Analisi I per Ingegneria Online, Sessione estiva
terza prova scritta del 31–07–2019 A.A. 2018/2019

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ specificando il dominio, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità, eventuali asintoti.

Svolgimento

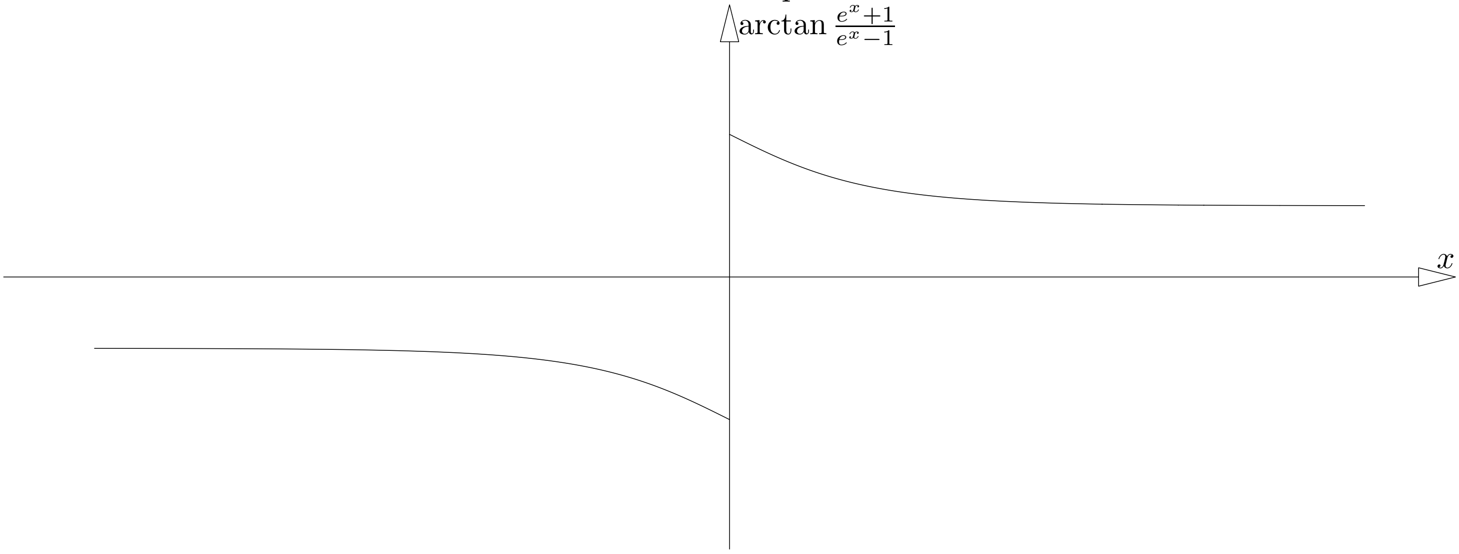
1 Il dominio è chiaramente $\mathbf{R}\backslash\{0\}$. Risolvendo $e^x - 1 \geq 0$ si ha che la funzione è positiva per $x>0$ e negativa per $x<0$. Inoltre è dispari

$$f(-x) = \arctan\frac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1} = \arctan\frac{e^x+1}{-e^x+1} = -f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = \pm\pi/2, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi/4,$$

$$f'(x) = -\frac{e^x}{e^{2x}+1} \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \frac{1}{2}, f''(x) = \frac{e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}$$

Non ci sono né massimi e né minimi. La funzione è sempre decrescente.



1.1) Dire quante soluzioni ha e perché l'equazione $f(x) = c$, $c \in (-\infty, +\infty)$

Se $\pi/4 < |x| < \pi/2$ si ha una soluzione; Nessuna altrimenti

1.2) Dire quanto valgono $m = \inf\{y \in \mathbf{R}\colon y = f(x)\}$ e $M = \sup\{y \in \mathbf{R}\colon y = f(x)\}$ e dire se si tratta di punti di minimo e massimo

$m = -\pi/2$, (non minimo) $M = \pi/2$ (non massimo)

1.3) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{\pi}f(x)\right)^{1/x^2}$,

È della forma 1^∞. Come al solito, scrittaa la funzione cui trovare il limite come f^g, calcoliamo

$$\exp\left[\lim_{x\to 0^+} g(f-1)\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{\pi}f(x)-1}{x^2}\right] = \exp\left[\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{\pi}\frac{f'(x)}{2x}\right] = e^{-\infty} = 0$$

1.4) Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\pi}f(x)\right)^{e^x}$ $\quad\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{-4}{\pi}f(x)\right)^{e^{-x}}$

Primo limite.

$$\lim_{x\to+\infty}\exp\big[e^x(\frac{4}{\pi}f(x)-1)\big]=\lim_{x\to+\infty}\exp\big[\frac{(\frac{4}{\pi}f(x)-1)}{e^{-x}}\big]=\lim_{x\to+\infty}\exp\big[-e^x\frac{4}{\pi}\frac{-e^x}{e^{2x}+1}\big]=e^{4/\pi}$$

Secondo limite. Cambiamo $y=-x$ e otteniamo

$$\lim_{y\to\infty}\left(\frac{-4}{\pi}f(-y)\right)^{e^y}=\lim_{y\to\infty}\left(\frac{4}{\pi}f(y)\right)^{e^y}=e^{4/\pi}$$

1.5) Dire se esiste e quanto vale a tale che $f(x)-a=O(x)$ per $x\to0^+$

$\big[$Una funzione $f(x)$ è $O(x-x_0)$ per $x\to x_0$ se $|f(x)|\le c|x-x_0|$ per una costante positiva c. $\big]$

È chiaro che se tale valore esiste, deve verificare $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)-a=0$. Se così non fosse infatti, la quantità

$$\frac{f(x)-a}{x}\underbrace{\sim}_{x\to0^+}\frac{(\frac{\pi}{2}-a)\neq0}{x}$$

non può essere limitata per $x\to0^+$. Dopo quindi avere posto $a=\pi/2$ dobbiamo far vedere che è limitata la quantità

$$\frac{f(x)-\pi/2}{x}$$

e per questo basta mostrare che esiste ed è finito il limite per $x\to0^+$. Ora

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}(f(x)-\pi/2)=-\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\arctan\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{-1}{2}$$

usano ad esempio l'Hopital.

1.6) Dire se esiste e quanto vale a tale che $f(x)-a=O(x)$ per $x\to0$

Non esiste. Da destra è come il calcolo precedente ma da sinistra dovrebbe essere $a=-\pi/2$.

1.7) Argomentando si dica per quali valori di a converge l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\Big(f(x)-\frac{\pi}{4}\Big)^a dx$

L'integrale è improprio a causa della illimitatezza dell'intervallo di integrazione.

$$f(x)=\arctan\left(1+\frac{2}{e^x-1}\right)$$

Ora scriviamo lo sviluppo di MacLaurin al primo ordine della funzione $f(y)=\arctan(1+y)$ ed otteniamo

$$\arctan(1+y)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{1+(1+y)^2}\Big|_{y=0}y+o(y)$$

Nel nostro caso abbiamo $y=2/(e^x-1)$

$$\arctan\left(1+\frac{2}{e^x-1}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\frac{2}{e^x-1}+o(e^{-x})$$

e quindi la funzine integranda è pari a

$$\frac{1}{2^a}\frac{2^a}{(e^x-1)^a} \implies \lim_{x\to+\infty} x^{1+\varepsilon} f(x)=0,\ \varepsilon>0$$

e l'integrale quindi converge se e solo se $a>0$.

1.8) Argomentando si dica per quali valori di a converge la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{\pi}{2}-f(k^{-2})\right)^a$

$$\frac{\pi}{2}-f(k^{-2})=\arctan\frac{e^{1/k^2}-1}{e^{1/k^2}+1}=\frac{1+\frac{1}{k^2}+o(k^{-2})-1}{e^{1/k^2}+1}=\frac{1}{k^2}\frac{1+o(1)}{2+o(1)}$$

Se $2a>1$ la serie è assolutamente convergente. Se $0<2a\le 1$ la serie è di Leibnitz e quindi semplicemente convergente.

Le domande 1–1.8 valgono 25 punti

2) (4 punti) Si dia un esempio di funzione $f\colon[-1,1]\to\mathbf{R}$ che sia derivabile una volta ma non due volte in $x=0$.

$f(x)=x|x|$ (Verificare)

3) (4 punti) Sia data una funzione continua $f\colon\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ (f positiva) e pari ossia $f(x)=f(-x)$. Sia $F(x)=\displaystyle\int_{x^2-x^3}^{x^3-x^2} f(t)dt$. Trovare gli intervalli in cui $F(x)$ è crescente

$$F'(x)=f(x^2-x^3)(2x-3x^2)-f(x^3-x^2)(3x^2-2x)=2f(x^2-x^3)(2x-3x^2)$$

per cui cresce in $[0,2/3]$ e decresce altrove

4) (3 punti) Sia data $f(x)=1/(1-x)$. Trovare il dominio di $f(x)$. Calcolare il dominio e dire quanto vale la funzione $(f\circ f\circ f)(x)$

Chiaramente $x\neq 1$.

$$f\circ f(x)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{1-x}{-x}\qquad x\neq 0$$

$$f\circ f\circ f(x)=\frac{1-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{1-x}}=x$$

Quindi la funzione è l'dentità ma con dominio $\mathbf{R}\backslash(\{0\},\{1\})$