Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, II Università degli Studi di Roma, facoltà di Ingegneria

Soluzioni del 3º Recupero di Analisi II (primi 5 crediti) per Ingegneria Elettronica
09–12–05

Problema n.1

Compito A. La serie di Fourier è $-\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(\cos(k\pi)+1)}{k^2-1}(k\sin(kx)+\cos(kx)) = -\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{4p^2-1}(2p\sin(2px)+\cos(2px))$

Compito B. La serie di Fourier è $\frac{1}{\pi}-\frac{\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\cos(k\pi)+1)}{k^2-1}(k\sin(kx)-\cos(kx)) = \frac{1}{2\pi}-\frac{\sin x}{2}+\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{4p^2-1}(2p\sin(2px)-\cos(2px))$

Compito C. La serie di Fourier è $-\frac{1}{\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\cos(k\pi)+1)}{k^2-1}(-k\sin(kx)+\cos(kx)) = -\frac{1}{2\pi}+\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{4p^2-1}(-2p\sin(2px)+\cos(2px))$

Compito D. La serie di Fourier è $\frac{1}{\pi}-\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\cos(k\pi)+1)}{k^2-1}(-k\sin(kx)-\cos(kx)) = \frac{1}{2\pi}-\frac{\sin x}{2}-\frac{\cos x}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{4p^2-1}(-2p\sin(2px)-\cos(2px))$

Sulla convergenza puntuale e uniforme si vedano gli appelli precedenti

Problema n.2

È una equazione con condizioni al bordo non omogenee e costanti. Si cerca la soluzione nella forma $u(x,t)=v(x,t)+U(x)$ e l'equazione viene divisa in due parti. La prima è

$\begin{cases} U''=0 \\ U(0)=U(L)=1 \end{cases}$ da cui deriva $U(x)\equiv 1$ e la seconda è

$\begin{cases} v_{tt}=c^2v_{xx} \qquad 0<x<L \\ v(0,t)=v(L,t)=0 \qquad v(x,0)=\varphi(x)-1 \\ v_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$ dove φ e ψ variano a seconda dei casi.

Compito A. $L=2$, $\varphi(x)=1+x$ per $0\le x\le 1$, e $\varphi(x)=3-x$ per $1\le x\le 2$, $\psi(x)\equiv 0$. $v(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{2}\cos\frac{ck\pi t}{2}(v(x,0))_k$ e $(v(x,0))_k$ è nullo se k è pari e pari a $\frac{8\sin\frac{\pi k}{2}}{(\pi k)^2}$ per k dispari. La soluzione è quindi $u(x,t)=1+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{8(-)^k}{\pi^2(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\cos\frac{c(2k+1)\pi t}{2}$

Compito B. $L=2$, $\psi(x)=1+x$ per $0\le x\le 1$, e $\psi(x)=3-x$ per $1\le x\le 2$, $\varphi(x)\equiv 0$. $v(x,t)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{2}\Big(A_k\cos\frac{ck\pi t}{2}+B_k\sin\frac{ck\pi t}{2}\Big)$. $v(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{2}A_k\equiv -1=\sum_{k=1}^{+\infty}2\frac{\cos(k\pi)-1}{\pi k}\sin\frac{k\pi x}{2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4(-)^{k+1}}{\pi(2k+1)}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}$. $v_t(x,0)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{2}\frac{2}{\pi k}B_k=\psi(x)$.

$\psi(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\pi k(\cos(k\pi)-1)-4\sin\frac{\pi k}{2}}{(\pi k)^2}\sin\frac{k\pi x}{2}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-\pi(2k+1)-4(-)^k}{\pi^2(2k+1)^2}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}$ e quindi $B_{2k}\equiv 0$, $B_{2k+1}=\frac{-\pi(2k+1)-4(-)^k}{\pi^2(2k+1)^2}$. La soluzione alla fine è

$$u(x,t)=1+\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2}\Big(\frac{4(-)^{k+1}}{\pi(2k+1)}\cos\frac{c(2k+1)\pi t}{2}+\frac{-\pi 2(2k+1)-8(-)^k}{c\pi^3(2k+1)^3}\sin\frac{c(2k+1)\pi t}{2}\Big)$$

Compito C. $L=4$, $\varphi(x)=1+x$ per $0\le x\le 2$, e $\varphi(x)=5-x$ per $2\le x\le 4$, $\psi(x)\equiv 0$. $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{4}\cos\frac{ck\pi t}{4}(v(x,0))_k$ e $(v(x,0))_k=\dfrac{12\sin\frac{k\pi}{2}-2k\pi\cos\frac{k\pi}{2}}{(k\pi)^2}$ per cui $(v(x,0))_{2p}=\dfrac{2(-)^{p+1}}{2p\pi}$ se $k=2p$ è pari e $(v(x,0))_{2p+1}=\dfrac{12(-)^p}{((2p+1)\pi)^2}$ se $k=2p+1$ è dispari. La soluzione è quindi

$$u(x,t)=1+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{12(-)^p}{((2p+1)\pi)^2}\sin\frac{(2p+1)\pi x}{4}\cos\frac{c(2p+1)\pi t}{4}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2(-)^{p+1}}{2p\pi}\sin\frac{2p\pi x}{4}\cos\frac{c2p\pi t}{4}$$

Compito D. $L=4$, $\psi(x)=1+x$ per $0\le x\le 2$, e $\psi(x)=5-x$ per $2\le x\le 4$, $\varphi(x)\equiv 0$. $u(x,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin\frac{k\pi x}{4}\big(A_k\cos\frac{ck\pi t}{4}+B_k\sin\frac{ck\pi t}{4}\big)$. $u(x,0)\equiv -1$, $u_t(x,0)=\psi(x)$. Ripetendo i calcoli di B si ottiene

$$u(x,t)=1+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{4(-)^{p+1}}{\pi(2p+1)}\sin\frac{(2p+1)\pi x}{4}\cos\frac{c(2p+1)\pi t}{4}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{24\pi p(-)^{p+1}-16\pi p}{c\pi^3(2k+1)^3}\sin\frac{2p\pi x}{4}\sin\frac{c2p\pi t}{4}+$$
$$-\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{12\pi(2p+1)+48(-)^p}{c(\pi(2p+1))^3}\sin\frac{(2p+1)\pi x}{4}\sin\frac{c(2p+1)\pi t}{4}$$

Problema n.3

È una equazione con condizioni al bordo non omogenee, uguali e costanti pari a 1 oppure -1. A causa della particolare forma della funzione iniziale $u(x,0)=\pm1$ risulta che la soluzione è $u(x,t)\equiv\pm1$. Naturalmente l'applicazione della teoria conduce allo stesso risultato.

Problema n.4

La sfera è tagliata da un piano di equazione $z=\pm\frac{1}{\sqrt2}$ a seconda dei casi.
Compito A. Sia P la porzione di spazio che il piano $z=\frac{1}{\sqrt2}$ individua intersecando la sfera "piena". È un cerchio di raggio $r=\dfrac{1}{\sqrt2}$. Sia $V=\{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2\le 1\ z\ge\dfrac{1}{\sqrt2}\}$. Sia $S=\{(x,y,z)\colon\ x^2+y^2+z^2=1\ z\ge\dfrac{1}{\sqrt2}\}$.

• Calcoliamo il flusso facendo l'integrale di superficie ed usando coordinate cartesiane. La semisupeficie sferica è parametrizzata da $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$. La porzione che cerchiamo è parametrizzata come $(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2})$ $x^2+y^2\le 1/2$. Non è specificato quale vettore ortogonale dobbiamo prendere e quindi scegliamo quello che punta verso l'alto ossia $(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}1)$. L'integrale che dobbiamo calcolare è
$\displaystyle\int\int_{x^2+y^2\le 1/2}dxdy\Big(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+\frac{y^3}{\sqrt{1-x^2-y^2}}+1-x^2-y^2)\Big)$. Il cerchio su cui integrare si parametrizza in coordinate polari $x=\frac12\rho\cos t$, $y=\frac12\rho\sin t$ e si vede subito che i primi due integrali sono nulli dovendo integrare fra 0 e 2π $\cos^3 t$ e $\sin^3 t$. L'unico integrale che sopravvive è $\displaystyle\int_0^1 d\rho\int_0^{2\pi}dt\frac12\rho(1-\frac12\rho^2)=\frac38\pi$

• Calcoliamo il flusso facendo l'integrale di superficie ed usando coordinate polari sulla superficie della sfera. $x=\sin t\cos u$, $y=\sin t\sin u$, $z=\cos t$ con $0\le t\le\pi/4$, e $0\le u\le 2\pi$. Il vettore ortogonale esterno è $\underline{n}=(\sin^2 t\cos u,\sin^2 t\sin u,\sin t\cos t)$ e quindi l'integrale da calcolare è $\displaystyle\int_0^{2\pi}du\int_0^{\pi/4}dt(\sin^4 t\cos^3 u+\sin^4 t\sin^3 u+\cos^3 t\sin t)=\int_0^{2\pi}du\int_0^{\pi/4}dt\cos^3 t\sin t=\frac38\pi$

Usando il Teorema di Gauss si ha $\displaystyle\int\int(f(\underline{x}),\underline{n}^e)d\sigma=\int\int\int div(f)dxdydz-\int\int(f(\underline{x}),\underline{n}^e)$. La normale esterna si intende riferita alla superficie in questione. $\int\int\int_V div(\underline{f})dxdydz = 2\int_0^{1/\sqrt{2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\vartheta \rho^2 \sin\vartheta(x+y+z) = \frac{\pi}{16}$. $\int\int_P (\underline{f}(\underline{x}), \underline{n}^e) = \int\int_{x^2+y^2\leq\frac{1}{2}} (-z^2) = -\frac{\pi}{4}$. Il risultato è $\frac{5}{16}\pi$.

• Calcoliamo lo stesso integrale integrando "per strati". Le coordinate sono $z = u$, $x = \sqrt{1-u^2}\cos t$, $x = \sqrt{1-u^2}\sin t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ e $1/\sqrt{2} \leq u \leq 1$. Il vettore esterno è $(\sqrt{1-u^2}\cos t, \sqrt{1-u^2}\sin t, u)$. L'integrale da effettuare diventa $\int_0^{2\pi} dt \int_{1/\sqrt{2}}^1 du((1-u^2)^{3/2}\cos^3 t + (1-u^2)^{3/2}\sin^3 t + u^3) = \int_0^{2\pi} dt \int_{1/\sqrt{2}}^1 du u^3 = \frac{3}{8}\pi$

• Si poteva usare il teorema della divergenza. Avremmo avuto
$\int\int\int_v 2(x+y+z)xddydz - \int\int_{x^2+y^2\leq 1/2, z=1/\sqrt{2}} (-z^2)dxdy$. $V = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 1/\sqrt{2}\}$. Parametrizziamo il volume "per strati" ottenendo $z = u$, $x = \sqrt{1-u^2}\rho\cos t$, $x = \sqrt{1-u^2}\rho\sin t$, con $0 \leq t \leq 2\pi$ e $1/\sqrt{2} \leq u \leq 1$ il cui iacobiano è $\rho(1-u^2)$. L'integrale triplo è $\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} dt \int_{1/\sqrt{2}}^1 du\rho(1-u^2)(u + \rho\sqrt{1-u^2})(\cos t + \sin t) = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} dt \int_{1/\sqrt{2}}^1 du\rho(1-u^2)u = \frac{\pi}{8}$. $\int\int_{x^2+y^2\leq 1/2, z=1/\sqrt{2},} (z^2)dxdy = \frac{\pi}{4}$ da cui il risultato.

• Da ultimo usiamo il teorema della divergenza ma con coordinate polari $x = \rho\sin t\cos u$, $y = \rho\sin t\sin u$, $z = \rho\cos t$ con $0 \leq t \leq \pi/4$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $1/(\sqrt{2}\cos t) \leq \rho \leq 1$ e quindi l'integrale riplo diventa $\int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/4} dt \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\cos t}}^1 \rho^2 \sin t(2\rho\sin t\cos u + 2\rho\sin t\sin u + 2\rho\cos t) = \int_0^{2\pi} du \int_0^{\pi/4} dt \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\cos t}}^1 \rho^2 2\rho\sin t\cos t = \pi\int_0^{\pi/4} du \sin u\cos u(1 - \frac{1}{4\cos^4 u}) = \frac{3}{8}\pi$.

Gli altri integrali si fanno allo stesso modo.

Problema n.5

La procedura è la solita. La parametrizzazione della curva è $x(t) = t$, $y(t) = at + b$ per $a' \leq t \leq b'$. Si ha $b_x = \frac{\int_{a'}^{b'} dt\delta\, t\,(|t| + |at+b|)\sqrt{1+a^2}}{\int_{a'}^{b'} dt\delta(|t| + |at+b|)\sqrt{1+a^2}}$ e il risultato è $\frac{3}{2}$ per A, 2 per B, $\frac{9}{34}$ per C e $\frac{8}{13}$ per D.

Problema n.6

In ogni compito la forma era data dalla somma di due forme differenziali $\omega = \omega_1 + \omega_2$. A sua volta ω_1 poteva essere scomposta nella somma di due forme $\omega_1 = \omega_3 + \omega_4$ dove ω_4 è chiusa. Essendo definita su tutto $\mathbf{R}^2$, ω_4 è esatta e l'integrale quindi è zero. La forma ω_2 è tale che non si può calcolare l'integrale $\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \omega_2$ se lo si esplicita. Bisogna osservare che ω_2 è chiusa (ma non esatta in quanto dal dominio va tolto il punto $(0,0)$ e l'ellisse su cui integrare "gira intorno all'origine"). Dalla teoria delle forme differenziali sappiamo che l'integrale di ω_2 lungo una *qualsiasi* curva regolare intorno all'origine ha lo stesso valore e quindi tale valore lo calcoliamo lungo una curva per cui sappiamo fare l'integrale ossia $x^2 + y^2 = 1$. In conclusione i risultati sono: 3π per A,B,C, e $\frac{15}{2}\pi$ per D.