Analisi I per Ingegneria Online, Sessione invernale, Appello straordinario
quarta prova scritta del 29–04–2020 A.A. 2019/2020

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome**

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

1) Dopo aver trovato l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \dfrac{x|\ln x|}{(\ln x - 1)^2}$ disegnarne il grafico specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità, eventuali asintoti.

1.1) Argomentando dire se converge o meno l'integrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)dx$

1.2) Argomentando dire se converge o meno l'integrale $\displaystyle\int_3^{+\infty} (f(x))^{-2}dx$

2) Discutere al variare di $a \in \mathbf{R}$ la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^a + (x^2-1)^{1/3}}$

3) Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \left[1 - \cos\left(\pi n(n+1)e^{\frac{2}{n}}\right)\right]$

4) Al variare di $a \in \mathbf{R}$ si studi la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{n(\ln n)^a}} - 1\right)$

5) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{\tan x}{x-\sin x}}$

Soluzioni

1) Dominio $D = (0, +\infty)\backslash\{e\}$. La funzione è sempre non negativa. $f(1) = 0$.

$\displaystyle\lim_{x\to e} f(x) = \frac{e\cdot 1}{0^+} = +\infty$ (asintoto verticale)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x\ln x}{\ln^2 x(1-\frac{1}{\ln^2 x})^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\ln x}\frac{1}{(1-\frac{1}{\ln^2 x})^2} = \frac{0^-}{-\infty}\cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x}\frac{1}{(1-\frac{1}{\ln^2 x})^2} = +\infty$$

Vediamo se ammette un asintoto obliquo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\frac{1}{(1-\frac{1}{\ln^2 x})^2}=0$$

niente asintoto obliquo.

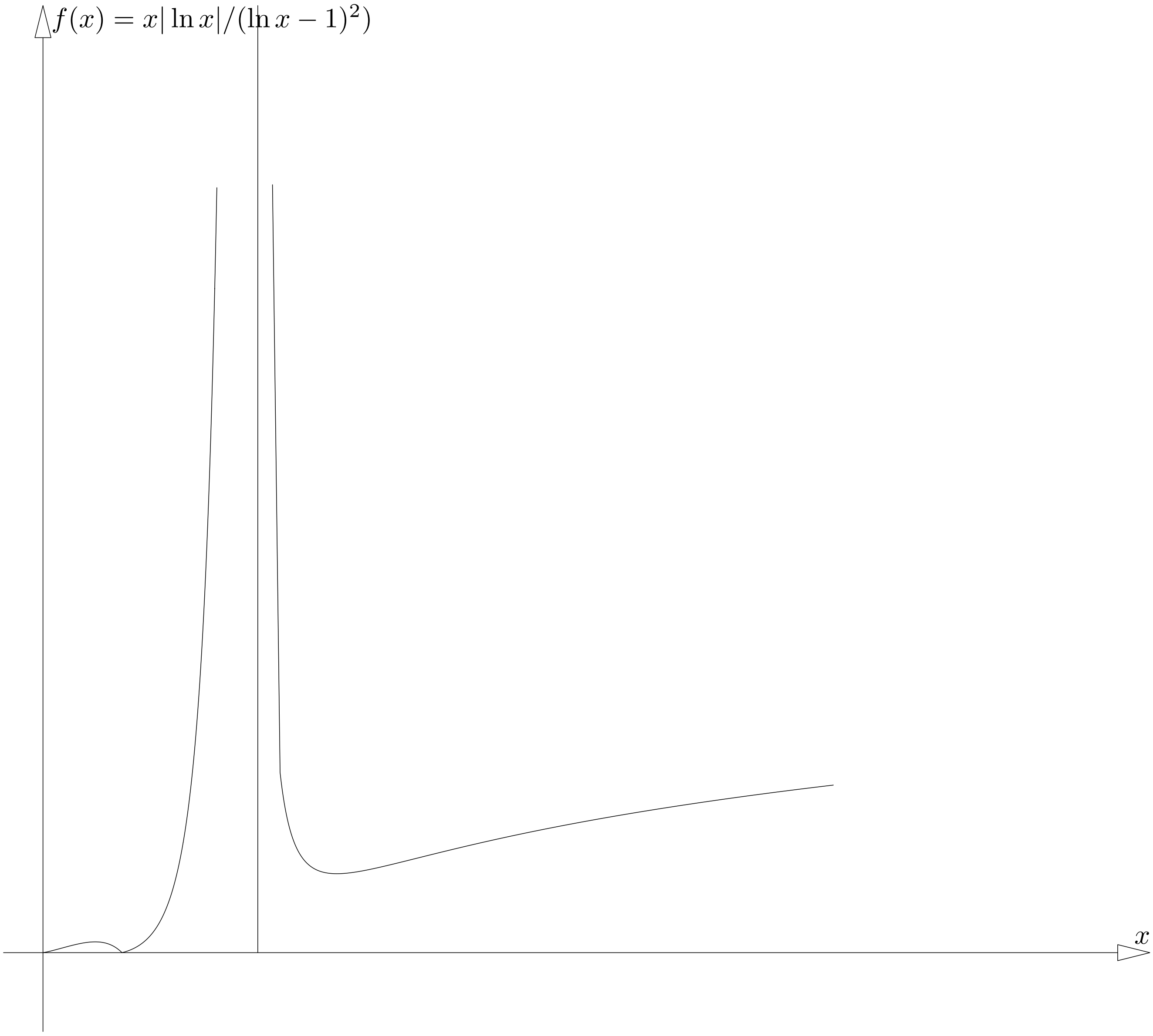
$x\geq 1$. $f'(x)=\dfrac{\ln^2 x-2\ln x-1}{(\ln x-1)^3}=\dfrac{(\ln x-a)(\ln x+1/a)}{(\ln x-1)^3}$, $a=1-\sqrt{2}$ e $f'(x)\geq 0$ se e solo se $x\leq e^{1-\sqrt{2}}$, $x\geq e^{1+\sqrt{2}}$ e quindi cresce per $1\leq x<e$ e per $x\geq e^{1+\sqrt{2}}$, $f(e^{1+\sqrt{2}})=e^{1+\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})/2\sim 13.828$ $\quad\lim\limits_{x\to 1^\pm}f'(x)=\mp 1$,

$f''(x)=-\dfrac{\ln^2 x-2\ln x-5}{x(\ln x-1)^4}\geq 0$ $1\leq x\leq e^{1+\sqrt{6}}$

$x\leq 1$. $f'(x)=\dfrac{-\ln^2 x+2\ln x+1}{(\ln x-1)^3}=\dfrac{(\ln x-a)(\ln x+1/a)}{(1-\ln x)^3}\geq 0$ se e solo se $0<x\leq e^{1-\sqrt{2}}$

$f''(x)=\dfrac{\ln^2 x-2\ln x-5}{x(\ln x-1)^4}\geq 0\quad 0<x\leq e^{1-\sqrt{6}}$

Il grafico è



1.1) L'integrale è improprio a causa di $x=e$. Osserviamo che

$$\ln x = \ln(e+(x-e)) = 1 + \ln\frac{x-e}{e} = 1 + \frac{x-e}{e} + O((x-e)^2)$$

da cui $f(x) \sim \dfrac{e^2}{(x-e)^2}$ e quindi l'integrale diverge.

Si può anche ragionare nel seguente modo in accordo con le videolezioni e col libro di testo: se accade che $\lim\limits_{x\to e}(x-e)^\alpha f(x) = A \neq 0$ (anche $A=\pm\infty$ va bene) con un $\alpha \geq 1$, allora l'integrale diverge. Nel nostro caso basta $a=1$

$$\lim_{x\to e}(x-e)\frac{x\ln x}{(\ln x - 1)^2} = \lim_{x\to e}\frac{e(x-e)}{(\ln x-1)^2}$$

usiamo l'Höpital $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{ex}{2(\ln x-1)} = \pm\infty$ ($+\infty$ da destra e $-\infty$ da sinistra)

1.2) L'integrale è evidentemente improprio La funzione è asintotica per $x\to+\infty$ a $x/\ln x$ e quindi $f^{-2} \sim \dfrac{\ln^2 x}{x^2} \leq x^{-3/2}$ (se x è grande abbastanza) e quindi converge.

Anche qui possiamo adottare la procedura spiegata nelle videolezioni e nel libro di testo: se accade che $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha(f^{-2}) = A$ ($A \neq +\infty$) con $\alpha > 1$ allora la funzione è integrabile in senso improprio. Prendiamo $\alpha = 3/2$ e otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}(\ln x-1)^4}{x^2\ln^2 x}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} = 0$$

e quindi converge.

Alcuni hanno scritto che per convergere debba accadere $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ma non è vero. L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(x^a)dx$ converge per $a>1$ ma $\cos(x^a) \not\to 0$. Nel nostro caso in effetti $f^{-2}\to 0$ ma non è condizione necessaria.

Oppure si prenda la funzione definita su tutto $\mathbf{R}$ che vale $\sqrt{n}$ per $n-1/n^2 \leq x \leq n+1/n^2$ per $n\geq 2$ e zero altrove.

2) L'integrale è improprio per due ragioni. La funzione a denominatore si annulla per $x=1$ e l'intervallo è infinito a destra.

Sia $a=0$. Per $x\to+\infty$, la funzione è asintotica a $1/x$ e quindi diverge. Non ho guardato il comportamento a $x=1$.

Possiamo pure adottare il ragionamento di **1.1)** (seconda maniera) prendendo $\alpha=1$ ed ottenendo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+(x^2-1)^{1/3}} = 1$$

Possiamo adottare una terza procedura anche se in realtà sono tutte riconducibili al criterio del confronto come spiegato nelle videolezioni.

$$\frac{1}{x+(x^2-1)^{1/3}} \geq \frac{1}{2x}$$

da cui la divergenza. La minorazione scaturisce da

$$x \geq (x^2-1)^{1/3} \iff x^3 \geq x^2 - 1$$

ed è certamente vera se $x \geq 1$.

$a < 0$ Per $x \to +\infty$, la funzione è asintotica a $(\ln x)^{|a|}/x$ e quindi diverge.

oppure scriviamo

$$f(x) = \frac{(\ln x)^{|a|}}{x + (x^2-1)^{1/3}(\ln x)^{|a|}} \implies \lim_{x\to+\infty} xf(x) = +\infty$$

$a > 0$ Spezziamo l'integrale in due parti. $\displaystyle\int_1^2 f(x)dx + \int_2^{+\infty} f(x)dx \doteq I_1 + I_2$. In I_2 la funzione è asintotica a $1/(x(\ln x)^a)$, e quindi converge per $a > 1$.

Notare che in questo caso, la procedura per la convergenza adotatta nel caso **1.2)** è inefficace in quanto, **qualunque** sia $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x(\ln x)^a} = +\infty$. Per dimostrare che l'integrale converge, si pone $x = e^t$ e si ottiene

$$I_2 = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{e^t}{e^t t^a} dt < +\infty$$

Per $x \to 1^+$ si ha (teniamo conto che vogliamo $a > 1$)

$$\begin{aligned} &x(\ln x)^a + (x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3} = x(\ln(1+(x-1)))^a + (x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3} = \\ &= x\left((x-1) - (x-1)^2/2 + o((x-1)^2)\right)^a + (x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3} = \\ &= x(x-1)^a \left(1 + \frac{x-1}{2} + o(x-1)\right)^a + (x-1)^{1/3}(x+1)^{1/3} \sim 2^{1/3}(x-1)^{1/3} \end{aligned}$$

e quindi converge. La risposta è che converge per $a > 1$.

3)

$$\cos \pi n(n+1)e^{\frac{2}{n}} = \cos\left[\pi n(n+1)\left(1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2} + O(n^{-3})\right)\right] = \cos\left(\frac{2\pi n(n+1)}{n^2} + O(n^{-1})\right) =$$
$$= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{n} + O(n^{-1})\right) = \cos\left(\frac{\pi}{n} + O(n^{-1})\right)$$

e quindi $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left[1 - \cos\left(\pi n(n+1)e^{\frac{2}{n}}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} n^2(1 - \cos(\frac{\pi}{n} + O(n^{-1})) = \pi^2/2$

4) Sia $a = 0$. Il termine generale della serie è $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + O(\dfrac{\ln^2 n}{n^2})$ e la serie diventa $\displaystyle\sum \frac{\ln n}{n} + \sum O(\frac{\ln^2 n}{n^2})$ e diverge in quanto $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} \geq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Viceversa $\displaystyle\sum \frac{\ln^2 n}{n^2} \leq \sum n^{-3/2}$ converge.

$a < 0$. $n^{\frac{1}{n(\ln n)^a}} - 1 \geq n^{\frac{1}{n}} - 1$ e quindi la serie diverge.

$a > 0$. $n^{\frac{1}{n \ln^a n}} = e^{\frac{(\ln n)^{1-a}}{n}} = 1 + \dfrac{(\ln n)^{1-a}}{n} + O(\dfrac{(\ln n)^{2(1-a)}}{n^2})$

$$\sum \left(n^{\frac{1}{n\ln^a n}} - 1\right) = \sum \frac{(\ln n)^{1-a}}{n} + \sum O(\frac{(\ln n)^{2(1-a)}}{n^2})$$

e quindi per la convergenza vogliamo $1-a < -1$ ossia $a > 2$. La seconda serie converge per ogni valore di a. Se $a \geq 2$ la serie diverge.

5) È un limite $1^{-\infty}$ e quindi lo risolviamo nel seguente modo

$$\lim_{x\to 0} f^g = \lim_{x\to 0} \left((1+(f-1))^{\frac{1}{f-1}}\right)^{g(f-1)} = \lim_{x\to 0} e^{g(f-1)} = e^{\lim_{x\to 0} g(f-1)}$$

$$g(f-1) = \frac{\tan x}{x-\sin x}\frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^2} = \frac{x+o(x^2)}{x-x+x^3/6+o(x^4)}\frac{1+x^2+x^4/2+o(x^5)-1-x^2}{x^2} =$$
$$= \frac{1+o(x)}{x^2/6+o(x^3)}(\frac{x^2}{2}+o(x^3)) \to 3$$

per cui il limite è e^3