

Analisi I per Ingegneria Online, Sessione invernale
prima prova scritta del 29-02-2020 A.A. 2019/2020

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello)

Cognome(Stampatello)

Matricola

1) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = e^{-x}(e^x - 1)^{1/3}$ specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescita e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità, eventuali asintoti.

La radice cubica consente a $e^x - 1$ di avere sia segno positivo che negativo. Quindi il dominio è $\mathbf{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} e^{x/3} (1 - e^{-x/3})^{1/3} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \cdot (-1)^{1/3} = -\infty$$

$$f(x) \geq 0 \text{ se e solo se } e^x - 1 \geq 0 \text{ ossia } x \geq 0.$$

Non ci sono asintoti verticali.

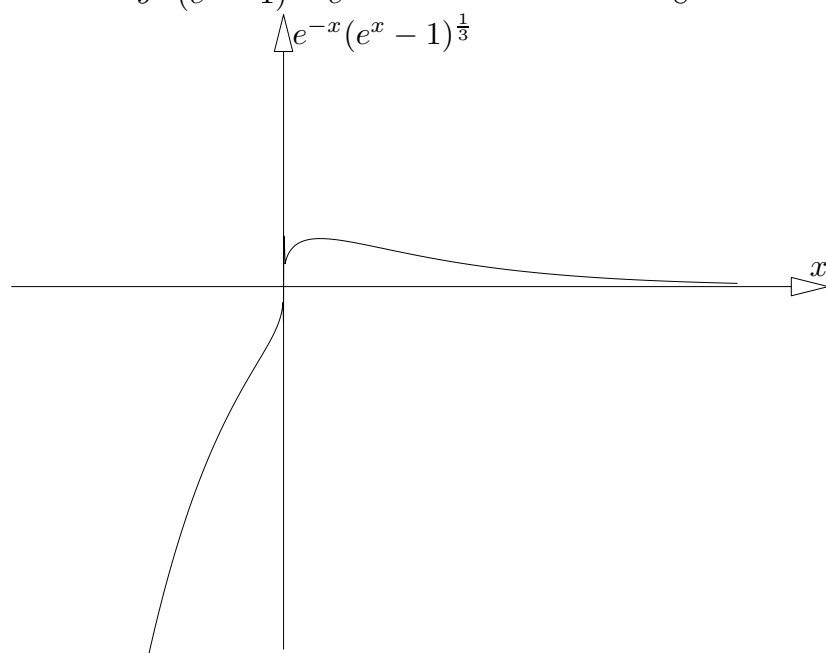
$$f'(x) = -e^{-x}(e^x - 1)^{1/3} + \frac{1}{3}(e^x - 1)^{-2/3} = (e^x - 1)^{1/3} \left(-e^{-x} + \frac{1}{3(e^x - 1)} \right) = \frac{3e^{-x} - 2}{3(e^x - 1)^{2/3}} \geq 0 \text{ per } x \leq \ln(3/2) \text{ e } f(\ln(3/2)) = \sqrt[3]{4/3}$$

In $x = 0$ non è derivabile e lo si capisce osservando che nell'intorno di $x = 0$ la funzione si comporta come $x^{1/3}$. Infatti

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-h} (e^h - 1)^{1/3}}{h^{2/3}} = +\infty$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{e^{-h} (e^h - 1)^{1/3}}{h^{2/3}} = +\infty$$

$$f''(x) = \frac{2}{9} \frac{4e^{2x} - 15e^x + 9}{(e^x - 1)^{5/3} e^x} \geq 0 \text{ se e solo se } \frac{15 - \sqrt{74}}{8} \leq x \leq 2 \text{ oppure } x \geq \frac{-15 + \sqrt{74}}{8}$$



1.1) Dire quante soluzioni ha e perché l'equazione $f(x) = c$, $c \in (-\infty, +\infty)$. R.: Una per $c \leq 0$, 2 per $0 < c < \sqrt[3]{4/3}$, e nessuna per $c > \sqrt[3]{4/3}$.

1.2) Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(\ln x))^3}{\cos \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} \frac{(x-1)^{1/3}}{\cos \left[\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{\pi}{2} \right]} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{x} \frac{(x-1)^{1/3}}{\frac{\pi}{2}(x-1) \sin \left[\frac{\pi}{2}(x-1) \right]} = -\infty$$

1.3) Trovare a, b , tali che $(f(x))^3 = a + bc + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (f(x))^3 &= e^{-3x}(e^x - 1) = \left[1 - 3x + \frac{9x^2}{2} + \frac{-27}{6}x^3 + o(x^3) \right] \left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right] = \\ &= x - \frac{5x^2}{2} + \frac{19}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

da cui $a = 0$, $b = 1$, $c = 5/2$, $d = 19/6$

1.4) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} e^{1/3}(1 - e^{-x})^{1/3} = e^{-2/3} \cdot 1 = e^{-2/3}$. Notare che $(f(x))^{1/x}$ è una forma indeterminata 0^0 .

1.5) Calcolare $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\ln \left(1 + e^{\frac{-3}{2x}} \right) \right]^{\ln(|f(x)|)} = 0^{+\infty} = 0$

1.6) Dire per quale valore di a converge l'integrale $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{|f(x)|^a} dx$

Siccome $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \frac{1}{|f(x)|^a} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^{ax}}{(1 - e^x)^{a/3}} = 0$ per ogni $a > 0$, la serie converge per $a > 0$ e non converge per $a \leq 0$. L'esponente 2 di x^2 può essere qualsiasi numero maggiore di 1 (la spiegazione sta nelle videolezioni)

1.7) Dire per quali valori di a converge la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k (f(k))^a$

Analizziamo la convergenza assoluta. $|(-1)^k (f(k))^a| = (f(k))^a$ e $\lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 e^{-ak} (e^k - 1)^{a/3} = 0$ per cui converge per ogni $a > 0$. Se $a \leq 0$ la serie non converge assolutamente ma potrebbe convergere semplicemente. Che non possa succedere lo si evince dal fatto che se $a < 0$ $\lim_{k \rightarrow +\infty} (-1)^k (f(k))^a \neq 0$.

Le domande 1-1.7 valgono 30 punti

2) (5 punti) Argomentando si dica se converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\sin \frac{n}{n^2+1} \right)^{-1} - n \right)$

$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \sin \frac{n}{n^2+1} &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^4}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) = \\ &= \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin \frac{n}{n^2+1}} &= n \frac{1}{1 - \frac{1}{n} + \frac{5}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2})} = \\ &= n \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{5}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}) + \left(-\frac{1}{n} + \frac{5}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}) \right)^2 + o(n^{-2}) \right)\end{aligned}$$

da cui

$$\left(\sin \frac{n}{n^2+1} \right)^{-1} - n = 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \not\rightarrow 0$$

La serie non può convergere.