Analisi I per Ingegneria Online, Sessione autunnale
seconda prova scritta del 04–02–2019 A.A. 2018/2019

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan \dfrac{x^2}{x-1}$ specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata agli estremi dei vari intervalli in cui è decomposto il dominio, la concavità per $x \to \pm\infty$

1.1) Dire quante soluzioni ha e perché l'equazione $f(x) = c$, $c \in (-\infty, +\infty)$

1.2) Argomentando si dica per quali valori a converge l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(\cos f(x))^a} dx$

2) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(e^x - \sin x - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{x}{\tan^2 x}}$

3) Trovare a e b tale che $f(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$ dove $f(x) = (1+x^2)^{2/3} + ax + bx^2 - e^{3x}$,

4) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln^3(1+3x+2x\ln x)}{\sin x(1-\cos 3x)^2}$

5) Calcolare il limite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3\,(\ln^3(1+3x))^{\ln x}}{e^x(1+(\cos 3x)^2)}$

6) Dire per quale valore di a reale converge la serie $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a f(\frac{1}{n})$, $S_2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^a f(n)$, $S_3 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^a f(\frac{1}{n})$, $S_4 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^a f(n)$, ($f(x)$ è la funzione dell'esercizio n.1)

Soluzioni

1). Il dominio è $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.

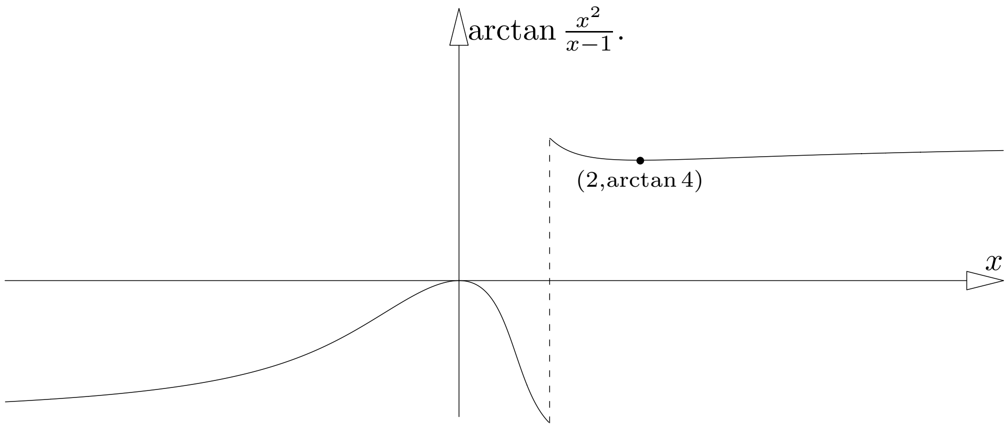
$\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \arctan(+\infty) = \pi/2$, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \arctan(-\infty) = -\pi/2$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\pi/2$

$f(x) \geq 0$ se e solo se $x > 1$.

$$f'(x) = \frac{x(x-2)}{x^2 - 2x + 1 + x^4} \geq 0 \iff x \leq 0, \quad x \geq 2, \quad f(x) = 0, \quad f(2) = \arctan 4$$

Non ci vuole molto a capire che il grafico è



1.1).

Per $c \leq -\pi/2$ non ci sono soluzioni dell'equazione $f(x) = c$.
Per $-\pi/2 < c < 0$ ci sono due soluzioni
Per $c = 0$ ce n'è una.
Per $0 < c < \arctan 4$ non ce ne sono
Per $c = \arctan 4$ ce n'è una.
Per $\arctan 4 < c < \pi/2$ ce ne sono due
Per $c \geq \pi/2$ non ce ne sono

1.2).

Sia $a = 0$. L'integrale diventa $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx = +\infty$.
Sia $a > 0$. L'integrale chiaramente diverge in quanto per $x \to +\infty$, $f(x) \to +\infty$
Sia $a < 0$ e quindi $a = -|a|$. L'integrale diventa $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a (\cos f(x))^{|a|} dx$. Per $x \to 0$ la funzione è asintotica a $x^a \cdot 1 = x^a$ e quindi converge se $a > -1$.

Per studiare il comportamento della funzione a $+\infty$ scriviamo

$$\cos \arctan \frac{x^2}{x-1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x-1}{x^2}\right) = -\sin \arctan \frac{x-1}{x^2} \sim -1/x$$

in quanto $\arctan y$ è asintotico a y per $y \to 0$ e pure $\sin y$. Per $x \to +\infty$ quindi la funzione è asintotica a $x^a x^{|a|} = 1$ e l'integrale non converge. In conclusione non converge per nessun valore di a.

2).

$$e^x - \sin x - \frac{x^2}{2} = (1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120} + o(x^6) - x^2, 2,) = 1 - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\left(e^x - \sin x - \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{x}{\tan^2 x}} = \exp\left\{\frac{x}{\tan^2 x} \ln(1 - \frac{x^4}{24} + o(x^5))\right\} = \exp\left\{\frac{x}{\tan^2 x} (\frac{-x^4}{24} + o(x^4))\right\} \to 1$$

3). Si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/eserci/eserci.html; file 5.1, esercizio 5.5.1.

4).

$$f(x) = \underbrace{\frac{\ln^3(1 + 3x + 2x\ln x)}{(3x + 2x\ln x)^3}}_{\to 1} \underbrace{\frac{(3x + 2x\ln x)^3}{(2x\ln x)^3}}_{\to 1} \underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\to 1} \underbrace{\frac{8x^2}{\sin x(1 - \cos 3x)^2}}_{\to 16/9} (\ln x)^3 \to -\infty$$

5). Il limite fa zero in quanto $x^3 \to 0$, $(\ln^3(1+3x))^{\ln x} \to 1$, $e^x(1+(\cos 3x)^2) \to 2$. Per il secondo limite procedere come per il secondo esercizio.

6).
S_1. $f(x)$ è asintotica ad x^2 per $x \to 0$ per cui $f(1/n) \sim n^{-2}$ da cui la convergenza assoluta e semplice se $a-2<-1$ ossia $a<1$.

S_2. $f(x)$ è asintotica ad $\pi/2$ per $x \to +\infty$ per cui $n^a f(n) \sim n^a\pi/2$ da cui la convergenza assoluta e semplice se $a<-1$. Se $-1 \leq a < 0$ il termine generale tende a zero troppo lentamente ed essendo positiva, determina la divergenza della serie. Se inoltre $a>0$, il termine generale non tende a zero.

S_3. Se $a<1$ la convergenza è assoluta come in S_1.
Se $1 \leq a < 2$ è una serie di Leibnitz. Infatti $n^a f(1/n)$ è positiva per $n \to \infty$ e quindi $(-1)^n n^a f(1/n)$ ha segni alterni. Per dimostrare che tende a zero in modo monotono facciamo vedere che

$$\left(n^a f(\frac{1}{n})\right)' < 0 \text{ per lo meno asintoticamente}$$

$$\left(n^a f(\frac{1}{n})\right)' = an^{a-1} f(\frac{1}{n}) + n^a \left(\frac{x(x-2)}{x^2-2x+1+x^4}\right)\Big|_{x=\frac{1}{n}} \cdot \frac{-1}{n^2} =$$
$$= an^{a-1}\arctan\left(\frac{1}{n^2}\frac{n}{1-n}\right) - \frac{n^a}{n^2}\left(\frac{-1}{n} + o(\frac{1}{n})\right) \sim -an^{a-2} + n^{a-3} + o(n^{a-2}) < 0$$

Se $1 \leq a < 2$, $n^a f(1/n)$ tende a zero asintoticamente. La serie è di Leibnitz e converge.

Sempre per $1 \leq a < 2$ si poteva pure fare

$$n^a f(\frac{1}{n}) = -n^a \arctan\frac{1}{n}\frac{1}{n-1} = \frac{-n^a}{n(n-1)} + n^a o\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Se $a \geq 2$ $n^a f(1/n) \not\to 0$

S_4. Se $a<-1$ converge assolutamente come in S_2. Se $-1 \leq a < 0$ la serie è di Leibnitz e converge. Se $a \geq 0$ $n^a f(n) \not\to 0$ e non converge.