Analisi I per Ingegneria Online, Sessione estiva
seconda prova scritta del 02–07–2019 A.A. 2018/2019

Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità, eventuali asintoti.

Svolgimento Dominio $(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$ ma

$$\lim_{x\to-1^{-1}} f(x) = \arctan(+\infty) = \pi/2$$

La funzione è sempre non negativa in quanto $\sqrt{(x-1)/(x+1)} \geq 0$ e l'arcotangente conserva il segno del suo argomento. Non ci sono asintoti verticali né obliqui.
Siccome $f(1)=0$, $x=1$ è un punto di minimo di ordinata nulla.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \arctan(1) = \pi/4$$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{1}{2x(1+x)} \geq 0$$

Notare che per $x=\pm1$ la funzione non è definita e infatti

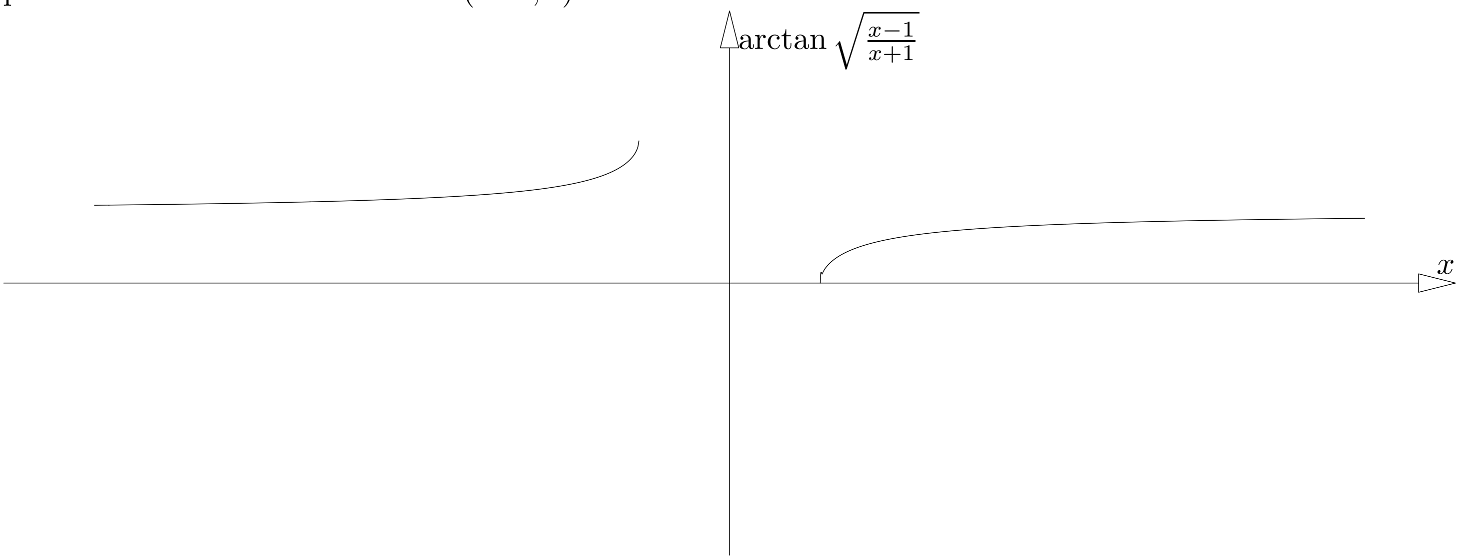
$$f'(1^+) = \lim_{h\to0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\arctan\sqrt{\frac{h}{h+2}} = +\infty$$

Inoltre

$$f'(-1^{-1}) = \lim_{h\to0^+}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{h} = \lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\arctan\sqrt{\frac{-2-h}{-h}} = +\infty$$

$$f''(x) = \frac{1-2x^2}{2x^2(1+x)^2(x-1)}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \geq 0 \iff x<-1$$

per cui è convessa nell'intervallo $(-\infty,1)$ e concava altrove.



1.1) Dire quante soluzioni ha e perché l'equazione $f(x)=c$, $c\in(-\infty,+\infty)$

Svolgimento Per $0\le c<\pi/4$ e $\pi/4<c<\pi/2$ si ha una soluzione; altrimenti nulla.

1.2) Calcolare $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x^3)}{\sqrt{\ln x}}$ (È sufficiente applicare "i limiti notevoli")

Svolgimento

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x^3)}{\sqrt{\ln x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{\ln(1+(x-1))}}\arctan\sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+1}}=\\
&=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{\ln(1+(x-1))}}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\arctan\sqrt{\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1}}=\\
&\underbrace{\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{\ln(1+(x-1))}}}_{\to 1}\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}}\arctan\sqrt{\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3+1}}=\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}
$$

1.3) Trovare a,b, tali che $(f(x))^2+a(x-1)+b(x-1)^2=o((x-1)^3)$ per $x\to 1^+$

Svolgimento per $y\to 0$ usiamo $\arctan y=y-y^3/3+o(y^4)$ da cui per $x\to 1$

$$
\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{1}{3}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^3+o((x-1)^2)
$$

quindi (poi usiamo $1/(1+x)=1-x+x^2/2+o(x^2)$)

$$
\begin{aligned}
(f(x))^2&=\frac{x-1}{x+1}-\frac{2}{3}\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}+o((x-1)^2)=\frac{1}{2}\frac{x-1}{1+\frac{x-1}{2}}-\frac{2}{12}\frac{(x-1)^2}{\left(1+\frac{x-1}{2}\right)^2}+o((x-1)^2)=\\
&=\frac{1}{2}(x-1)\left(1-\frac{x-1}{2}\right)+o((x-1)^2)-\frac{2}{12}(x-1)^2\left(1+o((x-1)^2)\right)+o((x-1)^2)=\\
&=\frac{1}{2}(x-1)-\frac{5}{12}(x-1)^2+o((x-1)^2)
\end{aligned}
$$

da cui $a=-1/2$, $b=5/12$.

1.4) Dire se esiste e quanto vale a tale che $f(x)-a=o((x+1))$ per $x\to -1^-$

Svolgimento Certamente deve essere

$$
\lim_{x\to -1^-}f(x)-a=\lim_{x\to -1^-}o((x+1))=0\implies a=\pi/2
$$

Poi dobbiamo mostrare che

$$
\lim_{x\to -1^-}\frac{f(x)-a}{x+1}=0\iff\lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1}\left(\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}-\frac{\pi}{2}\right)=0
$$

Usiamo $\arctan x+\arctan(1/x)=\pi/2$ $(x>0)$ e scriviamo

$$
\lim_{x\to -1^-}\frac{-1}{x+1}\arctan\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=-\infty
$$

per cui è impossibile.

1.5) Calcolare $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{4}{\pi}f(x)\right]^x$

Svolgimento

Prima soluzione è una forma indeterminata 1^∞ e quindi calcoliamo (vedi l'esame del 18/6/2019)

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x(\frac{4}{\pi}f(x)-1)} = e^{\lim_{x\to-\infty} x(\frac{4}{\pi}f(x)-1)}$$

Scriviamo

$$\lim_{x\to-\infty} x(\frac{4}{\pi}f(x)-1) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{\pi}f(x)-1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0}$$

Usiamo l'Hopital

$$\frac{\left(\frac{4}{\pi}f(x)-1\right)'}{\frac{-1}{x^2}} = -x^2\frac{4}{\pi}\frac{1}{1+\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\frac{2}{(x+1)^2} \to \frac{-2}{\pi}$$

e quindi il limite è $e^{-2/\pi}$

Seconda soluzione Usiamo $\sqrt{1+y} = 1+y/2-y^2/8+o(y^2)$ per $y\to 0$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{x(\frac{4}{\pi}f(x)-1)} = e^{\lim_{x\to-\infty} x(\frac{4}{\pi}f(x)-1)}$$

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{\left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)}{\left(1+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)\left(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{8x^2}-\frac{1}{8x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right) = 1-\frac{1}{x}+E(x), \qquad E(x)=o(\frac{1}{x})$$

quindi

$$\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \arctan\left(1-\frac{1}{x}+E(x)\right)$$

Ora

$$\arctan(1+y) = \arctan(1) + \frac{1}{1+y^2}\Big|_{y=0} y + o(y^2) \quad y\to 0$$

da cui

$$\arctan\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \arctan\left(1-\frac{1}{x}+E(x)\right) = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{x}+E(x)+o(\frac{1}{x})\right)$$

e finalmente

$$x(\frac{4}{\pi}f(x)-1) = x\left(1+\frac{2}{\pi}\frac{-1}{x}+o(\frac{1}{x})-1\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -2/\pi$$

e quindi il limite è $e^{-2/\pi}$.

1.6) Argomentando si dica per quali valori di a converge l'integrale $\int_{-2}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{4}-f(x)\right)^a dx$

Svolgimento Fra -2 e -1 (estremi compresi) l'integrale non è improprio essendo la funzione continua. Per $x\to+\infty$ ormai abbiamo capito che

$$\frac{\pi}{4}-f(x) = \frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})$$

da cui la convergenza per $a > 1$.

1.7) Dire per quali valori di a converge la serie $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \left(\frac{\pi}{4} - f(k)\right)^a$

Svolgimento Stessa cosa di sopra. Per $a > 1$ la convergenza è assoluta. Per $a = 1$ la convergenza è semplice (serie di Leibnitz)

Le domande 1–1.7 valgono 25 punti

2) (10 punti) Si considerino le due seguenti false affermazioni

1 Sia $f\colon (a,b) \to \mathbf{R}$ continua e limitata. Allora f ammette con certezza o massimo o minimo o tutti e due in (a,b)

Svolgimento $f(x) = x$

2 Sia $f\colon (a,+\infty) \to \mathbf{R}$ continua e limitata. Allora f ammette con certezza o massimo o minimo o tutti e due in $(a,+\infty)$

Svolgimento Sia ad esempio $a > 0$. Prendiamo $f(x) = 1/x$.

Si diano degli esempi di funzioni che soddisfano le ipotesi ma non le tesi.

3) (5 punti) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx$

Svolgimento $\dfrac{8}{15}(1+\sqrt{2})$, (porre $\sqrt{x} = t$ nell'integrale)