Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

Analisi I per Ingegneria Online, Sessione estivo, primo appello
15–06–2020 A.A. 2019/2020

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome**

Si possono consultare libri, **appunti**, **note etc**.

1) Dopo aver trovato l'insieme di definizione della funzione $f(x) = \frac{-x}{2} + \ln\left(1 + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$ disegnarne il grafico specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità, eventuali asintoti.

1.1) Argomentando dire se converge o meno la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} |f(k)|^{-2}$

1.2) Argomentando dire se converge o meno la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} f(1/k)$

1.3) Argomentando trovare il massimo valore di a per cui converge o meno la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} k^a (f(1/k) - f(-1/k))$

2) Discutere al variare di $a \in \mathbf{R}$ la convergenza dell'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln x (|\sin(\pi x)|)^a + x^2 - 1}$

3) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} n^2 \sin\left(18\pi \sqrt[3]{n^3 + n^2}\right) + 2\pi n \cos\frac{1}{n}$

4) Usando lo sviluppo di MacLaurin con resto di Lagrange della funzione e^x, stimare $e^{1/4}$ a meno di 2^{-12} (stimare significa trovare un numero razionale p/q tale che $|e^{1/4} - p/q| \leq 2^{-12}$). Riportare per esteso i calcoli e ricordare che non si può scrivere nessun numero ricavato dalla calcolatrice. Ogni calcolo deve essere ricavato "a mano" ed esposto in modo completo

Soluzioni

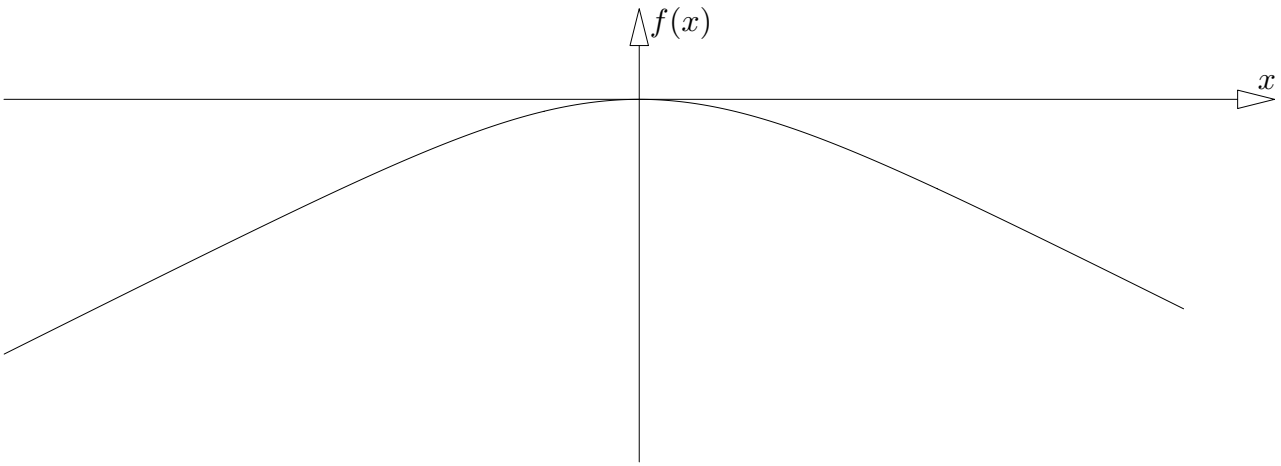
1) La funzione è $f(x) = \dfrac{-x}{2} + \ln 2 + x - \ln(1+e^x) = \ln 2 + \dfrac{x}{2} - \ln(1+e^x)$ per cui il dominio è **R**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln 2 + \dfrac{x}{2} - x - \ln(1+e^{-x}) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln 2 + \dfrac{x}{2} - x - \ln(1+e^{-x}) = -\infty$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{e^x}{1+e^x} = \dfrac{1-e^x}{2(1+e^x)}$ per cui cresce a sinistra e decresce a destra. $x=0$ è di massimo.

Il grafico è



1.1) Se dimostriamo che $\lim_{k\to+\infty} \dfrac{k^a}{|f(k)|^2} = L(\neq+\infty)$ con $a>1$, abbiamo la convergenza. Basta prendere $a=3/2$ e si ha $L=0$ (la dimostrazione la lascio agli studenti)

1.2) Estraiamo il comportamento della della funzione in $x=0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(c)x^2 = \frac{1}{2}f''(c)x^2, \quad (x-|x|)/2 < c < (x+|x|)/2$$

L'unica cosa da verificare è che $f''^{(c)}$ è limitata in un intervallo che comprende $x=0$ e per questo è sufficiente verificare che $f''(0) \neq \pm\infty$ e che $f''(x)$ è continua in $x=0$. La continuità ci dice che $f''(x)$ non si discosta troppo da $f''(0)$ se x è vicino a $x=0$. Essendo $f''(x) = \dfrac{-e^x}{(1+e^x)^2}$ sono vere entrambe le condizioni.

Tenendo conto che al posto di x ci va $1/k$, possiamo dire che la serie converge.

Un altro modo di procedere è studiare direttamente il comportamento di $f(1/k)$.

$$f(\frac{1}{k}) = \ln 2 + \frac{1}{2k} - \ln(1+e^{\frac{1}{k}}) = \ln 2 + \frac{1}{2k} - \ln(1+e^{\frac{1}{k}} - 2 + 2) = \ln 2 + \frac{1}{2k} - \ln 2 - \ln(1 + \frac{e^{1/k}-1}{2}) =$$
$$= \frac{1}{2k} - \frac{e^{1/k}-1}{2} + O\left((e^{1/k}-1)^2\right) = \frac{1}{2k} - \frac{1+\frac{1}{k}+O(k^{-2})-1}{2} + O(k^{-2}) = O(k^{-2})$$

1.3) Provare che $f(x) = f(-x)$ e quindi $f(1/k) - f(-1/k) \equiv 0$. La serie converge per ogni valore di a.

2) Guardando il precedente compito, si vede che a $+\infty$ converge per ogni a.

Vediamo ora la convergenza nell'intorno di $x=1$.

Sia $a > 0$.

$$\lim_{x\to 1}(x-1)f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x|\sin(\pi x)|^a + (x-1)(x+1)} = 1/2(\neq 0)$$

e quindi l'integrale diverge. Sia $a = 0$. Lo stesso limite vale 3 e quindi l'integarle diverge

Sia $a < 0$. La funzione diventa ($a = -|a|$)

$$\frac{|\sin(\pi(x-1)+\pi)|^{|a|}}{\ln x + (x-1)(x+1)|\sin(\pi(x-1)+\pi)|^{|a|}} = \frac{|\sin(\pi(x-1))|^{|a|}}{\ln x + (x-1)(x+1)|\sin(\pi(x-1))|^{|a|}}$$

ed osserviamo che la funzione è asintotica a $\pi(x-1)^{|a|-1}$ il cui esponente è minore di zero ma maggiore di -1 per cui si ha convergenza. Per dimostrarlo basta far vedere che

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{1-|a|}\frac{|\sin(\pi(x-1))|^{|a|}}{\ln x + (x-1)(x+1)|\sin(\pi(x-1))|^{|a|}} = \\ &= \lim_{x\to 1^+}\underbrace{\frac{|\sin(\pi(x-1))|^{|a|}}{(x-1)^{|a|}}}_{\to\pi}\underbrace{\frac{(x-1)}{\ln x}}_{\to 1}\frac{1}{1+\underbrace{\frac{(x-1)(x+1)|\sin(\pi(x-1))|^{|a|}}{\ln x}}_{\to 0}} = \pi\end{aligned}$$

3) $(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}x^3 + O(x^4)$ per $x\to 0$ da cui

$$18\pi n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}} = 18\pi n\left(1 + \frac{1}{3n} - \frac{1}{9n^2} + \frac{5}{81n^3} + O(\frac{1}{n^4})\right) = 18\pi n + 6\pi - \frac{2\pi}{n} + \frac{10\pi}{9n^2} + O(\frac{1}{n^3})$$

da cui

$$\sin\left(18\pi n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n}}\right) = \sin\left(-\frac{2\pi}{n} + \frac{10\pi}{9n^2} + O(\frac{1}{n^3})\right) = \frac{-2\pi}{n} + \frac{10\pi}{9n^2} + O(\frac{1}{n^3})$$

$$2\pi n\cos\frac{1}{n} = 2\pi n\left(1 - \frac{1}{2n^2} + O(\frac{1}{n^4})\right)$$

e quindi

$$n^2\sin\left(18\pi\sqrt[3]{n^3+n^2}\right) - 2\pi n\cos\frac{1}{n} = -2\pi n + \frac{10\pi}{9} + O(\frac{1}{n}) + 2\pi n - \frac{\pi}{n} + O(\frac{1}{n^3}) \to \frac{10\pi}{9}$$

4) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{e^c}{24}x^4$, $0 < c < 1/4$. Ponendo $x = 1/4$ dobbiamo mostrare che

$$\frac{e^{1/4}}{24\cdot 256} < \frac{1}{4096}$$

Basta dimostrare che

$$\frac{e^{1/4}}{24\cdot 256} < \frac{3^{1/4}}{24\cdot 256} < \frac{3}{2}\frac{1}{24\cdot 256} = \frac{1}{4096}$$

Quindi ci siamo ridotti a $3^{1/4} < 3/2$ ossia $3 < 81/16$ che è certamente vera. La frazione p/q è pari a $(21067)/(16512)$

 Esclusivamente per uso personale; è vietata qualsiasi forma di commercializzazione