Analisi I per Ingegneria Online, quinto appello
09–09–2020 A.A. 2019/2020

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

Le risposte vanno motivate. Se immotivate, ancorché esatte, non verranno prese in considerazione. **Chi intende ritirarsi scriva ritirata/o sotto il proprio cognome**

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

1) Dopo aver trovato l'insieme di definizione della funzione $f(x) = e^{\frac{(\ln x)^2-2}{\ln x-2}}$ disegnarne il grafico specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, concavità , convessità , eventuali asintoti.

1.1) Argomentando dire se esiste e in caso affermativo trovarlo, un numero reale a tale che $\lim\limits_{x\to 0^+} x^a f(x) = l \neq 0$.

1.2) Argomentando dire se esiste e in caso affermativo trovarlo, un numero reale a tale che $\lim\limits_{x\to(e^2)^-} \dfrac{f(x)}{|x-e^2|^a} = l \neq 0$.

1.3) Argomentando dire se esiste e in caso affermativo trovarlo, un numero reale a tale che $\lim\limits_{x\to(e^2)^+} (x-e^2)^a f(x) = l \neq 0$.

2) Argomentando trovare quel valore di a per cui $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\arctan x) - \arctan(\sin x)}{x^a} = l \neq 0$ è finito e calcolare l.

3) Discutere al variare di $a \in \mathbf{R}$ la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{|\ln x|^a} e^{-x} dx$

4) Usando lo sviluppo di MacLaurin con resto di Lagrange si stimi con un numero razionale la quantità $I = \displaystyle\int_0^1 \sin(x^2)/x^2 dx$ a meno di $7\cdot 10^{-4}$. (stimare significa trovare un numero razionale p/q tale che $|I - p/q| \leq 7/10000$). Riportare per esteso i calcoli e ricordare che non si può scrivere nessun numero ricavato dalla calcolatrice. Ogni calcolo deve essere ricavato "a mano" ed esposto in modo completo

Soluzioni

$Dom(f) = \mathbf{R}^+ \backslash \{e^2\}$. Inoltre $f(x) = e^{\ln^2 x - 4 + 2, \ln x - 2,} = e^{\ln x + 2} e^{\frac{2}{\ln x - 2}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot e^2 \cdot e^{\frac{2}{-\infty}} = 0 \cdot e^2 \cdot 1 = 0$

$$\lim_{x\to(e^2)^-} f(x) = e^2\cdot e^2\cdot e^{\frac{2}{0^-}} = e^2\cdot e^2\cdot e^{-\infty} = 0, \qquad \lim_{x\to(e^2)^+} f(x) = e^2\cdot e^2\cdot e^{\frac{2}{0^+}} = +\infty$$

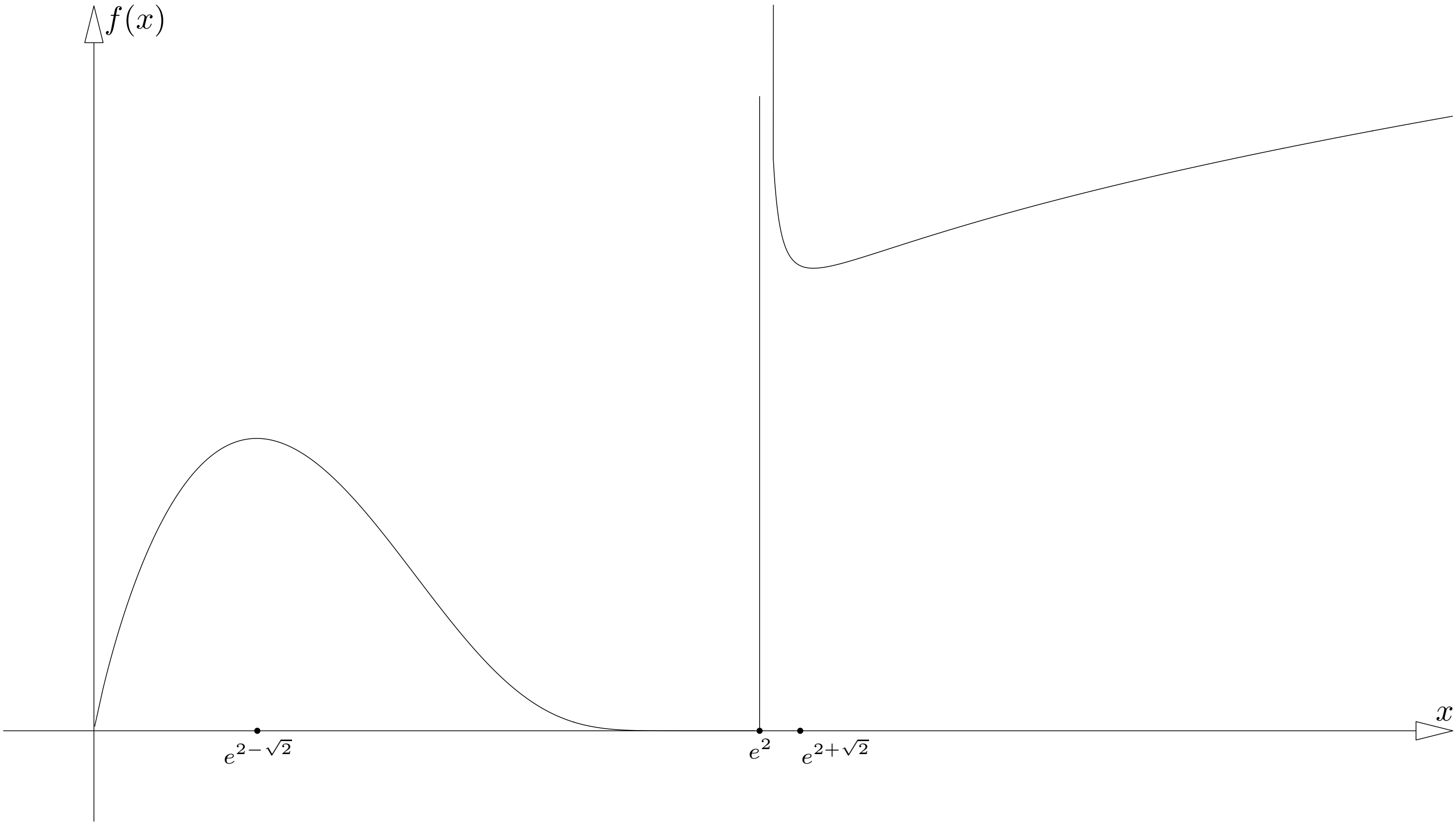
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\cdot e^2\cdot e^2 + \infty, ; = +\infty$$

Asintoti obliqui. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^2 e^{\frac{2}{\ln x-2}} = e^2\cdot e^{\frac{2}{+\infty}} = e^2$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = x(e^2 e^{\frac{2}{\ln x-2}} - e^2) = \lim_{x\to+\infty} xe^2(1+\frac{2}{\ln x-2}-1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x-2} = +\infty$ (l'Höpital se volete). Quindi non esistono asintoti obliqui.

$$f'(x) = e^2 e^{\frac{2}{\ln x-2}}\frac{\ln^2 x - 4\ln x + 2}{(\ln x-2)^2} \geq 0 \iff x\leq e^{2-\sqrt{2}} \ \vee\ x\geq e^{2+\sqrt{2}}$$

1)



1.1) Scrivendo $f(x) = xe^2 e^{\frac{2}{\ln x-2}}$ è evidente che solo $a=-1$ va bene. Qualsiasi valore $a>-1$ conduce a $l=0$ e $a<-1$ conduce a $+\infty$.

Se invece si tiene $f(x) = e^{\frac{(\ln x)^2-2}{\ln x-2}}$ allora

$$x^a f(x) = e^{\frac{(\ln x)^2-2}{\ln x-2}} = e^{a\ln x + \frac{(\ln x)^2-2}{\ln x-2}} = e^{a\ln x + \ln x\left(\frac{1-\frac{2}{(\ln x)^2}}{1-\frac{2}{\ln x}}\right)} = e^{a\ln x + (1+o(1))\ln x} = e^{\ln x(a+1+o(1))}$$

Se $a>-1$ il limite è zero. Se $a<-1$ il limite è $+\infty$. Se $a=-1$ bisogna sapere il comportamento della quantità $\ln x\cdot o(1)$ e quindi bisogna operare

$$\frac{1-\frac{2}{(\ln x)^2}}{1-\frac{2}{\ln x}} = \left(1-\frac{2}{(\ln x)^2}\right)\left(1+\frac{2}{\ln x}+\frac{1}{4\ln^2 x}+O(\frac{1}{\ln^3 x})\right) = 1+\frac{2}{\ln x}+O(\frac{1}{\ln^2 x})$$

da cui

$$e^{-\ln x + \ln x\left(1+\frac{2}{\ln x}+O(\frac{1}{\ln^2 x})\right)} \to e^2$$

Invito gli studenti a usare gli sviluppi di MacLaurin nel modo corretto. Nel nostro caso $\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ **e poi usiamo** $1/(1+y)$ **con** $y \to 0$

1.2) $\ln x = \ln(x - e^2 + e^2) = 2 + \ln(1 + \dfrac{x-e^2}{e^2}) = 2 + \dfrac{x-e^2}{e^2} + O((x-e^2)^2)$ da cui

$$\frac{f(x)}{|x-e^2|^a} = e^{-a\ln(e^2-x) + \frac{\ln^2 x - 2}{2\left(1+\frac{x-e^2}{e^2}+O((x-e^2)^2\right)-2}} = e^{-a\ln(e^2-x)+\frac{e^2(\ln^2 x-2)}{x-e^2}\frac{1}{1+O(x-e^2)}} =$$
$$= e^{\frac{-a(x-e^2)\ln(e^2-x)+e^2(\ln^2 x-2)(1+o(1)}{x-e^2}} \to e^{0-\infty} = 0 \ \forall\ a$$

1.3) Seguire il ragionamento precedente e si ottiene $+\infty$ per ogni a.

2) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{7!} + o(x^8)$, $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + o(x^8)$

$$\sin(\arctan x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8) - \frac{1}{6}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)\right]^3 +$$
$$+ \frac{1}{120}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)\right]^3 - \frac{1}{7!}\left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8)\right]^7 + o(x^8) =$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^8) - \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{7}{45}x^7\right] + \left[\frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{72}\right] - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) =$$
$$= x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} - \frac{5x^7}{16} + o(x^8)$$

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8) - \frac{1}{3}\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)\right]^3 +$$
$$+ \frac{1}{5}\left[x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^8)\right]^5 - \frac{x^7}{7} + o(x^8) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^5}{8} - \frac{83x^7}{240} + o(x^8)$$

da cui

$$\sin(\arctan x) - \arctan(\sin x) = \frac{x^7}{30} + o(x^8) \implies a = 7, \quad l = 1/30$$

3) Dobbiamo analizzare il comportamento a $x = 0$, $x = 1$ e a $+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{xe^{-x}}{|\ln x|^a} = 0$ per ogni valore di a.

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \frac{xe^{-x}}{|\ln x|^a} = 0$$

per cui converge a $+\infty$ qualunque sia il valore di a.

$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = x - 1 + o(x-1)$ da cui

$$\frac{xe^{-x}}{|\ln x|^a} = \frac{xe^{-x}}{|x-1|^a}(1 + o(1))$$

e quindi converge per $a < 1$.

4) Guardare il compito precedente e adattare