Esercizi di analisi complessa

Trascritti da: Fabio Musso.

1 Formule di Cauchy–Riemann e applicazioni

Esercizio 1 *Caratterizzare le curve di equazione* $u =$ *cost e quelle di equazione* $v =$ *cost associate alla funzione* $f(z) = z^2$.

Esercizio 2 *Caratterizzare le curve di equazione* $u =$ *cost e quelle di equazione* $v =$ *cost associate alla funzione* $f(z) = Ln(z)$.

Esercizio 3 *Scrivere le condizioni differenziali di Cauchy–Riemann per le funzioni* $F(\bar{z})$ *della variabile complessa* $\bar{z} = x - iy$. *Sotto quali condizioni vale* $F(\bar{z}) = \bar{F}(z)$? *(specificare in termini di* $Re(F)$ *e* $Im(F)$*).*

Esercizio 4 *Per quali valori del parametro* α *le seguenti funzioni possono essere considerate la parte reale di una funzione analitica?*

1. $u_1(x, y) = \cosh(x)\cos(\alpha y)$
2. $u_2(x, y) = \dfrac{x^\alpha}{x^2 + y^2}$

Esercizio 5 *Sia* $f(z)$ *una funzione intera e*

$$\mathrm{Re}\, f(z) = u(x, y) = [x(\cos x - \sin x) - y(\cos x + \sin x)]e^{-y}.$$

Calcolare la funzione

$$g(z) = \frac{d}{dz} f(z).$$

Esercizio 6 *Dire se le funzioni di variabile complessa:*

$$F_1(z) = \frac{x + 3iy}{x^2 + y^2},$$
$$F_2(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2},$$

sono analitiche.

Esercizio 7 *Determinare la famiglia di funzioni analitiche la cui parte reale e' data da:*

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

2 Integrali curvilinei

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$\oint_\gamma dz \frac{\operatorname{Im} z}{4z^2+1}$$

sul cammino chiuso, percorso in senso antitorario, costituito dal segmento che congiunge i punti diametralmente opposti $\exp(i\pi/4), \exp(i5\pi/4)$ *del piano complesso e da una semicirconferenza di centro* O *e raggio* 1.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale*

$$\oint_\gamma dz \frac{\operatorname{Re} z}{4z^2+1}$$

sul cammino chiuso costituito dal segmento $[-1, 1]$ *dell'asse reale e dalla semicirconfernza di centro* O *e raggio* 1 *del semipiano superiore, percorso in senso antiorario.*

Esercizio 3 *Integrare le funzione* $|z|$ *sullo spicchio di cerchio delimitato dal segmento di estremi* 0 *e* R *dell'asse reale e dalla bisettrice del I quadrante.*

Esercizio 4 *Integrare la funzione* $f(z) = 1/\bar{z}$ *sul cammino dato dalla circonferenza di centro O e raggio 2.*

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale delle funzioni:*

$$f_1(z) = \frac{\mathrm{Re} z}{z^2+1}; \quad f_2(z) = \frac{\mathrm{Im} z}{z^2+1}$$

sul cammino chiuso costituito dal segmento (-1,1) dell'asse reale e dai due segmenti congiungenti rispettivamente i punti -1 e 1 con il punto $\frac{3}{2}i$. *Confrontare il risultato con il valore assunto, sullo stesso cammino dall'integrale della funzione* $f(z) = (z^2+1)^{-1}$.

3 Sviluppi in serie

Esercizio 1 *Calcolare lo sviluppo in serie di potenze della funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{16z^4 + 1}$$

nell'intorno di $z_0 = 0$ *e determinarne il raggio di convergenza.*

Calcolare i seguenti integrali di $f(z)$*:*

1. $\oint_{C_1} dz f(z)$ $\qquad$ C_1 *circonferenza di centro* $z_0 = -i$ *e raggio* $R = 2$*;*
2. $\oint_{C_2} dz f(z)$ $\qquad$ C_2 *circonferenza di centro* $z_0 = -i$ *e raggio* $R = 1$.

Esercizio 2 *Determinare i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di* $z_0 = 1$ *della funzione:*

$$f(z) = \frac{z \sin(z\pi/2)}{z-1}.$$

Dire in quale regione del piano complesso lo sviluppo converge e calcolare l'integrale:

$$\oint_C dz f(z),$$

essendo C *la circonferenza di centro* $z_0 = 1$ *e raggio* $R = 2$.

Esercizio 3 *Sviluppare in serie di Laurent:*

$$f(z) = \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) \sin^3 z.$$

Calcolare

$$\oint_{|z|=1} dz z^2 f(z).$$

Esercizio 4 *Sviluppare in serie di potenze la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z}$$

nelle regioni:

1. $0 < |z| < 3$,
2. $|z - 3/2| < 3/2$,

3. $|z| > 3$.

Esercizio 5 *Determinare la regione del piano complesso in cui converge lo sviluppo in serie di Laurent intorno a* $z = 0$ *della funzione:*

$$g(z) = \frac{1}{1-z} \sin\left(\frac{\pi}{z}\right).$$

Calcolare il coefficiente c_{-1} *di questo sviluppo.*

Esercizio 6 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},$$

svilupparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $|z| > 2$*;*

2. $|z| < 1$*;*

3. $1 < |z| < 2$.

Esercizio 7 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 4}$$

svilupparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $|z| < 2$*;*

2. $|z| > 2$*;*

3. $1 < |z - 3| < 5$.

Esercizio 8 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z - 3}$$

nella regione $1 < |z| < 3$.

Esercizio 9 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)(z - 4)}$$

nella regione $2 < |z| < 4$.

Esercizio 10 *Data la funzione*

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right) :$$

1. *se ne individuino e classifichino le singolarità (tenendo conto anche del punto all'infinito);*
2. *se ne determini lo sviluppo in serie di Laurent nell'intorno di* $z = 0$*;*
3. *se ne calcoli il residuo all'infinito.*

Esercizio 11 *Data la funzione:*

$$f(z) = \frac{z - i}{z(z + i)}$$

scriverne lo sviluppo in serie di potenze nell'intorno dei punti:

1. $z_0 = 0$*;*
2. $z_0 = -i$*;*
3. $z_0 = -i/2$.

Specificare in tutti e tre i casi il dominio di convergenza.

Esercizio 12 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 5z + 4}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1$*;*
2. $1 < |z| < 4$*;*
3. $|z| > 4$.

Esercizio 13 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{(z - 1)(z^2 + 4)}$$

nelle regioni

1. $|z| < 1$,
2. $1 < |z| < 2$,
3. $|z| > 2$,

4. $0 < |z-1| < \sqrt(5)$.

Esercizio 14 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}$$

e svilupparla in serie di potenze nell'intorno di $z = 0$. *Qual è il raggio di convergenza?*

Esercizio 15 *Data la funzione*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z - 2},$$

svilupparla in serie di potenze nelle regioni:

1. $0 < |z+1| < 3$;
2. $|z| < 1$;
3. $1 < |z| < 2$;
4. $|z| > 2$.

Esercizio 16 *Determinare il dominio di convergenza nel piano* z *della serie:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{1+z^2}{1-z^2} \right)^n .$$

Esercizio 17 *Sviluppare in serie di Laurent, nell'anello* $1 < |z| < 3$, *la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4z - 3}.$$

Esercizio 18 *Sviluppare in serie di Laurent la funzione:*

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 5z + 4}$$

nei domini:

1. $|z| < 1$,
2. $1 < |z| < 4$.

Esercizio 19 *Data la funzione* $f(z) = \frac{1}{z^3+1}$*, svilupparla in serie di potenze*

a) nel dominio $0 < |z+1| < \sqrt{3}$ *(Laurent)*

Si consiglia il cambiamento di variabile $w = z + 1$*.*

b) nel dominio $|z| < 1$ *(Taylor)*

Esercizio 20 *Sviluppare in serie di Laurent nell'anello* $a - \sqrt{a^2-1} < |z| < a + \sqrt{a^2-1}$ *la funzione:*

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2az + 1}$$

Esercizio 21 *Sviluppare in serie di Laurent:*

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

nell'intorno di $z_1 = 1, z_2 = \omega = exp(2\pi i/3), z_3 = \omega^2$*, specificando in ognuno dei 3 casi il dominio di convergenza.*

Esercizio 22 *Data la funzione:*

$$f(z) \;=\; \frac{\sin z}{z^3}$$

1. *Se ne classifichino le singolarita', tenendo anche conto del punto all'infinito*

2. *Se ne costruisca lo sviluppo di Laurent in* $z = 0$*, indicandone il dominio di convergenza.*

Esercizio 23 *Determinare il dominio di convergenza della serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + n! + (n!)^2}{1 + (n!)^3} 2^n \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n .$$

4 Classificazione di singolarità

Esercizio 1 *Siano* $f_+(z)$ *e* $f_-(z)$ *i due rami monodromi della funzione*

$$f(z) \;=\; z^{\frac{1}{2}}\mathrm{sech} z$$

che si ottengono tagliando il piano complesso lungo il semiasse reale positivo; calcolare:

$$R_+ = Res(f_+(z))|_{z=i\pi/2}; \quad R_- = Res(f_-(z))|_{z=-i\pi/2}$$

.

Esercizio 2 *Determinare* $Res_{z=a}[f(g(z))]$*, sapendo che* $g(z)$ *è analitica in* $z = a$*, con derivata prima diversa da* 0*, mentre la funzione* $f(\zeta)$ *ha un polo del primo ordine in* $\zeta \;=\; g(a)$*, il cui residuo vale* A*.*
Risposta: il residuo vale $\frac{A}{g'(a)}$.

Esercizio 3 *Trovare i residui delle funzioni*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$
$$g(z) = e^z \csc^2(z)$$

nei loro poli al finito.

Esercizio 4 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = \sqrt{z}\tan z.$$

Esercizio 5 *Caratterizzare le singolarità della funzione:*

$$f(z) = z^{3/2}\frac{\mathrm{Log}(z^3 - 1)}{\sinh z}.$$

Esercizio 6 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \mathrm{Log}(z^2 + a^2)\frac{z}{\tanh z}.$$

Esercizio 7 *Determinare in tutto il piano complesso chiuso le singolarità della funzione:*

$$f(z) = z\mathrm{Log}(z^2 - 1).$$

Dire come si deve "tagliare" il piano complesso in modo da mantenere distini i diversi rami della funzione.

Esercizio 8 *Identificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^{\frac{1}{2}} z}{\sinh z}.$$

Indicare anche un possibile modo per "tagliare" il piano complesso in modo che i diversi rami monodromi della funzione rimangano separati.

Esercizio 9 *Classificare le singolarita sulla sfera di Riemann della funzione* $f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$.

Esercizio 10 *Classificare le singolarità della funzione:*

$$f(z) \;=\; z^{\frac{1}{2}} \mathrm{sech} z$$

.

Esercizio 11 *Classificare le singolarità (inclusi i punti di diramazione) della funzione:*

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1}\,\mathrm{sech}\, z.$$

Esercizio 12 *Determinare il più grande insieme (aperto) A del piano z in cui è olomorfa la funzione*

$$h(z) = \ln[z(1-z)],$$

considerando la determinazione principale del logaritmo.

Determinare, poi, in A, posizione e tipo delle singolarità di

$$f(z) = \frac{h(z)}{\sin^2(i\pi z)}.$$

Esercizio 13 *Classificare le singolarità della funzione*

$$f(z) = \mathrm{Log}(z^2 + a^2)\frac{z}{\tanh z}.$$

5 Ricostruzione di funzioni

Esercizio 1 *$f(z)$ è analitica in un anello di centro O e contenente al suo interno il cerchio unitario ($|z| = 1$). Quali condizioni debbono essere soddisfatte dai coefficienti del suo sviluppo di Laurent intorno a $z = 0$ affinché $f(z)$ assuma valori reali per $|z| = 1$?*

Esercizio 2 *La funzione $f(z)$ ha un polo del primo ordine all'infinito, dove si ha:*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 1;$$

essa inoltre vale 0 nell'origine e non ha altre singolarità ad eccezione dei punti $z_1 = i,\ z_2 = -i$, dove ha due poli semplici con residui $r_1 = 2,\ r_2 = -2$. Determinare $f(z)$.

Esercizio 3 *Determinare la funzione $f(z)$ sapendo che:*

1. *è analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z_1 = 1,\ z_2 = -1$ in cui ha poli semplici con residui $r_1 = 1/2,\ r_2 = -1/2$;*
2. *vale $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$;*
3. *$f(0) = 0$.*

Esercizio 4 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *ha uno zero doppio nell'origine;*
2. *è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti z_k tali che $z_k^3 = 1$, dove ha poli semplici;*
3. $\mathrm{Res} f(z)|_{z=\infty} = -1$.

Esercizio 5 *Determinare la funzione razionale di variabile complessa che gode delle seguenti proprietà:*

1. *la parte principale del suo sviluppo di Laurent nell'intorno del punto all'∞ vale $2z^3$;*
2. *ha due poli semplici nei punti $z_1 = 3,\ z_2 = 4i$ con residui $r_1 = 1,\ r_2 = 1/2$;*
3. *vale 1 nell'origine.*

Esercizio 6 *Determinare la funzione razionale $R(z)$ caratterizzata dalle seguenti proprietà:*

1. *ha N poli semplici al finito nei punti $z_k = \exp(2k\pi i/N),\ k = 0, \ldots, N-1$ con residui $(-1)^k$;*
2. *$R(0) = 0$;*
3. *La parte principale del suo sviluppo di Laurent all'∞ vale z^2.*

Esercizio 7 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ sapendo che:*

1. $\lim_{z\to\infty} \left(f(z) - 1 - z^2\right) = 0$
2. *$f(z)$ ha, al finito, come unica singolarità un polo di ordine 3 nell'origine; i coefficienti della parte principale del corrispondente sviluppo di Laurent sono individuate dalle relazioni:*
   (a) $\lim_{z\to 0} z^3 f(z) = 1,$
   (b) $\lim_{z\to 0} \dfrac{d}{dz}(z^3 f(z)) = 0,$
   (c) $\lim_{z\to 0} \dfrac{d^2}{dz^2}(z^3 f(z)) = -2.$

Esercizio 8 *Determinare la funzione $f(z)$ analitica in ogni dominio limitato del piano complesso ad eccezione dei punti $z_1 = i,\ z_2 = -i$, in cui ha poli semplici con residui rispettivamente $r_1 = 3,\ r_2 = 5$, sapendo che:*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) - 1 - z^2 = 0.$$

Esercizio 9 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *$f(0) = 0$;*
2. *come uniche singolarità al finito ha 3 poli semplici nelle radici cubiche dell'unità, tutti con residuo uguale a 1;*
3. $\lim_{|z|\to\infty} \dfrac{f(z)}{z} = 1.$

Esercizio 10 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$, analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti ζ_k tali che $\zeta_k^3 = 1$ $(k = 1, 2, 3)$ in cui ha poli semplici con residui $r_k = \pi$, sapendo che $f(0) = 1$.*

Esercizio 11 *Determinare la funzione $f(z)$, analitica in tutto il piano complesso chiuso ad eccezione del punto $z = 0$, in cui ha un polo doppio, e del punto all'infinito, in cui ha un polo semplice, sapendo che:*

$$lim_{z\to 0} z^2 f(z) = 1; lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 2$$

e che $f(z)$ ha due zeri semplici nei punti $z_\pm = \pm i$.

Esercizio 12 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ che ha due zeri doppi nei punti ± 1, due poli doppi nei punti $\pm i$ e tende a 1 quando $z \to \infty$.*

Esercizio 13 *Determinare la funzione razionale che gode delle seguenti proprietà:*

(i) Ha un polo doppio nell'origine con residuo nullo e un polo doppio all'infinito;
(ii) $lim_{z\to 0} z^2 f(z) \;=\; lim_{z\to\infty} z^{-2} f(z) \;=\; 1$;
(iii) $f(1) = f'(1) = 0$.

Esercizio 14 *Determinare $f(z)$ sapendo che:*
a. $f(0) = 0$; *b.*$\lim_{z\to\infty} f(z)/z = 1$;
c. $f(z)$ ha due poli doppi in -1 e $+1$ con residui $r_{-1} = 0$ e $r_{+1} = 1$;
$\lim_{z\to\pm 1}(z \mp 1)^2 f(z) = 2$.

Esercizio 15 *Determinare la funzione razionale $f(z)$ che:*
a) ha un polo semplice in $z = 0$ con residuo 1 e un polo doppio in $z = 1$ con residuo 0.
b) ha uno zero doppio in $z = -1$ e uno zero semplice in $z = i$.
c) e' tale che $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$.

Esercizio 16 *Determinare la funzione $f(z)$ sapendo che è una funzione analitica in tutto il piano complesso, ad eccezione del punto all'infinito, in cui ha un polo del II ordine, e delle radici quadrate di -1, in cui ha poli semplci con residui ± 1, e che per essa valgono le formule*

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^2} = 1$$
$$f(0) = 0$$
$$f'(0) = 1$$

Esercizio 17 *Determinare la funzione di variabile complessa $f(z)$ che gode delle seguenti proprieta':*

1. *ha uno zero doppio nell'origine;*
2. *si annulla all'infinito ed e' analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti z_k tali che $z_k^3 = 1$ dove ha poli semplici;*
3. *il suo residuo all'infinito vale -1.*

Esercizio 18 *Determinare $g(z)$ tale che:*

1. *ha soltanto un polo semplice in z_0;*
2. *ha soltanto uno zero semplice in z_0^{-1};*
3. $\lim_{z\to\infty} g(z) = 1$.

Esercizio 19 *Si ricostruisca la funzione razionale $f(z)$, sapendo che:*

- *$f(0)$ vale 1;*
- *la funzione ha due poli, uno semplice in $z = -1$, con residuo 1, e uno doppio, in $z = 1$, con residuo pure uguale a 1;*
- *la funzione tende al valore 2 per $z \to \infty$.*

Esercizio 20 *Costruire una funzione razionale di variabile complessa $f(z)$ che ha come uniche singolarità al finito due poli semplici nei punti $\pm i$ con residui pari a $\pm\frac{1}{2i}$. Usando il I teorema di Liouville, dimostrare che queste proprietà determinano $f(z)$ a meno di una costante.*

Esercizio 21 *La funzione $f(z)$ ha un polo del terzo ordine all'infinito, due soli zeri di uguale molteplicità in $z = \pm i$, e un polo semplice con residuo 1 nell'origine. Calcolare*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{f(x)}.$$

6 Integrali di funzioni trigonometriche

Esercizio 1 *Dimostrare che i seguenti integrali:*

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{a\exp(in\theta) - 1} \qquad a < 1$$

sono nulli per ogni intero n non nullo.

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}, \qquad r < R.$$

Provare a calcolare l'integrale, più generale:

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{e^{in\theta}}{R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta}, \qquad r < R.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale*

$$I = \oint_C dz \frac{\exp(z^2)}{(z^2-1)^2 \sin(\pi z)}$$

dove C è la circonferenza di equazione $|z - 1/2| = 1$ percorsa in senso antiorario.

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale*

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos^2\theta}{2 + \sin\theta}$$

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale*

$$I = \oint_C dz \frac{1}{\sin^2 z},$$

dove C è il cerchio centrato nell'origine di raggio $r = 3/2\pi$ percorso in senso antiorario.

Esercizio 6 *Calcolare per $0 < a < 1$ l'integrale:*

$$I(z) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(n\theta)}{1 + a\sin\theta}$$

Esercizio 7 *Calcolare per $\zeta \neq -1$ l'integrale:*

$$I(\zeta) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\exp(in\theta)}{1 + \zeta \cos\theta}$$

Facoltativo: discutere le proprieta' di analiticità di $I(\zeta)$.

Esercizio 8 *Calcolare la successione di funzioni $I_n(\rho)$ definite dalla formula:*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\theta)}$$

Esercizio 9 *Calcolare l'integrale ($q \neq 1$):*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} dt \frac{\sin{(nt)}}{1 + q^2 - 2q\cos{(t)}}.$$

Esercizio 10 *Calcolare gli integrali:*

$$I_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \frac{(sinx)^{2n}}{1 + acosx}; \quad |a| < 1.$$

Esercizio 11 *Calcolare l'integrale*

$$I \ = \ P \int_0^{2\pi} d\theta \frac{cos\theta}{1 - sin\theta}.$$

Esercizio 12 *Calcolare l'integrale*

$$I(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta - \cos\alpha}{\sin\theta - \sin\alpha} d\theta.$$

Esercizio 13 *Calcolare col metodo dei residui l'integrale*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\sin\theta}.$$

Esercizio 14 *Calcolare l'integrale:*

$$J(k) = \int_0^\pi \frac{\cos^2\theta - k\sin^2\theta}{\cos^2\theta + k\sin^2\theta} d\theta$$

con k reale positivo.

Esercizio 15 *Calcolare l'integrale:*

$$I_k = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\sin(k\theta)}{1 + b\cos\theta}; \qquad 0 < b < 1.$$

Esercizio 16 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos^2\theta}{2 + \sin\theta}.$$

Esercizio 17 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k,a) = \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\cos(k\theta)}{1 + a^2 - 2a\cos\theta}, \qquad 0 < a < 1,\ k \geq 0.$$

Esercizio 18 *Calcolare l'integrale:*

$$I_n = \int_0^{\pi} dx \frac{\cos(nx)}{1 + a^2 - 2a\cos x}.$$

Esercizio 19 *Calcolare l'integrale*

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{1}{1 + a\cos(n\theta)}, \qquad 0 < a < 1$$

Esercizio 20 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \frac{\cos(2\theta)}{a - \sin^2\theta}, \qquad a > 1.$$

7 Integrali di funzioni meromorfe

Esercizio 1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_{-1}^{\infty} dx \frac{x}{x^3+8}$$

Esercizio 2 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_{\gamma} dz \frac{\cos z}{z^2(z-1)}$$

dove γ *è la curva chiusa orientata positivamente, e così definita: (i)* $|z| = 1/3$*; (ii)*$|z-1| = 1/3$*;* $|z| = 2$*.*

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{0}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+x-2}.$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale*

$$I = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^4+13z^3+802z}{53z^5+1044}$$

dove C_R *è una circonferenza di centro l'origine e raggio* R *percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \oint_{C} dz\, w(z)$$

con C *circonferenza di centro* $z_0 = 0$ *e raggio* $R = 1$ *e* $w(z)$ *la funzione:*

$$w(z) = \sum_{m=-2}^{2} (-1)^m z^m \sum_{n=-2}^{2} n^2 z^n.$$

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale:*

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{C_R} dz \frac{z^3}{2z^4+5z^3+27},$$

dove C_R *è la circonferenza di raggio* R*, centrata nell'origine, percorsa in senso antiorario.*

Esercizio 7 *La funzione $f(z)$ è continua e non nulla sulla curva chiusa γ, e nel dominio interno ad essa è analitica ovunque ad eccezione di un numero P di poli (non necessariamente distinti). Siano N i suoi zeri (anch'essi, non necessariamente distinti) Dimostrare la formula (teorema dell'incremento logaritmico):*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma dz \frac{f'(z)}{f(z)} = N - P$$

Esercizio 8 *Calcolare il residuo in $z = 0$ delle seguenti funzioni:*

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2}; \quad f_2(z) = \frac{1}{\sinh z} - \frac{1}{z}; \quad f_3(z) = \exp(1/z).$$

Utilizzare il risultato per calcolare gli integrali $\oint_{|z|=3\pi/2} f_i(z)$.

Esercizio 9 *Sia $P(z)$ un polinomio di grado n, con zeri $\{z_j\}_{j=1}^n$. Dimostrare la formula:*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{z_j^k}{P'(z_j)} = 0; \quad k = 0, \dots, n-2.$$

Suggerimento: si consideri $\oint dz \frac{z^k}{P(z)}$, dove l'integrale e' fatto lungo una opprtuna curva chiusa C.

Esercizio 10 *Utilizzando il teorema dei residui, dimostrare la formula:*

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{z - z_i} = \frac{P^{(N-1)}(z)}{Q^{(N)}(z)}$$

dove:

$$Q^{(N)}(z) = \prod_{i=1}^{N}(z - z_i), \quad P^{(N-1)}(z) = \prod_{i=1}^{N-1}(z - \mu_i), \quad r_i = \frac{\prod_{j=1}^{N}(z_i - \mu_j)}{\prod_{k\neq i}(z_i - z_k)}.$$

Esercizio 11 *Senza effettuare l'integrale, dimostrare la formula:*

$$\oint_C dz \frac{1}{z^4 + 8z - 9} = 0,$$

dove C è un cerchio di centro l'origine e raggio $R > 9$.

8 Integrali di tipo Fourier

Esercizio 1 *Calcolare il seguente integrale*

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{i\alpha-1}}{(\ln t + b)^2 + a^2}.$$

(Suggerimento: si consideri un opportuno cambiamento di variabile ...).

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{1 - coskx}{x^2(x^2 + a^2)}$$

Esercizio 3 *Calcolare gli integrali:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(kx)}{x^2 + a^2},$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x(x^2 + a^2)}.$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_0^\infty dx \frac{\cos(2x) - 1}{x^2}$$

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale:*

$$I_1 = \int_0^\infty dx \frac{\sin^4(x)}{x^4}.$$

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale*

$$F(x) = \int_0^\infty dt \ \frac{\cos xt}{1 + t^2}$$

.

Esercizio 7 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sin t}{t(t^4 + 1)}$$

Esercizio 8 *Si consideri la funzione $g(t)$ definita qui di seguito:*

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{-\mathrm{i}xt}}{x - \epsilon + \mathrm{i}\delta}$$

dove $\delta > 0$.
Dimostrare che

$$g(t = 0^+) - g(t = 0^-) = -2\pi\mathrm{i}.$$

Esercizio 9 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}.$$

Esercizio 10 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1 - \cos x}{x^2(x^2 - 1)}$$

Esercizio 11 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^3 + 1}$$

Esercizio 12 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = P \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\sin^2(kx)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 13 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{ikx}}{x^3 - a^3}, \qquad a > 0,\ k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 14 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos^3 x}{1 + x^2}.$$

Esercizio 15 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(\alpha x)}{x^3 - 1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 16 *Calcolare l'integrale:*

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(\alpha x) - \sin(\beta x)}{x} dx, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 17 *Calcolare l'integrale*

$$I = P\int_0^{\infty} dx \frac{\sin(kx)}{x(x^2 - 1)}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 18 *Calcolare l'integrale*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{x^4 - 1} dx \qquad k \in \mathbb{R}$$

Esercizio 19 *Calcolare l'integrale:*

$$I \;\; = \;\; \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\exp(ikx)}{x^4 + 1}.$$

Esercizio 20 *Calcolare a scelta due degli integrali:*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\cos(ax)}{\cosh(bx)}$;
2. $\displaystyle P\int_0^{\infty} dx \frac{\cos(ax)}{b^2 - x^2}$;
3. $\displaystyle\int_0^{\infty} dx \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x^2}$.

Esercizio 21 *Calcolare l'integrale:*

$$I(k) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(kx) - 1}{\sinh^2(x)}$$

9 Integrali con funzioni razionali di funzioni iperboliche

Esercizio 1 *Calcolare il seguenti integrale:*

$$P \int_{o}^{\infty} \frac{\cos x}{(\sinh(x-1))(\sinh(x+1))}$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \frac{\exp(\alpha x)}{\cosh x}.$$

Esercizio 3 *Calcolare l'integrale:*

$$I_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{(\beta + e^x)(1 + e^{-x})}, \qquad \beta < 0.$$

Esercizio 4 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{x}{ae^x + be^{-x}},$$

con a e b reali positivi.

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale*

$$I = P \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{e^{at}}{\sinh t}; \qquad 0 < a < 1.$$

10 Integrali che richiedono l'uso di funzioni polidrome

Esercizio 1 *Calcolare i seguenti integrali:*

$$\int_0^\infty dx \frac{(\sqrt{x}) \log x}{1+x^2}$$
$$\int_{-a}^{b} dx x (\frac{b-x}{x+a})^{1/2}$$

Esercizio 2 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\exp(\alpha t)}{\sinh t}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad |\alpha| < 1$$

Esercizio 3 *Calcolare i seguenti integrali:*

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} dx \sqrt{\frac{1-x}{1+x}};$$
$$I_2 = P\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{\sinh x}.$$

Esercizio 4 *Calcolare gli integrali:*

$$I_1 = P\int_0^\infty dx \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^2 - a^2}$$
$$I_2 = P\int_0^\infty dx \frac{ln(x)}{x^2 - a^2}$$
$$I_3 = \int_0^\infty dx \frac{coskx}{cosh\beta x}$$

Per l'ultimo integrale, si suggerisce il cambiamento di variabile $t = e^{\beta x}$.

Esercizio 5 *Calcolare l'integrale:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\alpha x}}{\cosh x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 6 *Calcolare l'integrale:*

$$P\int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{x^2-4}$$

Esercizio 7 *Si calcoli a scelta uno dei seguenti tre integrali:*

1. $\displaystyle\int_a^\infty dx \frac{(x-a)^{\frac{1}{3}}}{x^2+2};$
2. $\displaystyle\int_0^\infty dx \frac{1}{x^4+1};$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{e^{\alpha x}}{\cosh(\beta x)}, \qquad \beta > \alpha > 0.$

Esercizio 8 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{x^3+1}$$

Esercizio 9 *Calcolare l'integrale*

$$P\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^3-1}.$$

Esercizio 10 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I_1 \;=\; \int_0^\infty dx \frac{x^\alpha \log x}{x^2+1} \quad (1 > \alpha > 0)$$

Esercizio 11 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{|x|^{\frac{1}{3}}}{x^2+a^2}.$$

Esercizio 12 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}.$$

Esercizio 13 *Calcolare l'integrale:*

$$I \quad = \quad P\int_0^\infty dx \frac{x^{1/2}}{x^2-4}.$$

Esercizio 14 *Calcolare l'integrale :*

$$I = \int_0^{+\infty} dx \frac{x^{1/2}\log(x)}{x^2+1}.$$

Esercizio 15 *Calcolare col metodo dei residui l'integrale*

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^\infty \frac{\ln(x-1/2)}{x(4x^2+3)}dx.$$

Esercizio 16 *Calcolare l'integrale:*

$$I = P\int_0^\infty dx \frac{x^{1/3}}{x^3-1}.$$

Esercizio 17 *Calcolare il seguente integrale:*

$$I = \int_{-1}^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{1}{x^2+1}.$$

Esercizio 18 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_a^b dx\,(b-x)\ln\frac{b-x}{x-a}.$$

Esercizio 19 *Calcolare l'integrale*

$$I = \int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1+x)}.$$

Esercizio 20 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{px}}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{Z}; 0 < \alpha < p.$$

Esercizio 21 *Calcolare l'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dx\, x e^{\alpha x}\mathrm{sech}\, x, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

11 Sviluppi di Mittag–Leffler

Esercizio 1 *Dimostrare la seguente relazione*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[(2n+1)\pi \mathrm{i} + a]^2} = -\frac{4}{\cosh^2(a/2)}.$$

Utilizzare il risultato per dimostare che

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

(Suggerimento: si considerino i poli della tangente iperbolica per trasformare la serie in un integrale nel campo complesso e ...).

Esercizio 2 *Data la funzione:*

$$f(z) = \cot z - \frac{1}{z},$$

1. *determinarne le sue singolarità in tutto il piano complesso chiuso e calcolare i residui corrispondenti;*
2. *scriverne l'espansione in fratti semplici (sviluppo di Mittag-Leffler);*
3. *assumendo l'uniforme convergenza dell'espressione suddetta, ricavare lo sviluppo*

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-n\pi)^2)} + \frac{1}{(z+n\pi)^2} \right)$$

(sviluppo di Weierstrass).

Esercizio 3 *Si confrontino tra loro le due funzioni:*

$$\begin{aligned} G(z;x) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik\pi x}}{z - ik\pi} \quad , \qquad x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}. \\ F(z;x) &= e^{zx} \coth z \end{aligned}$$

Quanto vale la loro differenza?

12 Formule di Plemelji

Esercizio 1 *Calcolare l'integrale*

$$F(z) \;=\; \int_0^\infty dt \frac{t^{1/2}}{(t^2+1)(t-z)}; \quad z \notin \mathbb{R}^+$$

e discuterne le proprietà di analiticità in z
Determinare il salto:

$$\Delta(t_0) := \lim_{\epsilon \to 0} F(t_0 + i\epsilon) - F(t_0 - i\epsilon)$$

Cosa si può dire in generale per un integrale del tipo:

$$F(z) = \int_0^\infty dt \frac{f(t)}{t-z}$$

con $f(t)$ *assolutamente integrabile in* $\mathbb{R}^+$*?*

Esercizio 2 *Data*

$$f(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{z - z_i} + c_0 + c_1 z \qquad (|z_i| < R, \quad i = 1, \ldots, N)$$

costruire $f^{(-)}(z)$*, analitica per* $|z| < R$*, e* $f^{(+)}(z)$*, analitica per* $|z| > R$*, tali che*

$$\lim_{|z| \to \infty} f^{(+)}(z) = 0$$
$$\lim_{|z| \to R^-} f^{(-)}(z) - \lim_{|z| \to R^+} f^{(+)}(z) \;=\; f(z)|_{|z|=R}$$

Esercizio 3 *Determinare le funzioni* $F^{(e)}(z)$ *e* $F^{(i)}(z)$*, analitiche rispettivamente all'esterno e all'interno della circonferenza di centro origine e raggio 1, e tali che:*

$$\lim_{z \to 1} F^{(e)}(z) - F^{(i)}(z) = \operatorname{Re} z.$$

Esercizio 4 *Sul cerchio* $|\zeta| = 1$ *è assegnata la funzione*

$$\phi(\zeta) = \frac{1}{1 + a \cos\theta}, \qquad a < 1;\; \zeta = \exp(i\theta).$$

Determinare le funzioni $F^{\pm}(z)$*, analitiche rispettivamente per* $|z| < 1$*,* $|z| > 1$*, tali che* $F^{\pm}(z) \to \phi(\zeta)$*, quando* $z \to \zeta^{\pm}$*.*

Esercizio 5 *Determinare due funzioni $f_i(z)$ e $f_e(z)$ tali che:*

1. *$f_i(z)$ sia analitica all'interno del cerchio unitario;*
2. *$f_e(z)$ sia analitica all'esterno del cerchio unitario;*
3. *valga*

$$\lim_{z\to\zeta^-} f_i(z) - \lim_{z\to\zeta^+} f_e(z) = \mathrm{Re}(\zeta), \qquad |\zeta| = 1.$$

Esercizio 6 *Determinare esplicitamente la funzione:*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{1}{(|x|+1)(x-z)}, \qquad \mathrm{Im} z \neq 0$$

e verificare la formula di Plemely:

$$\lim_{\epsilon\to 0} [F(x+i\epsilon) - F(x-i\epsilon)] = 2\pi i \frac{1}{|x|+1}.$$

Esercizio 7 *Dire se la funzione:*

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{e^{-|t|}}{t-z}$$

è analitica per $z \notin \mathbb{R}$ e calcolarne la discontinuità sull'asse reale

$$\Delta\phi = \lim_{\epsilon\to 0} \phi(t+i\epsilon) - \phi(t-i\epsilon), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 8 *Dimostrare che la funzione:*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\exp(-|t|)}{t-z}$$

e' analitica per z non appartenente a $\mathbb{R}$ e calcolarne la discontinuità sull'asse reale:

$$\Delta F(t) = \lim_{\epsilon\to 0} F(t+i\epsilon) - F(t-i\epsilon)$$

13 Trasformazioni conformi

Esercizio 1 *La trasformazione $z \to w$ è del tipo bilineare di Moebius. Su quale curva del piano z avviene che $|dw| = |dz|$?*

Esercizio 2 *Trovare la trasformazione conforme che manda i cerchi*

$$|z - a| = r; \qquad |z + a| = r$$

nei cerchi concentrici:

$$|w - b| = R_1; \quad |w - b| = R_2$$

Esercizio 3 *Verificare che la trasformazione (detta trasf. di Cayley):*

$$w \;=\; i\frac{1-z}{1+z}$$

mappa la circonferenza $|z| = 1$ del piano z nell'asse reale del piano w.

A quale semipiano corrisponde l'esterno (l'interno) del cerchio unitario del piano z?

Esercizio 4 *Scrivere una trasformazione di Moebius:*

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

che mappa la circonferenza unitaria (del piano z) nell'asse reale (del piano w) e l'interno (l'esterno) del cerchio unitario nel semipiano inferiore (superiore).

14 Sviluppi asintotici

Esercizio 1 *Dimostrare che la funzione di variabile complessa:*

$$F(z) = \int_0^\infty dt \frac{\exp(-zt)}{1+t^2}$$

e' analitica per Rez > 0. Assumendo z reale ($z = x$), determinare lo sviluppo asintotico di $F(z)$.

Esercizio 2 *Dire se sono vere le seguenti stime asintotiche e spiegarne il motivo:*

$$\begin{aligned} &a) \quad 2\sinh(\alpha x) \sim \exp(\alpha x), \quad x \to +\infty, \quad \alpha > 0 \\ &b) \quad \int_0^{+\infty} dt \frac{\sin(\lambda t)}{(1+t^2)} \quad = \quad O(\lambda^{-1}), \lambda \to \infty \\ &c) \quad \frac{1}{(1-x)} = 1 + x + O(x^2), \quad x \to 0 \end{aligned}$$

Esercizio 3 *Calcolare con il metodo di Laplace il termine dominante dell'andamento asintotico per grandi x dell'integrale:*

$$I = \int_0^\infty dt \exp[-x(t + a^2/t)]$$

Esercizio 4 *Calcolare il termine dominante nello sviluppo asintotico per $\lambda \to \infty$, dell'integrale:*

$$I(\lambda) = \int_0^\infty dt e^{-\lambda(t^2-a^2)^2}$$

Esercizio 5 *Qual è, per $\lambda \to +\infty$, il termine dominante dell'integrale:*

$$I(\lambda) \int_0^\infty dt \frac{e^{\lambda \sin^2\left(\frac{2t}{\pi}\right)}}{1+t^2} ?$$

Esercizio 6 *a) Sia*

$$F(x) \quad = \quad \int_0^\infty dt \ \frac{\exp(-x(t-1)^2)}{\cosh t}$$

Calcolare il termine dominante dello sviluppo asintotico per grandi x.
b) Con il metodo della fase stazionaria calcolare il termine dominante per grandi x e t, nella direzione $x/t \ = \ cost. = v$, dell'integrale

$$I(x,t) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dk \ \frac{\exp(ikx - ik^3 t)}{\cosh k}$$

Esercizio 7 *Calcolare il seguente integrale con un errore inferiore a* $\frac{1}{1000}$*:*

$$I \;=\; \int_0^\infty \frac{\exp(-1000t)}{1+t^3}$$

Esercizio 8 *Determinare il termine dominante per grandi* x *dell'integrale:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(ix\phi(t)) f(t)$$

con $\phi(t) = t^2 - a^2,\; f(t) = (\cosh t)^{-1}$

15 Prolungamento analitico

Esercizio 1 *La funzione $G(z)$ è definita dalla seguente rappresentazione integrale (trasformata di Laplace):*

$$G(z) = \int_0^\infty dt\, t^2 e^{-tz}.$$

Determinare il dominio di analiticità di $G(z)$ e il suo prolungamento analitico in tutto il piano complesso privato dell'origine.

Esercizio 2 *Sia:*

$$f_n(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-zt} t^n \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Trovare il dominio nel piano complesso z in cui vale l'uguaglianza:

$$f_n(z) = (-1)^n \frac{d^n}{dz^n} f_0(z).$$

Esercizio 3 *Data $f(t)$ tale che*

$$\int_0^\infty dt|f(t)| < \infty,$$

determinare il dominio di analiticità di:

1. $F_1(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-zt} f(t)$,
2. $F_2(z) := \int_0^\infty dt\, e^{-z^2 t} f(t)$.

Esercizio 4 *Determinare il dominio di analiticità della funzione*

$$F(z) = \int_0^\infty dt\, t e^{-zt}.$$