Analisi I per Ingegneria Online, Sessione invernale
terza prova scritta del 01–03–2019 A.A. 2018/2019
Si possono consultare libri, appunti, note etc.

Nome(Stampatello) **Cognome**(Stampatello) **Matricola**

1) Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^2 e^{\frac{|x|-1}{x}}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$ specificando i punti di minimo/massimo, gli intervalli di crescenza e decrescenza, il comportamento della derivata nei punti salienti del dominio, la concavità

1.1) Dire quante soluzioni ha e perché l'equazione $f(x) = c$, $c \in (-\infty, +\infty)$

1.2) Argomentando si dica per quali valori di a converge l'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^a} dx$

1.3) Argomentando si dica per quali valori di a converge l'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^a}{f(x)} dx$

1.4) Argomentando si dica per quali valori di a converge l'integrale $\displaystyle\int_{-2}^{-1/4} \frac{|x+1/2|^a}{f(x) - e/4} dx$

1.5) Trovare a, b, c, d tale che $f(x) - ax^2 - bx + c + d/x = o(1/x)$ per $x \to +\infty$

1.6) Trovare a, b, c tale che $f(x) - a - bx - cx^2 = o(x^2)$ per $x \to 0^+$

1.7) Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (ex^2 - f(x))^{\frac{1}{\ln x}}$

Le domande 1–1.7 valgono 20 punti

2) (5 punti) Calcolare i) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_0^1 \frac{(e^a - 1)}{e^{ax} + 1} dx$, ii) $\displaystyle\lim_{a\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{(e^a - 1)}{e^{ax} + 1} dx$, $a > 0$

3) (10 punti) Dire per quali valori di a converge la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k^a (\sin\sqrt{2\pi k(\pi + 2\pi k)} - 1)$ specificando la convergenza semplice e assoluta.

Soluzioni

1) Il dominio è $\mathbf{R}$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{\frac{x-1}{x}} = +\infty \cdot e = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{\frac{-x-1}{x}} = +\infty \cdot e^{-1} = +\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot 0 = 0$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \cdot +\infty =$ forma indeterminata,

Ci sono diversi modi di procedere. Sia $x = 1/t$ per cui $t \to -\infty$. Il limite diventa

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-1-t}}{t^2} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty} \to l'Hopital} \lim_{t\to-\infty} \frac{-e^{-1-t}}{2t} \underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty} \to l'Hopital} \lim_{t\to-\infty} \frac{e^{-1-t}}{2} = +\infty$$

In $x = 0$ la funzione è continua a destra e discontinua a sinistra e quindi discontinua. Sia $x > 0$.

$$f'(x) = (2x+1)e^{\frac{x-1}{x}} > 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$$

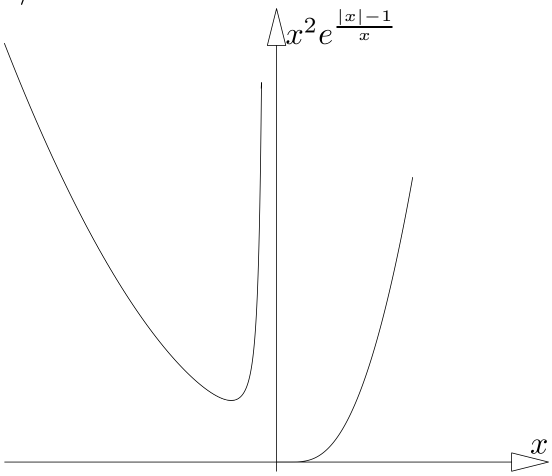
$$f''(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \frac{2x^2+2x+1}{x^2}$$

Sia $x < 0$.

$$f'(x) = (2x+1)e^{\frac{-x-1}{x}} > 0, \text{ per } -1/2 < x < 0, \qquad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = +\infty$$

$$f''(x) = e^{\frac{-x-1}{x}} \frac{2x^2+2x+1}{x^2}$$

La funzione ha la concavità rivolta verso l'alto e per $x = -1/2$ ha un minimo la cui ordinata è $e/4$.



1.1). Per $0 < y \le e/4$ ha una soluzione. Per $y > e/4$ ha tre soluzioni.

1.2) L'integrale è improprio per due ragioni. La prima è l'illimitatezza del dominio. La seconda è la presenza di x^a a denominatore nell'eventualità che a sia positivo.

$x \to +\infty$. Osserviamo che per un qualsiasi $p > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^p \frac{f(x)}{x^a} = \lim_{x\to+\infty} x^{p-a+2}e$. Se tale limite è finito, l'integrale converge ed il limite è finito se $a \ge p+2$. Essendo $p > 1$ si ha $a > 3$. **(Gli studenti che non hanno risolto il presente punto, approfondiscano perché la finitezza del limite appena studiato genera la convergenza dell'integrale improprio a $+\infty$.)**

Se $a = 3$ la funzione si comporta come $f(x) \sim e/x$ il cui integrale diverge e a fortiori se $a < 3$.

Vediamo ora il comportamento per $x \to 0$. Se esiste un qualsiasi $p < 1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^p \frac{f(x)}{x^a}$ esiste ed è finito, allora l'integrale esiste.

$$\lim_{x\to 0^+} x^p \frac{f(x)}{x^a} = \lim_{x\to 0^+} x^{p-a} e^{1-\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^{1-t}}{t^{p-a}} = 0$$

per ogni a. Unendo le due parti dell'esercizio se ne conclude che l'integrale esiste per $a > 3$.

1.3) Vediamo il comportamento a $-\infty$. Come primo passo ci riconduciamo a $x \to +\infty$ ponendo $y = -x$ e quindi $f(-y) \doteq g(y) = y^2 e^{\frac{1-y}{y}}$. Se

$$\lim_{y\to+\infty} y^p \frac{y^a}{g(y)} = \lim_{y\to+\infty} y^{p+a-2} e^{\frac{y-1}{y}} = \lim_{y\to+\infty} y^{p+a-2} e$$

esiste ed è finito per qualche $p > 1$ allora l'integrale converge. Ci basta che $p + a - 2 \le 0$ da cui $a \le 2 - p$ e quindi $a < 1$.

Se

$$\lim_{y\to 0^+} y^{p+a-2}e^{\frac{y-1}{y}}$$

è finito per un qualche $p<1$, allora l'integrale esiste. Il limite fa zero qualsiasi sia il valore di a per cui complessivamente l'integrale converge per per ogni $a<1$.

1.4) L'intgrale è improprio essendo il denominatore nullo per $x=-1/2$. Dobbiamo sapere il comportamento della funzione per $x\to -1/2$.

$$f(x)=f(-1/2)+f'(-1/2)(x+1/2)+f''(-1/2)(x+1/2)^2+o((x+1/2)^3)=$$
$$=f''(-1/2)(x+1/2)^2+o((x+1/2)^3)=2e(x+1/2)^2+o((x+1/2)^3)$$

Nell'intorno di $x=-1/2$ la funzione diventa

$$\frac{|x+1/2|^a}{2(x+1/2)^2(1+o(1))}=(x+1/2)^{a-2}(1+o(1))$$

e quindi converge se $a-2>-1$, $a>1$.

1.5) Sostanzialmente viene chiesto di calcolare lo sviluppo asintotico per $x\to+\infty$ della funzione fino ad un certo ordine.

$$f(x)=x^2e^{1-\frac{1}{x}}=x^2e(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^3})=ex^2-ex+\frac{e}{2}-\frac{e}{6x}+o(\frac{1}{x})$$

da cui $a=-e$, $b=e$, $c=-e/2$, $d=e/6$
Volendo essere più dettagliati, noi stiamo cercando quei valori a,b,c,d per cui

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax^2-bx-c-d/x)x=0$$

Certamente deve essere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ax^2-bx-c-d/x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ax^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}-a=0$$

da cui $a=\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{x-1}{x}}=e$.

Certamente deve essere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ex^2-bx-c-d/x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-ex^2-bx}{x}=\lim_{x\to+\infty}xe^{\frac{x-1}{x}}-ex-b=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}xe(1-\frac{1}{x}+o(1/x))-ex-b=-e-b=0$$

da cui $b=-e$.

Certamente deve essere

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-ex^2-bx-c-d/x=\lim_{x\to+\infty}f(x)-ex^2+ex-c=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{\frac{x-1}{x}}-ex^2+bx-c=\lim_{x\to+\infty}x^2e(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2})-ex^2+ex-c=\frac{-e}{2}+c=0$$

da cui $c=e/2$.

Da ultimo deve essere

$$\lim_{x\to+\infty} x(f(x)-ex^2+ex+\frac{-e}{2}+d/x)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x^3e\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}+o(1/x^3)\right)-ex^3+ex^2+\frac{-ex}{2}+d=0$$

per cui $d=1/6$.

Può essere utile passare alla variabile $t=1/x$ e quindi $t\to 0^+$. Il limite diventa

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(1/t)-a/t^2-b/t+c+dt}{t^2}=0 \iff \lim_{t\to 0^+}\frac{t^2f(1/t)-a-bt+ct^2+dt^3}{t^4}=0$$

ossia

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e^{1-t}-a-bt+ct^2+dt^3}{t^4}=0$$

se e solo se

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{e(1-t+t^2/2-t^3/6+t^4/24+o(t^4))-a-bt+ct^2+dt^3}{t^4}$$

Se non si vuole usare il Teorema di Taylor–MacLaurin, si applichi ripetutamente l'Höpital.

1.6) $a=b=c=0$. Infatti

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^2}=0$$

e quindi qualsiasi altra scelta per la terna a,b,c non andrebbe bene.

Più in dettaglio, certamente deve essere

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)-a-bx-cx^2=\lim_{x\to 0^+} f(x)-a=-a=0$$

Poi deve essere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-a-bx-cx^2}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-bx}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}-b=0$$

ma essendo $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)/x=0$, segue $b=0$.

Da ultimo deve essere

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-a-bx-cx^2}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^2}-c=0-c=0$$

1.7)

$$\exp\left[\frac{1}{\ln x}\ln(ex^2-f(x))\right]=\exp\left[\frac{1}{\ln x}\ln\left(ex+o(1)\right)\right]=\exp\left[\frac{1}{\ln x}\ln(ex)+\frac{1}{\ln x}\ln(1+o(1/x))\right]\to e$$

2)

i) $e^{ax}+1\geq 1$ per cui

$$\lim_{a\to 0}\left|\int_0^1\frac{e^a-1}{e^{ax}+1}dx\right|\leq\lim_{a\to 0}\int_0^1|e^a-1|dx=\lim_{a\to 0}|e^a-1|\cdot 1=0$$

La stessa procedura non si può usare in ii) in quanto avremmo

$$\lim_{a\to 0}\int_0^{+\infty} |e^a-1|dx$$

e l'integrale improprio non esiste. Bisogna integrare la funzione ponendo $e^{ax}=t$ da cui

$$(e^a-1)\int_1^{+\infty}\frac{1}{at}\frac{1}{t+1}dt=\frac{e^a-1}{a}\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{dt}{t(t+1)}=$$
$$=\frac{e^a-1}{a}\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{e^a-1}{a}\lim_{A\to+\infty}(\ln A-\ln(A+1)+\ln 2)$$

e quindi il limite è $\ln 2$.

3) Bisogna studiare il comportamento asintotico della espressione $\sin\sqrt{2\pi k(\pi+2\pi k)}-1$

$$\sqrt{2\pi k(\pi+2\pi k)}=2\pi k\sqrt{1+\frac{1}{2k}}=2\pi k\left[1+\frac{1}{4k}-\frac{1}{32k^2}+\frac{1}{128k^3}+o(\frac{1}{k^3})\right]=$$
$$=2\pi k+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16k}+\frac{\pi}{64k^2}+o(\frac{1}{k^2})$$

per cui

$$\sin\sqrt{2\pi k(\pi+2\pi k)}-1=\cos\left(-\frac{\pi}{16k}+\frac{\pi}{64k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right)-1=$$
$$=\frac{-1}{2}\left(-\frac{\pi}{16k}+\frac{\pi}{64k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right)^2+o\left(\left(-\frac{\pi}{16k}+\frac{\pi}{64k^2}+o(\frac{1}{k^2})\right)^3\right)=\frac{-\pi^2}{512k^2}+o(\frac{1}{k^2})$$

e quindi se $a<1$ la serie è assolutamente convergente. Se $1\le a<2$ la serie è di Leibnitz e quindi convergente. Se $a\ge 2$ il termine generale non tende a zero e quindi non converge.