

Analisi I per Ingegneria Online, Sessione estiva, secondo appello
31-07-2020 A.A. 2019/2020

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome**

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

1) Dopo aver trovato l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right)$ disegnarne il grafico specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, eventuali asintoti. Trovare i punti di massimo e di minimo assoluti della funzione.

1.1) Argomentando dire se converge o meno la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} (\pi/2 - f(1/k))^2$

1.2) Argomentando dire per quali $a \in \mathbf{R}$ converge la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f(3\pi/4 + k\pi + 1/k^a)$

2) Discutere al variare di $a \in \mathbf{R}$ la convergenza dell'integrale $\int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{\ln^a x} \right) dx$

3) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - \ln(1+x) - x^2)^{\frac{1}{\sin x - \tan x}}$

4) Usando lo sviluppo di MacLaurin con resto di Lagrange si stimi con un numero razionale la quantità $I = \int_0^1 \sin(x^2) dx$ a meno di $7 \cdot 10^{-4}$. (stimare significa trovare un numero razionale p/q tale che $|I - p/q| \leq 7/10000$). Riportare per esteso i calcoli e ricordare che non si può scrivere nessun numero ricavato dalla calcolatrice. Ogni calcolo deve essere ricavato "a mano" ed esposto in modo completo

Soluzioni

1) La funzione è 2π -periodica e quindi non essendo costante neppure asintoticamente, non esistono asintoti né orizzontali né obliqui. Ristretto all'intervallo $[0, 2\pi]$ il dominio è $(0, 2\pi) \setminus \{\pi/2, \pi, 3\pi/2\}$. La funzione è limitata ($|\arctan f(x)| \leq \pi/2$) e quindi non esistono asintoti verticali.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3\pi/2^+} f(x) = \arctan(+\infty) = +\pi/2$$

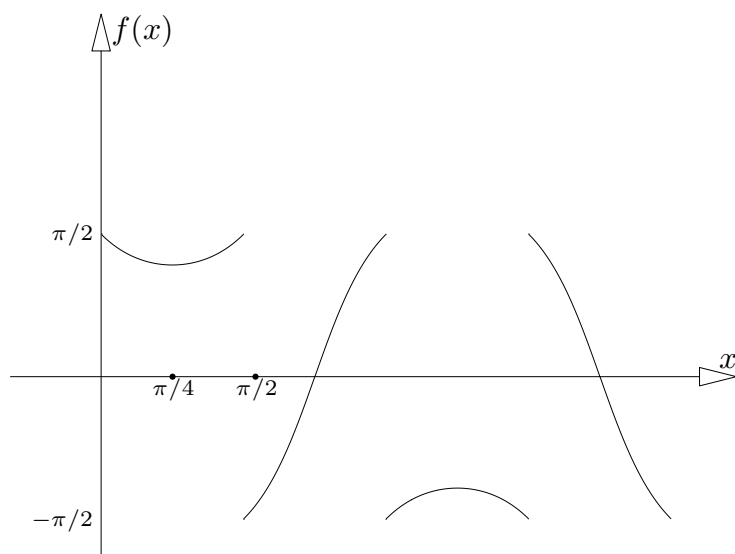
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3\pi/2^-} f(x) = \arctan(-\infty) = -\pi/2$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\sin(2x))^2}{(2 + \sin(2x))^2} \frac{(\sin x - \cos x)((\sin x)^2 + (\cos x)^2 + \sin x \cos x)}{(\sin x \cos x)^2} = \\ &= \frac{(\sin(2x))^2}{(2 + \sin(2x))^2} \frac{(\sin x - \cos x)(4 + 2\sin(2x))}{(\sin(2x))^2} \geq 0 \iff \pi/4 \leq x \leq 5\pi/4 \end{aligned}$$

$x = \pi/4$ è un punto di minimo mentre $x = 5\pi/4$ è un punto di massimo le cui ordinate sono $\arctan \sqrt{2}$ e $-\arctan \sqrt{2}$. La funzione non ammette né massimo né minimo assoluti.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2^\pm} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pi^\pm} f'(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 3\pi/2^\pm} f'(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2\pi^-} f(x) = -1$$

Il grafico è



1.1)

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{k} &= \frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + o(k^{-4}), \quad \cos \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2k^2} + o(k^{-3}) \\ \frac{1}{\sin \frac{1}{k}} &= \frac{1}{\frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} + o(k^{-4})} = k \frac{1}{1 - \frac{1}{6k^2} + o(k^{-3})} = k - \frac{1}{6k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ \cos \frac{1}{k} &= 1 - \frac{1}{2k^2} + o(k^{-3}), \quad \frac{1}{\cos \frac{1}{k}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2k^2} + o(k^{-3})} = 1 + \frac{1}{2k^2} + o(k^{-3}) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin \frac{1}{k}} + \frac{1}{\cos \frac{1}{k}} &= k - \frac{1}{6k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) + 1 + \frac{1}{2k^2} + o(k^{-3}) = k + 1 - \frac{1}{6k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \\ \arctan \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{k}} + \frac{1}{\cos \frac{1}{k}} \right) &= \arctan \left(k + 1 - \frac{1}{6k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{k + 1 - \frac{1}{6k} + o\left(\frac{1}{k}\right)} \end{aligned}$$

Da $\arctan x = x - x^3/3 + o(x^4)$ per $x \rightarrow 0$ si ha

$$\arctan \frac{1}{k+1 - \frac{1}{6k} + o(\frac{1}{k})} = \frac{1}{k+1 - \frac{1}{6k} + o(\frac{1}{k})} + o(\frac{1}{k^2}) = \frac{1}{k} + o(\frac{1}{k^2})$$

e quindi la serie converge essendo positiva e evidentemente $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi}{2} - f(\frac{1}{k}) \right]^2 = 0$

1.2) Anche se non è strettamente necessario scriviamo

$$\begin{aligned} \arctan \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \right) &= \arctan \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos x} = \arctan \frac{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x + \sin x)}{\sin x \cos x} = \\ &= \arctan \frac{2\sqrt{2} \sin(x + \pi/4)}{\sin(2x)} \end{aligned}$$

$$f(3\pi/4 + k\pi + \frac{1}{k^a}) = \arctan \frac{2\sqrt{2} \sin(\pi + k\pi + 1/k^a)}{\sin(3\pi/2 + 2k\pi + 2/k^a)} = -\arctan \frac{2\sqrt{2}(-1)^k \sin(1/k^a)}{\cos(2/k^a)}$$

La funzione $\frac{\sin x}{\cos(2x)}$ è monotona crescente per cui $\frac{\sin(1/k^a)}{\cos(2/k^a)}$ decresce in modo monotono per cui, con $a > 0$, la serie è di Leibnitz e quindi converge.

Se $a \leq 0$ il termine generale non tende a zero e quindi non converge

2) Se dimostriamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} f(x) \neq 0$, l'integrale non può convergere.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{x}} 2 \sin^2 \frac{2}{\ln^{2a} x} = +\infty$$

3) È la classica forma indeterminata $f^g = 1^\infty$ e ci riduciamo a studiare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} e^{g(f-1)}$ quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \ln(1+x) - x^2 - 1}{\sin x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{\frac{-x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{1}{3}$$

da cui $e^{1/3}$ il limite.

4)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6 \sin^6 c_x}{6!} \quad 0 < c < x \leq 1 \implies \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{120} + \frac{x^{12} \sin^6 c'_x}{6!}, \quad 0 < c'_x < x^2$$

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{120 \cdot 11} + R, \quad |R| \leq \frac{1}{720 \cdot 13} = \frac{1}{8640} < \frac{7}{10000}$$

da cui il valore cercato è 2867/9240.