_\varepsilon, n_\varepsilon)\ t.c.\ s \le \frac{m_\varepsilon}{n_\varepsilon} + \frac{n_\varepsilon}{m_\varepsilon} < s - \varepsilon$ e trovare $(m_\varepsilon, n_\varepsilon)$ avendo indicato con s l'inf.

Consideriamo ora l'esercizio concernente l'insieme B. Per quanto riguarda il sup si può ripetere lo stesso discorso di prima ed ottenere che il sup è $+\infty$. È chiaro però che anche con l'inf si può applicare un discorso analogo (ad esempio si fissi m e si faccia variare n) ottenendo che

$\inf B = -\infty$.

6.1.1 $x^{12} = \frac{p}{q}$ e $x^7 = \frac{m}{n}$ per ipotesi. Basta osservare che $x = \frac{(x^{12})^3}{(x^7)^5} = \frac{p^3 n^5}{q^3 m^5}$ che certamente è razionale.

7.1.1 Bisogna far vedere che $\sqrt{a}+\sqrt{b} \in \mathbf{Q} \iff \sqrt{a} \in \mathbf{Q} \wedge \sqrt{b} \in \mathbf{Q}$. La parte $\Longleftarrow$ è immediata. Per la parte $\Longrightarrow$ si deve elevare al quadrato ottenendo $a = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{b} + b$ $(\sqrt{a}+\sqrt{b} = \frac{p}{q})$ ottenendo $2\frac{p}{q}\sqrt{b} = b + \frac{p^2}{q^2} - a$ che costituisce un assurdo a meno che $\sqrt{b}$ non sia razionale.

8.1.1 Supponiamo che viceversa sia razionale per cui $\log_{10} 2 = \frac{p}{q} \;\Rightarrow\; 2 = (10)^{\frac{p}{q}} \;\Rightarrow\; 2^q = (10)^p \;\Rightarrow\; 2^{q-p} = 5^p$ che è un assurdo essendo 2 e 5 primi fra di loro.

Per quanto concerne $\sqrt{3}(\sqrt{6}-3)$ supponiamo che esso sia razionale ossia $(3\sqrt{2}-3\sqrt{3}) = \frac{p}{q}$ e quindi $18 = 27 + \frac{p^2}{q^2} + 2\frac{p}{q}3\sqrt{3}$ che implica $\sqrt{3} = -3 + \frac{p^2}{3q^2} + 2\frac{p}{3q}$ il che è impossibile essendo $\sqrt{3}$ irrazionale.

9.1.1 Sia dato il numero intero $p = \sum_{k=0}^{N} a_k 10^{N-k}$ e supponiamo che sia divisibile per 3 ossia $p = 3q$. Data la somma $\sum_{k=0}^{N} a_k = p'$ si ha $p = \sum_{k=0}^{N-1} a_k 10^{N-k} + p' - \sum_{k=0}^{N-1} a_k \Rightarrow p' = 3q + \sum_{k=0}^{N-1} a_k(10^{N-k}-1)$ e ciascun termine è divisibile per 3 essendo $10^{N-k}-1$ certamente multiplo di 3. Dunque p' è multiplo di 3.

Viceversa sia sempre dato il numero $p = \sum_{k=0}^{N} a_k 10^{N-k}$ e stavolta supponiamo che $p' = \sum_{k=0}^{N} a_k = 3q'$. Ripetendo pari pari la sostituzione di prima si ottiene il risultato.

10.1.1*** Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia razionale. Ne consegue che esiste il più piccolo intero s tale che $s\sqrt{2}$ è intero. Poiché $1 < 2$ allora $1 < \sqrt{2}$ e quindi $s(\sqrt{2}-1)$ è un intero positivo e per giunta più piccolo di s. Anche $s(\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = 2s - s\sqrt{2}$ è un intero positivo ma allora vorrebbe dire che esiste un intero positivo, $s(\sqrt{2}-1)$ appunto, che è più piccolo di s e che moltiplicato per $\sqrt{2}$ dà un numero intero. Questo fatto contraddice l'ipotesi secondo cui s era *il più piccolo* intero che soddisfaceva le precedenti condizioni. Tale dimostrazione fa uso di una tecnica molto usata in teoria dei numeri e che si chiama *tecnica della discesa.* Si suppone che esista il più piccolo numero intero che soddisfa una determinata condizione e si fa vedere come ne debba esistere uno più piccolo ancora contraddicendo l'ipotesi. Tale dimostrazione è stata presa dal sito internet `http://www.mathsoft.com/asolve/constant/pythag/pythag.html` a partire dal quale, seguendo i vari collegamenti (links), si può accedere a molti siti contenenti materiale matematico di notevole interesse.

11.1.1 Detta $S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ abbiamo $S = 1+x+x^2+x^3+\ldots = 1+x(1+x+x^2+x^3+\ldots) = 1+xS$ e quindi $S = 1+xS$ da cui il risultato.

• Sviluppando i prodotti si ottiene $S = 1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots$. Per induzione (si veda il capitolo **1.3**), si dimostra che ogni termine è x^N dove N è un intero della forma $\sum_{k\in A} 2^{2k}$ e $A \subset \mathbf{N}$. Dunque $S = 1+x^2(1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots) = 1+x^2S$ da cui il risultato.

12.1.1** $|q\sqrt{2}-p| \neq 0$ e quindi $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}| = \frac{1}{q}\frac{|2q^2-p^2|}{q\sqrt{2}+p} \geq \frac{1}{q}\frac{1}{q\sqrt{2}+p}$. Sia $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}| \leq 1$ e quindi $p \leq 2q$ da cui $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}| > \frac{1}{q^2(2+\sqrt{2})} > \frac{1}{2q^2\sqrt{2}} > \frac{1}{4q^2}$. Se $|\sqrt{2}-\frac{p}{q}| > 1$ il risultato è chiaramente vero.