Paolo Perfetti, Dipartimento di matematica, Università degli Studi di Roma "Tor Vergata", facoltà di Ingegneria

**Analisi I per Ingegneria Online, Sessione estiva**
**prima prova scritta del 18–06–2019 A.A. 2018/2019**
**Si possono consultare libri, appunti, note etc.**

**Nome**(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

**1)** Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \sqrt[3]{(2-x)(x^2-1)}$ specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità, eventuali asintoti.

**1.1)** Dire quante soluzioni ha e perché l'equazione $f(x) = c$, $c \in (-\infty, +\infty)$

**1.2)** Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{f(x)}{-x+2/3}\right)^x$

**1.3)** Trovare $a, b, c, d$ tale che $f(x) + ax + b + c/x + d/x^2 = o(1/x^2)$ per $x \to -\infty$

**1.4)** Dire se esiste e quanto vale $a$ tale che $f(x) - a|x-1| = o(|x-1|)$ per $x \to 1$

**1.5)** Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[\dfrac{-1}{x}\left(f(x) - \dfrac{2}{3}\right)\right]^x$

**1.6)** Argomentando si dica per quali valori di $a$ converge l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (-f(x) + 2/3 - x)^a \, dx$

**1.7)** Sia $x_0 = (2+\sqrt{7})/3$. Argomentando si dica per quali valori di $a$ converge l'integrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{|x-x_0|^a}{f(x_0) - f(x)} dx$

Le domande 1–1.7 valgono 25 punti

**2)** (10 punti) Dire per quali valori di $a$ converge o non converge l'integrale

$$\int_0^1 x^a \ln\left(\tan\frac{\pi x + 1}{2x+1}\right) dx$$

**3)** (5 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$

## Soluzioni

**1)** Il dominio è **R**.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$

Non ci sono asintoti verticali.

Asintoti obliqui. Basta analizzare il comportamento per $x \to \pm\infty$ della funzione.

$$f(x) = -x\sqrt[3]{1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} \underbrace{=}_{1/x\to 0} -x\left(1 - \frac{2}{3x}\right) + xo(1/x) = -x + 2/3 + o(1)$$

e quindi c'è un solo asintoto obliquo di equazione $y = -x + 2/3$. Alternativamente si possono eseguire i limiti usuali previsti nella caccia agli asintoti obliqui e verificare quanto trovato.

Derivata prima

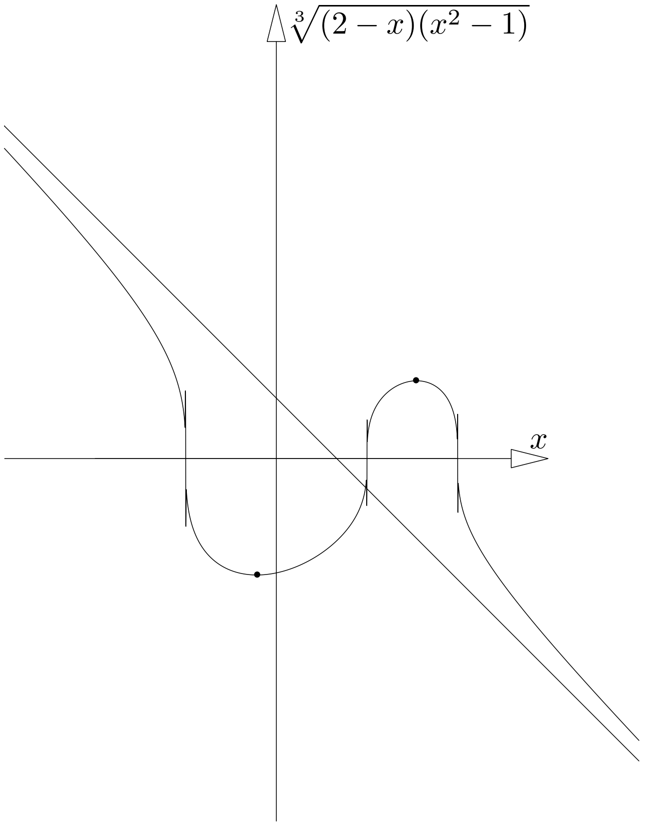
$$f'(x) = \frac{-1}{3}\frac{3x^2 - 1 - 4x}{((2-x)(x^2-1))^{2/3}}$$

per cui $f$ è crescente in $(2-\sqrt{7})/3 \le x \le (2+\sqrt{7})/3$ e decrescente altrove. Inoltre $\lim_{x\to-1^\pm} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \infty$, $\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = -\infty$ ossia in quei punti la funzioni ha tangenza verticale.

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2}{9}\frac{-16x + 7x^2 + 13}{(-2+x)(x^2-1)((2-x)(x^2-1))^{2/3}}$$

e quindi la funzione è convessa fra $-1$ e $1$ e per $x \ge 2$ e concava altrove. Dopo aver trovato le ordinate del massimo e minimo ce n'è abbastanza per disegnare il grafico




**1.1** Se $c > f((2+\sqrt{7})/3)$ si ha una soluzione. Per $c = f((2+\sqrt{7})/3)$ si hanno due soluzioni. Per $f((2+\sqrt{7})/3) < c < f(2+\sqrt{7})/3)$ si hanno tre soluzioni. Per $c = f((2-\sqrt{7})/3)$ si hanno due soluzioni. Per $c < f((2-\sqrt{7})/4)$ si ha una soluzione

**1.2** Prima di tutto convinciamoci che il limite è una forma indeterminata. Infatti sappiamo che

$$f(x)=-x+\frac{2}{3}+o(1)\implies\left(\frac{f(x)}{-x+2/3}\right)^x=\left(1+\frac{o(1)}{-x+2/3}\right)^x=1^\infty$$

La forma indeterminata $f^g=1^\infty$ la risolviamo così

$$f^g=e^{g(f-1)\frac{\ln(1+(f-1))}{f-1}}=\left(e^{g(f-1)}\right)^{\frac{\ln(1+(f-1))}{f-1}\to 1}\to e^{g(f-1)}$$

**Prima risoluzione** Nel nostro caso $g(f-1)$ diventa

$$x\left(\frac{f(x)}{\frac{2}{3}-x}-1\right)=x\frac{f(x)-\frac{2}{3}+x}{\frac{2}{3}-x}=\frac{x}{\frac{2}{3}-x}\left(f(x)-\frac{2}{3}+x\right)\to -1\cdot 0$$

da cui il limite $e^0=1$.

**Seconda risoluzione** Sappiamo che

$$(1+t)^a=1+at+\frac{a(a-1)}{2}t^2+o(x^2)$$

Nel nostro caso

$$(1+t)^a\qquad\text{diventa}\qquad\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}},\ x\to-\infty$$

e quindi per $x\to-\infty$ si ha

$$\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2+o\left(\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2\right)$$

da cui

$$-x\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=-x+\frac{2}{3}-\frac{1}{9x}+o(\frac{1}{x})$$

Quindi

$$\frac{f(x)}{-x+2/3}=1-\frac{1}{9x}\frac{1}{-x(1-2/(3x))}\implies\frac{f(x)}{-x+2/3}=1+O(1/x^2)$$

e questo implica

$$e^{g(f-1)}=e^{x(1+O(1/x^2)-1)}\to 1$$

**1.3** Il precedente conti immette nella risposta alla presente domanda. Infatti

$$\sqrt[3]{1-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=1+\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2+o\left(\left(-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)^2\right)$$

da cui

$$f(x)=1-\frac{2}{3x}-\frac{7}{9x^2}+o(1/x^2)$$

e quindi $a=-1$, $b=2/3$, $c=7/9$,

**1.4** Deve aversi

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a|x-1|}{|x-1|}=0\iff\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{(2-x)(x+1)}\sqrt[3]{x-1}-a|x-1|}{|x-1|}=0$$

Da destra avremmo

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{(2-x)(x+1)}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} - a = 0$$

ma è chiaramente impossibile. **Riesce lo studente a capire il motivo alla base di tale impossibilità ?**

**1.5** È di nuovo una forma indeterminata $1^\infty$.

**Prima risoluzione** Usiamo come al solito

$$\lim_{x\to-\infty} e^{g(f-1)} = \lim_{x\to-\infty} x\cdot\frac{-1}{x}\left(f(x)-\frac{2}{3}\right) = 0$$

e quindi il limite è 1.

**Seconda risoluzine**

$$f(x)-\frac{2}{3} = -x - \frac{1}{9x} + o(1/x) \implies \left[\frac{-1}{x}\left(f(x)-\frac{2}{3}\right)\right]^x = \left(1+\frac{1}{9x^2}+o(1)\right)^x \to 1$$

usando la formula $e^{g(f-1)}$ usata prima.

**1.6** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (-f(x)+2/3-x)^a\,dx = \int_{-\infty}^0 \left(\frac{1}{9x}+o(\frac{1}{x})\right)^a dx$ ed quindi l'integrale converge se $a > 1$.

**1.7** Il punto $x_0$ cade all'interno dell'intervallo e quindi l'integrale è improprio in quanto $f(x)\to f(x_0)$ essendo la funzione continua in $x_0$.

$$f(x_0)-f(x) = f(x_0)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

Essendo

$$f''(x_0) = -3\frac{(-49+10\sqrt{7})2^{1/3}}{(-4+\sqrt{7})(1+2\sqrt{7})^{5/3}(4-\sqrt{7})^{2/3}} \neq 0$$

abbiamo

$$f(x_0)-f(x) = -\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2) \doteq c(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

Ciò vuol dire che $\dfrac{|x-x_0|^a}{f(x_0)-f(x)} = \dfrac{|x-x_0|^a}{c(x-x_0)^2(1+o(1))} = \dfrac{1}{c(1+o(1))}|x-x_0|^{a-2}$ e quindi l'integrale converge se $a-2>-1$ ossia $a>1$.

**2** L'integrale è improprio in quanto per $x\to+\infty$ si ha $\tan\dfrac{\pi x+1}{2x+1}\to+\infty$.

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x+1}{2x+1}-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}+\frac{2-\pi}{4x+2} \implies \tan\frac{\pi x+1}{2x+1} = \frac{1}{\tan\frac{\pi-2}{4x+2}} \sim \frac{4x}{\pi-2} \implies \ln\left(\tan\frac{\pi x+1}{2x+1}\right) \sim \ln x$$

$$\int_0^1 x^a \ln\left(\tan\frac{\pi x+1}{2x+1}\right)dx \sim \int_0^1 x^a \ln x dx$$

converge per $a<-1$. Si può ad esempio effettuare la sostituzione $x=e^t$ ed ottenere

$$\int_0^1 x^a\ln x dx = \int_{-\infty}^0 e^{ta}te^t dt \text{ converge per } a+1<0$$

**3** Si integri per parti