Ing. Elettronica& Internet, Informatica (frontale e online), A.A.2020–2021

Giornale delle lezioni e materiale svolto a lezione ma non presente sulle dispense

Gli esercizi per casa e non svolti a lezione iniziano con ♠ e finiscono con ♠♠

L'inizio di esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense è contraddistinto con • e la fine con ••

Le dispense del Prof.Tauraso sono divise in 4 capitoli. Le pagine da studiare dopo ogni lezione si riferiscono al capitolo relativo

Le prime 6 ore circa di lezione non sono coperte dalle dispense di Tauraso. Il materiale verrà qui esposto

105 min. Lezione del 21/09/2020 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Nozioni di topologia in $\mathbf{R}^n$. Distanza, sfera aperta, sfera chiusa, frontiera della sfera. Nozione di punti interni di un insieme e di punto isolato

Distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$ (o norma di $\underline{x} - \underline{x}'$)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')^2\right)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\|\underline{x} - \underline{x}'\|,\ \text{dist}(\underline{x}, \underline{x}'),\ \rho(\underline{x}, x')\} \tag{1.1}$$

Se $n = 1$ si ottiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i')^2\right)^{1/2} = |x_1 - x_1'|$$

Se $n = 2$ si ottiene

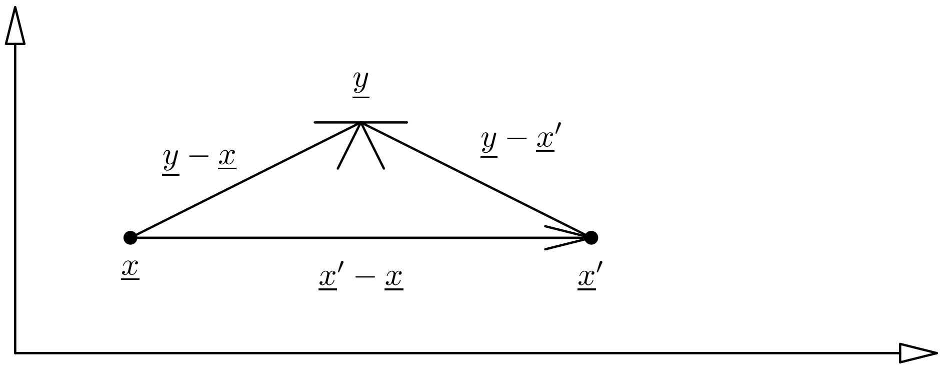
$$\big((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2\big)^{1/2}$$

che è l'usuale teorema di Pitagora imparato alle scuole medie.

La distanza fra due punti soddisfa

$$\begin{array}{ll} 1)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| \geq 0, & 2)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| = 0 \iff \underline{x} = \underline{x}' \\ 3)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| = \|\underline{x}' - \underline{x}\| & 4)\ \|\underline{x} - \underline{x}'\| \leq \|\underline{x} - \underline{y}\| + \|\underline{y} - \underline{x}'\| \end{array}$$

La 4) è la disuguaglianza triangolare disegnata: in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due. L'uguaglianza si ha solo quando il triangolo degenera e i lati si allineano lungo un segmento.



Definizione Dato $\underline{x}_o \in \mathbf{R}^n$, e dato un numero reale positivo r, l'insieme

$$B_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| < r\}$$

si dice *sfera aperta di centro* $\underline{x}_o$ *e raggio* r. A volte la parola "aperta" viene omessa.

L'insieme

$$\overline{B}_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| \leq r\}$$

si dice *sfera chiusa di centro* $\underline{x}_o$ *e raggio* r.

L'insieme

$$\partial B_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| = r\}$$

si dice *frontiera* di $B_r(\underline{x}_o)$

Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$. Un punto $\underline{x} \in E$ è detto *punto interno ad* E se

$$\exists\, r > 0: \ B_r(\underline{x}) \subset E$$

♠ **Esercizio** La *sfera aperta* $B_r(\underline{\xi})$ è un insieme aperto. Infatti se $\underline{x} \in B_r(\underline{\xi})$ allora

$$\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^2\right)^{1/2} \doteq= d < r$$

Consideriamo ora la sfera aperta $B_{r-d}(\underline{x})$ e quindi

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} < r - d$$

Sia $\underline{y} \in B_{r-d}(\underline{x})$. Abbiamo

$$\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

Eleviamo al quadrato

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i)$$

La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz ci dà

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i) \leq \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

per cui otteniamo

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 \leq \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 +$$

$$+\, 2\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = \big((r-d) + d\big)^2 = r^2$$

♠♠

Definizione $\underline{y} \in E$ è *punto isolato* se

$$\exists\ r > 0:\ B_r(y) \cap E \backslash \{\underline{y}\} = \emptyset$$

105 min. Lezione del 22/09/2020 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Definizione L'insieme dei punti interni ad E è indicato $\overset{\circ}{E}$. Un insieme è detto *aperto*, se tutti i suoi punti sono interni e quindi $E = \overset{\circ}{E}$.

L'insieme vuoto per definizione è aperto. $\mathbf{R}^n$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi

Definizione *La frontiera di E, ∂E, è definita come l'insieme dei punti (non necessariamente appartenenti a E) tali che qualunque sia la sfera aperta contenente il punto, tale sfera contiene sia punti di E che punti del complementare E^c.*

In formule $\underline{y} \in \partial E$ se

$$\forall\ r > 0,\ B_r(\underline{y}) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ B_r(\underline{y}) \cap E^c \neq \emptyset$$

Un punto $\underline{y} \in \partial E$ può appartenere ad E così come al complementare. La frontiera della sfera aperta appartiene al complementare mentre la frontiera della sfera chiusa apppartiene alla sfera. Per definizione $\partial E = \partial E^c$.

Definizione *$\underline{y}$ è punto di accumulazione per E (in simboli $\underline{y} \in E'$)* se

$$\forall\ r > 0\ B_r(\underline{y}) \cap E \backslash \{\underline{y}\} \neq \emptyset$$

In altre parole parole, ogni sfera aperta contenente $\underline{y}$, deve contenere almeno un punto di E. In termini di successioni si traduce in

$$\exists\ \{\underline{x}_n\}\ :\ \underline{x}_n \in E,\ \underline{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underline{y}\ \wedge\ \forall\ m\ \exists\ n > m : \underline{x}_n \neq \underline{y}$$

Definizione $\underline{y} \in E$ è *punto isolato* se

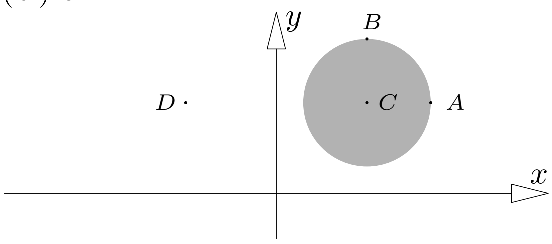
$$\exists\ r > 0:\ B_r(y) \cap E \backslash \{\underline{y}\} = \emptyset$$

Un punto isolato è necessariamente di frontiera. Un punto di frontiera o è di accumulazione o è isolato.

Definizione $E \cup E'$ è detto *chiusura* di E e si indica con $\overline{E}$. Dunque un insieme è detto *chiuso* se $E = E \cup E' = \overline{E}$ per cui è chiuso se $E' \subset E$.

Un esempio in $\mathbf{R}^2$. Il cerchio in figura è $B_r(C)$, $r = 0.7$, $C = (1, 1)$. I punti A e B sono sia di accumulazione che di frontiera ma non interni. Il punto C è di accumulazione e interno ma non di frontiera

La frontiera dell'insieme $B_r(C) \cup D$ contiene D che non è di accumulazione.



Definizione di limite per funzioni di più variabili.

Definizione *Sia* $\underline{x}_o \in E'$ *e* $l \in \mathbf{R}$. *Diremo che*

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = l \qquad (f(\underline{x})\xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}_o]{} l) \quad \text{se} \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E\backslash\{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ |f(\underline{x}) - l)| < \varepsilon$$

Per $l = +\infty$ si ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = +\infty$ se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E\backslash\{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ f(\underline{x}) > M$

Per $l = -\infty$ si ha $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = -\infty$ se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E\backslash\{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ f(\underline{x}) < M$

105 min. Lezione del 24/09/2020 Non c'è stata lezione (recuperata il 14/11/2020)

105 min. Lezione del 28/09/2020

L'esistenza del limite implica che so *ogni* restrizione della funzione il limite faccia zero.

I polinomi di due variabili $P(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{i,j}x^iy^j$ sono funzioni definite su tutto $\mathbf{R}^2$ e ammettono limite in ogni punto. Il limite vale $P(x^0,y^0)$.

Una funzione razionale, rapporto di due polinomi, $\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$ ammette limite in tutti i punti in cui non si annulla il denominatore e il limite vale $P(x^0,y^0)/Q(x^0,y^0)$.

Definizione di funzione continua Sia $f\colon A \to \mathbf{R}$ e $A \subset \mathbf{R}^2$. Sia $\underline{x}^0 \in A$. Se $\underline{x}^0$ è un punto isolato allora per definizione f è continua in $\underline{x}^0$. Se invece $\underline{x}^0 \in A'$ allora si dice che f è continua in $\underline{x}^0$ se

$$\forall\ r > 0\ \exists\ B_r(\underline{x}^0)\colon \underline{x} \in B_r(\underline{x}^0) \cap A \implies |f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0)| < \varepsilon$$

• Esercizio. Dimostrare che $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}x = 0$

Svolgimento usiamo il fatto che $f(\underline{x}) \to 0$ se e solo se $|f(\underline{x})| \to 0$ per cui dimostriamo che $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}|x| = \lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}|x| = 0$ Ora usiamo $(|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|x|\cdot|y| \geq 0$ da cui $|x|\cdot|y| \leq (x^2+y^2)/2$. Si ha

$$0 \leq \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}|x| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|x| = \frac{|x|}{2}$$

e per il torema del confronto (o dei carabinieri), il limite è zero dal momento che sia la parte sinistra che destra tendono a zero. ••

• Esercizio. Dimostrare che $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste

Svolgimento osserviamo che $\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{m}{1+m^2}$ e quindi il limite dipende dalla restrizione, fatto impossibile se esistesse il limite per $\underline{x} \to \underline{0}$.

Se ripetessimo i calcoli precedenti arriveremmo a

$$0 \leq \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

ma stavolta $1/2 \not\to 0$. ••

Definizione (derivata parziale) *Il limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1},x_j+t,x_{j+1},\ldots,x_n) - f(\underline{x}))$$

è la derivata parziale rispetto a x_j $1 \le j \le n$ della funzione calcolata nel punto $\underline{x}$. Una funzione è derivabile in $\underline{x}$ se ammette tutte le derivate parziali in $\underline{x}$

La derivata parziale j–esima può essere scritta anche come $\partial_j f(\underline{x})$, $\partial_{x_j} f(\underline{x})$, $f_{x_j}(\underline{x})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x})$, $D_{\underline{e}_j} f(\underline{x})$. Il vettore applicato in $\underline{x}$ dato da tutte le n derivate parziali verrà scritto come $\underline{\partial} f(\underline{x})$ ed è detto *gradiente (in $\underline{x}$)* . Le derivate parziali sono un caso particolare delle *derivate direzionali*

Definizione 2 (derivata direzionale) *Dato il vettore $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ tale che $v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2 = 1$. Il limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \ldots, x_n + v_n t) - f(\underline{x}))$$

dicesi derivata direzionale della funzione nel punto $\underline{x}$

Osservazioni *i)* Abbreviando si scrive $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x}))$. La derivata direzionale in $\underline{x}$ (che si badi bene è un numero reale e non un vettore) si indica talvolta con $D_{\underline{v}} f(\underline{x})$. Con $\underline{v} = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ (1 al j-esimo posto) si ottiene f_{x_j}.
L'espressione $\underline{x} + t\underline{v}$ rappresenta l'equazione parametrica della retta passante per $\underline{x}$ ed avente direzione data da $\underline{v}$. Quindi, al variare di t,

$$f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \ldots, x_n + v_n t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x} + t\underline{v})$$

è l'insieme dei valori delle ordinate della funzione quando ci si muove sulla retta in questione.

Definizione 3 (differenziabilità) *Una funzione è differenziabile in $\underline{x}$ se esiste $\underline{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ tale che accade che*

$$\lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x} + \underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\alpha} \cdot \underline{h})) = 0$$

Se una funzione è differenziabile in ogni punto del suo dominio si dice che è differenziabile

Prendendo la restrizione relativa da $\underline{h} = (h_1, 0, 0, \ldots, 0)$, il limite diventa

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{1}{|h_1|}(f(x_1 + h_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) - \alpha_1 h_1)) = 0$$

e ciò può accadere se e solo se $\alpha_1 = f_{x_1}(\underline{x})$. Ne segue che se una funzione è differenziabile è anche derivabile.

Esercizio Il viceversa non è vero ossia si può avere una funzione derivabile in un punto ma non differenziabile. Sia data la funzione $\begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

e lo stesso per f_y quindi $f(\underline{x})$ è derivabile nell'origine. Per essere differenziabile deve accadere che

$$\lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0} + \underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0}) \cdot \underline{h})) = \lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{f(\underline{0} + \underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \lim_{\underline{h}\to \underline{0}} \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \frac{h_1^2 h_2}{h_1^2 + h_2^2} = 0$$

ma è impossibile; basta prendere la restrizione $h_1 = h_2$, $h_2 \to 0$.

Esercizio Dimostrazione che

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y| \geq x^2 \\ 1 & \text{se } y = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è continua nell'origine.

Esercizio

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\ln(x^2+y^4)}{\sin(xy)} = \frac{2x}{x^2+y^4}\frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2+y^4)\frac{\cos(xy)y}{\sin^2(xy)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(x^2+y^4)}{\sin(xy)} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}\frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2+y^4)\frac{\cos(xy)x}{\sin^2(xy)}$$

Alcuni studenti hanno chiesto se esiste una strategia per capire se una data funzione ammette limite e/o è continua in un determinato punto. Si possono dare delle linee guida.

1) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste e valga l. In tal caso non resta che dimostrarlo usando i vari teoremi sulla somma, prodotto, quoziente di funzioni. A volte bisogna maggiorare o minorare a seconda dei casi. È il caso della funzione $(x^2y)/(x^2+y^2)$

2) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste ma non si sa quanto valga. In tal caso si può prendere una particolare restrizione e calcolare il limite su tale restrizione, diciamo che valga l. A questo punto non resta che dimostrare che il limite è effettivamente l.

3) Ci si convince che il limite non esiste. In tal caso: o si si dimostra che il limite non esiste lungo una particolare restrizione della funzione o si trovano due restrizioni lungo le quali i limiti esistono ma sono diversi

Nel secondo caso rientra la funzione $(xy)/(x^2+y^2)$

• Verificare se esiste o meno $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ dove $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y-x} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

Il limite non esiste. Prendiamo la restrizione $y = x + \sqrt{x}$ ed otteniamo

$$f(x, x+\sqrt{x}) = \frac{x^2+x^2+2x\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} \to 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x, x+x^3) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^2+2x^4+x^3}{x^3} \nexists$$

e quindi il limite non esiste

105 min. Lezione del 29/09/2020 Parzialmente non presente sulle dispense di Tauraso.

Sia fata $f\colon A \subseteq \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ differenziabile e $\underline{x}^0 \in \overset{\circ}{A}$.

$$\lim_{\|\underline{h}\|\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x}^0+\underline{h}) - f(\underline{x}^0) - \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{h}) = 0$$

quindi $f(\underline{x}^0+\underline{h}) = f(\underline{x}^0) + \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{h} + o(\|\underline{h}\|)$ Sia $\|\underline{v}\| = 1$ da cui

$$f(\underline{x}^0+t\underline{v}) - f(\underline{x}^0) = t\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v} + o(\|t\underline{v}\|) \iff \frac{\Delta f_{\underline{v}}}{t} \doteq \frac{1}{t}(f(\underline{x}^0+t\underline{v}) - f(\underline{x}^0) = \underline{\partial} f(\underline{x}^0)\cdot\underline{v} + o(1)$$

Ora prendiamo $\underline{w} = \underline{\partial} f(\underline{x}^0)/\|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|$ nell'ipotesi che $\underline{\partial} f(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$.

$$\frac{\Delta f_{\underline{w}}}{t} \doteq \frac{1}{t}(f(\underline{x}^0 + t\underline{w}) - f(\underline{x}^0) = \underline{\partial} f(\underline{x}^0) \cdot \underline{w} + o(1) = \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\| + o(1)$$

e da Cauchy–Schwartz sappiamo che $|\underline{\partial} f(\underline{x}^0) \cdot \underline{v}| \leq \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\| \|\underline{v}\| = \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\|$. L'uguaglianza si ha solo nel caso $\underline{v} = \underline{w}$.

$$\frac{\Delta f_{\underline{w}}}{t} - \frac{\Delta f_{\underline{v}}}{t} = \|\underline{\partial} f(\underline{x}^0)\| - \underline{\partial} f(\underline{x}^0) \cdot \underline{v} + o(1) > 0$$

per ogni $|t|$ sufficientemente piccolo. Se ne conclude che la direzione data dal gradiente è quella di massima crescita della funzione.

Integrazione Pag.1,2,5,6,7 delle dispense di Tauraso. Esempio 2 pag.8. Definizione di area come integrale doppio. Calcolo dell'area del semicerchio di raggio r usando al formula degli integrali doppi

Esercizi Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità delle seguenti funzioni (se è presente α lo si faccia al variare di α)

$$f_1(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad f_2(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad f_3(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \end{cases}$$

$$f_4(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4+y^4} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases} \qquad f_5(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x+\sin y)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$$

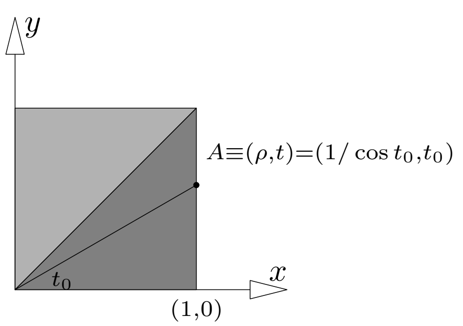
$$f_6(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4+xy}{(y^4+3x^4)^\alpha} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases} \qquad f_7(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^4-y^2-x^2y}{(y^2+x^2)^\alpha} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases}$$

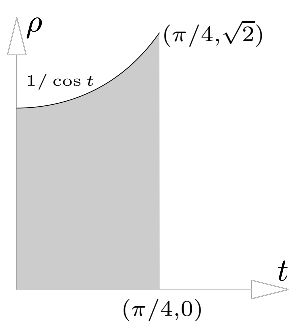
$$f_8(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{(3x^2+\sin^4 y)^\alpha}{(4y^2+x^2)} & \underline{x} \neq \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases} \qquad f_9(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{\arctan(x\sin^4 y)}{(e^{x^4+y^4}-1)} & \underline{x} \neq 0 \\ 0 & \underline{x} = 0 \end{cases}$$

Per le soluzioni si veda qui http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/eserci/13duevar.pdf

105 min. Lezione del 01/10/2020 Pag.20,21 fino a esempio 10. Pag.12,13 fino a "ad esempio". Calcolo dell'area del cerchio e del quadrato usando coordinate polari. Esempio 4 pag.10, Esempio 6 pag.15.

• Calcolare l'area del quadrato usando coordinate polari.





L'area è due volte l'area della metà inferiore.

$$\iint_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2: x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}} dxdy = \iint_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2: t\in[0,\pi/4],\ 0\le\rho\le 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano} d\rho\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1/\cos t} \rho\, d\rho\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos t}}\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l'area è due volte la quantità trovata. ●●

Svolgere i seguenti esercizi: pag.9 esempio 3, esempio 9 pag.19, esempio 10 pag.21, 3sempio 11 pag.23.

♠ Calcolare $\iint_D |y-x^2|dx\, dy$ dove D è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.12/5]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.41/30]** iii) L'insieme defnito da $x^2\le|y|\le 1$. **[R.8/5]**

Calcolare $\iint_D |\,x|y|-x^2|dx\, dy$ dove D è il quadrato di centro l'origine e lato lungo 2. **[R.3/2]**

Svolgimento La funzione integranda **e** il dominio di integrazione sono simmetrici rispetto allo scambio $(x,y)\to(x,-y)$ quindi integriamo per $y\ge 0$ e poi moltiplichiamo per 2. Il calcolo è

$$\int_0^1 dx\int_0^x dyx(-y+x) + \int_0^1 dx\int_x^1 dyx(y-x) + \int_{-1}^0 dx\int_0^1 dy(-x)(y-x) = \frac{3}{4}$$

Calcolare $\iint_D |y-x^3|dx\, dy$ dove D è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.16/7]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.8/7]** iii) L'insieme defnito da $x^2\le|y|\le 1$. **[R.8/5]**

Calcolare il volume del seguente insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon 0\le z\le r-\sqrt{x^2+y^2}\}$ (cono) **R.**$\boldsymbol{\pi r^3/3}$

Calcolare il volume dell'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2\le z\le 1+x+y$. **R.**$9\pi/8$

Svolgimento Integriamo per fili. Avendo in mente la figura di pag.20 delle dispense di Tauraso, dobbiamo trovare l'insieme D' e per farlo intersechiamo il paraboloide e il piano ottenendo $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{3}{2}$. L'insieme D' è quindi $\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\colon (x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}\right\}$. $\varphi_1(x,y)=x^2+y^2$ e $\varphi_2(x,y)=1+x+y$. Integrando “per fili” l'integrale è pertanto

$$\iint_{(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\le\frac{3}{2}} (1+x+y-x^2-y^2)dx$$

Passiamo a coordinate polari nel piano centrate in $(1/2,1/2)$, $x=1/2+\sqrt{3/2}r\cos t$, $y=1/2+\sqrt{3/2}r\sin t$, e l'integrale diventa

$$\int_0^1 dr\,\frac{3r}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-\frac{3r^2}{2}) = \frac{9\pi}{8}$$

Esercizio Calcolare l'integrale triplo della funzione $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ esteso al volume compreso fra il cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ e il piano $z=1$. ♠♠

Degli esercizi di Tauraso sugli integrali multipli, fare tutti quelli dal num.1 al num.10

105 min. Lezione del 05/10/2020 Pag.24,25. Calcolo del volume della sfera in coordinate polari sferiche e cilindriche. Esempio 9 pag.19.

• Sia dato il volume $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$ avente densità di massa costante δ. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse z ossia abbia coordinate $(0,0,\zeta)$. Il potenziale generato da V in $\underline{y}_0$ è $I = \displaystyle\iiint_V \frac{\delta dxdydz}{dist(\underline{x}, \underline{y}_0)}$.

L'integrale diventa $\displaystyle \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^r d\rho \frac{\rho^2 \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}} = \frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(|\rho+\zeta| - |\rho-\zeta|)$.

Si è usato il fatto che

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}\right) = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta > r$ e $\zeta \le r$.

Primo caso. Sia $\zeta > r$. L'integrale è $\displaystyle \frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) = \frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho 2\rho^2 = \frac{4\pi}{3}\delta\frac{r^3}{\zeta}$. Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece

$$\frac{2\pi\delta}{\zeta}\left(\int_0^{\zeta} d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho)) + \int_{\zeta}^{r} \rho(\rho + \zeta - (\rho - \zeta))d\rho\right) = 2\pi\delta(r^2 - \frac{1}{3}\zeta^2)$$

e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono.••

105 min. Lezione del 06/10/2020

• Volumi di rotazione. Nel piano (z, y) si abbia un insieme chiuso e limitato (ad esempio un poligono) che non intersechi né l'asse z né l'asse y (oppure intersechi almeno uno degli assi in un insiene avente area nulla) e lo si ruoti intorno all'asse z di α radianti. Il volume della regione ottenuta è

$$\alpha \iint_D y\, dy\, dz$$

Se invece ruotiamo intorno all'asse y abbiamo

$$\alpha \iint_D z\, dy\, dz$$

Ragionamento intuitivo Sia $C_{y,z}$ la circonferenza ottenuta a partire da (y, z) e ruotando di 360 gradi intorno a z. Possiamo pensare che il volume di rotazione sia $\displaystyle\bigcup_{y,z\in D} C_{y,z}$. Un facile disegno mostra che se $(y', z') \neq (y, z)$ allora $C_{y',z'} \cap C_{y,z} = \emptyset$. Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze $C_{y,z}$ al variare di (y, z) in D. Ciascuna circonferenza è lunga $2\pi y$ e la "somma" è $\displaystyle\iint_D 2\pi y\, dy\, dz$ appunto.

Se la rotazione avviene intorno all'asse y, allora il volume è

$$2\pi \iint_D z\, dy\, dz$$

Dimostrazione rigorosa nel caso della rotazione intorno all'asse z. Siano (u,v) le coordinate dell'insieme D. Le coordinate (x,y,z) sono $x=u\cos t$, $y=u\sin t$, $z=v$ e l'insieme è

$$V=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon (u,v)\in D, x=u\cos t, y=u\sin t, z=v, 0\le t\le\alpha\}$$

e l'integrale è

$$|V|=\iiint_V dx\,dy\,dz=\int_0^\alpha dt\iint_D \underbrace{u}_{iacobiano}\,du\,dv=\alpha\iint_D u du\,dv$$

Applicazione al calcolo del volume della ciambella originata dalla rotazione intorno all'asse z del disco $(y-r)^2+(z-r)^2\le R^2$, $r>R$. ●●

♠ Calcoliamo il volume racchiuso dalla supeficie conica $0\le z\le R-\sqrt{x^2+y^2}$ in diversi modi.

Integrazione per fili

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le R} z(x,y)dx\,dy=\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le R}(R-\sqrt{x^2+y^2})dx\,dy=\int_0^{2\pi}dt\int_0^R r(R-r)dr=\frac{\pi a^3}{3}$$

Sempre per fili si può anche procedere così ma è più lungo

$$\iint_{\sqrt{x^2+y^2}\le R}(R-\sqrt{x^2+y^2})dx\,dy=4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy(R-\sqrt{x^2+y^2})=$$
$$=4R\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy-4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\sqrt{x^2+y^2}$$

Si tenga presente che la riduzione a quattro volte l'ultimo integrale è possibile per **due** motivi: 1) il dominio D è simmetrico rispetto all'origine quindi se $(x,y)\in D$ allora $(-x,y)\in D$ e $(x,-y)\in D$ 2) la funzione integranda $f(x,y)=R-\sqrt{x^2+y^2}$ è simmetrica rispetto all'origine e quindi $f(-x,y)=f(x,y)$, $f(x,-y)=f(x,y)$. Se la funzione integranda fosse stata, ad esempio, $x-y-\sqrt{x^2+y^2}$ non sarebbe stato possibile.

$$4R\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}dx\underbrace{=}_{x=R\sin t}4R\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,dt=4R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=$$
$$=4R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos(2t)}{2}dt=R^3\pi$$

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\sqrt{x^2+y^2}=y\sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}}-\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{y^2dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$
$$=R\sqrt{R^2-x^2}-\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy+\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{x^2dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=$$
$$=R\sqrt{R^2-x^2}-\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}dy+x^2\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}$$

quindi

$$\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}dy\sqrt{x^2+y^2}=\frac{R}{2}\sqrt{R^2-x^2}$$

ed arriviamo a

$$\begin{aligned}
&R^3\pi - 4\int_0^R \left[\frac{R}{2}\sqrt{R^2-x^2} + \frac{x^2}{2}\ln(\sqrt{R^2-x^2}+R) - \frac{x^2}{2}\ln x\right]dx = \\
&= R^3\pi - \frac{R^3\pi}{2} - 2\int_0^R \left(x^2\ln R + x^2\ln(\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}+1) - x^2\ln x\right)dx = \\
&= \frac{R^3\pi}{2} - 2\int_0^1 \Big(R^3x^2\ln R + R^3x^2\ln(\sqrt{1-x^2}+1) - R^3x^2(\ln x+\ln R)\Big)dx = \\
&= \frac{R^3\pi}{2} - 2\int_0^1 \Big(R^3x^2\ln(\sqrt{1-x^2}+1) - R^3x^2\ln x\Big)dx \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 x^2\ln(\sqrt{1-x^2}+1)dx = \frac{x^3}{3}\ln(\sqrt{1-x^2}+1)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}+1}\frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{S^4C}{C(1+C)}dt = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{4\sin^2(t/2)\cos^2(t/2)\sin^2 t}{2\cos^2(t/2)}dt = \frac{2}{3}\int_0^1 \sin^2\frac{t}{2}\sin^2 t dt = \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 \sin^2 t\frac{1-\cos t}{2} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 x^2\ln x dx = -1/9$ e la (1) diventa $\displaystyle\frac{R^3\pi}{2} - \frac{R^3\pi}{6} + \frac{2R^3}{9} - \frac{2R^3}{9} = \frac{R^3\pi}{3}$

Integrazione per strati Sia $z = z_0$, $0 \le z_0 \le a$, un piano orizzontale. La sezione del cono relativa è data dall'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon z = z_0, \sqrt{x^2+y^2} \le a - z_0\}$ la cui area è evidentemente $\pi(a-z_0)^2$. Il volume è evidentemente la somma di tali aree ovverosia $\displaystyle\int_0^a \pi(a-z_0)^2dz_0 = \pi a^3 - 2\pi a\frac{a^2}{2} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{\pi a^3}{3}$

Parametrizzazione del volume tramite coordinate polari sferiche $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi/2$. Per calcolare il valore massimo di r fissiamo $\vartheta = \vartheta_0$ e $\varphi = \varphi_0$. Il valore massimo di r corrisponde al punto della retta $x(r) = r\sin\vartheta_0\cos\varphi_0$, $y(r) = r\sin\vartheta_0\sin\varphi_0$, $z(r) = r\cos\vartheta_0$ che interseca la superficie dell'insieme di cui vogliamo calcolare il volume e questo accade quando $z(r) = a - \sqrt{(x(r))^2+(y(r))^2}$ ossia $r\cos\vartheta_0 = a - r\sin\vartheta_0$ e quindi $0 \le r \le a/(\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta_0)$. A questo punto il volume cercato è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{\frac{a}{\cos\vartheta+\sin\vartheta}} dr r^2\sin\vartheta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sd\vartheta}{(C+S)^3} = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(S+C)d\vartheta}{(C+S)^3} - \frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Cd\vartheta}{(C+S)^3}$$

da cui

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Sd\vartheta}{(C+S)^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(S+C)d\vartheta}{(C+S)^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{(C+S)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{2(C/\sqrt{2}+S/\sqrt{2})^2} = \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{2(\cos(\vartheta-\pi/4))^2} = \frac{1}{2}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\vartheta}{2(\cos\vartheta)^2} = \frac{1}{4}\tan t\Big|_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il risultato è $\pi a^3/2$.

Parametrizzazione del volume tramite coordinate “coniche”

Sia $P = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, 0)$ un punto della base del cono. Il segmento che congiunge il vertice del cono $(0,0,a)$ con P ha rappresentazione parametrica $\lambda(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta, 0) + (1-\lambda)(0,0,a)$.

Il generico punto del volume da calcolare è rappresentato da $x(\lambda,r,\vartheta)=r\lambda\cos\vartheta$, $y(\lambda,r,\vartheta)=r\lambda\cos\vartheta$, $z(\lambda,r,\vartheta)=(1-\lambda)a$, $0\le\lambda\le 1$. Il volume è

$$\int_0^1 d\lambda\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^a dra\lambda^2 r=\frac{a^3\pi}{3}$$

Parametrizzazione del volume tramite coordinate cilindriche $x=r\cos\vartheta$, $y=r\sin\vartheta$, $z=u$ con $0\le r\le a$, $0\le\vartheta\le 2\pi$, $0\le u\le a-\sqrt{x^2+y^2}=a-r$ e il volume è

$$\int_0^{2\pi}d\vartheta\int_0^a dr\int_0^{a-r}dur=2\pi\int_0^a r(a-r)dr=2\pi(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3})=\frac{a\pi^3}{3}$$

♠♠

• **Superfici** Sia $\underline{\varphi}\colon \mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui grafico è contenuto in $\mathbf{R}^3$.)

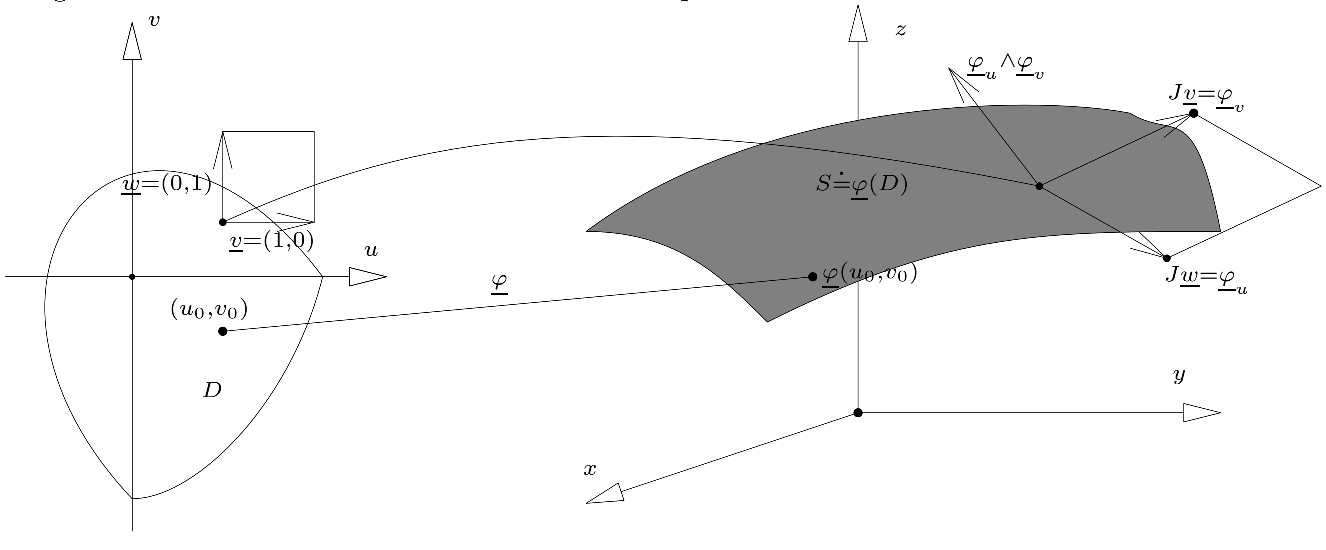
Definizione *Sia* $D=\overline{D}=\overset{\circ}{D}\cup\partial D$ *un insieme in* $\mathbf{R}^2$ *e sia* $\underline{\varphi}$ *una applicazione da* D *a valori in* $\mathbf{R}^3$. $\underline{\varphi}=\overset{\text{def}}{=}(\alpha(u,v),\beta(u,v),\gamma(u,v))$ *con le seguenti condizioni:* *i)* $\alpha,\beta,\gamma,\in C^1(D;\mathbf{R})$ *ii) il rango della matrice* $J=\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}$ *è due* *iii)* $(u,v)\neq(u',v')$ *implica* $\underline{\varphi}(u,v)\neq\underline{\varphi}(u',v')$ *per ogni* $(u,v),(u',v')\in D$;

La *ii)* è equivalente a dire che la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla ossia

$$\sqrt{\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\right|^2+\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|^2+\left|\begin{pmatrix}\beta_u & \beta_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|^2}\neq 0$$

La superficie descritta è detta *regolare.*
Sia $I_1=\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \beta_u & \beta_v\end{pmatrix}\right|$, $I_2=\left|\begin{pmatrix}\alpha_u & \alpha_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|$, $I_3=\left|\begin{pmatrix}\beta_u & \beta_v\\ \gamma_u & \gamma_v\end{pmatrix}\right|$

Osservazion1 La matrice J definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il rango pari a due garantisce che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti.



La matrice J applicata al vettore $(1,0)$ produce il vettore $\underline{\varphi}_u \doteq (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ mentre applicata al vettore $(0,1)$ produce $\underline{\varphi}_v \doteq (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$

$$\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_u & \beta_u & \gamma_u \\ \alpha_v & \beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \underline{i}(\beta_u\gamma_v - \beta_v\gamma_u) - \underline{j}(\alpha_u\gamma_v - \gamma_u\alpha_v) + \underline{k}(\alpha_u\beta_v - \beta_u\alpha_v)$$

per cui il modulo delle componenti del prodotto vettoriale corrispondono a (I_1, I_2, I_3). Il rettangolo definito dai vettori $\underline{\varphi}_u$ e $\underline{\varphi}_v$ giace sul piano tangente alla superficie e la sua area è pari a $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$. L'equazione del piano tangente a (x_0, y_0, z_0) è data da $(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot (\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v)(u_0, v_0) = 0$ dove $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(u_0, v_0)$.

I vettori tangenti in un qualsiasi punto $\underline{\varphi}(u_0, v_0)$ sono combinazione lineare dei due vettori $\underline{\varphi}_u(u_0, v_0)$ e $\underline{\varphi}_v(u_0, v_0)$. Infatti prendiamo una curva giacente su $\underline{\varphi}(D)$ ossia $\big(\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \gamma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\big) \doteq \underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t))$ dove $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ è una curva tale che $\underline{\gamma}(t_0) = (u_0, v_0)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t)) &= \Big(\alpha_u\gamma_1' + \alpha_v\gamma_2', \beta_u\gamma_1' + \beta_v\gamma_2', \gamma_u\gamma_1' + \gamma_v\gamma_2'\Big) = \\ &= \gamma_1'(\alpha_u\underline{i} + \beta_u\underline{j} + \gamma_u\underline{k}) + \gamma_2'(\alpha_v\underline{i} + \beta_v\underline{j} + \gamma_v\underline{k}) \end{aligned}$$

••

Definizione *Si definisce area della superficie l'integrale doppio* $\displaystyle\iint_D dudv \underbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}_{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ ed

a volte lo si indica con $\displaystyle\iint_S d\sigma$ dove S è il grafico della superficie in questione.

Se abbiamo una funzione $f(x,y,z)$ possiamo definire

l'integrale di superficie $\displaystyle\iint_S f(\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v)) d\sigma$

Si possono risolvere gli esercizi di Tauraso fino a pag.12.

• Nozione di *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie $z = f(x,y)$ $(x,y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia, $x = \alpha(u,v) = u$, $y = \beta(u,v) = v$, $z = \gamma(u,v) = f(u,v)$. In forma vettoriale si ha $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u,v)\underline{k}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$; $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$. Se $f(x,y) \in C^1(D)$ allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni $i), ii)$ e $iii)$. Infatti la $i)$ è chiaramente verificata. Per la $ii)$ basta verificare ad esempio che la matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inoltre la $iii)$ è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive. ••

Formula a pag.30 delle dispense di Tauraso sulll'area di una superficie cartesiana

Calcolo della superficie cartesiana di equazione $z = x^2 + y^2$ con la condizione $z \le z_0$

Primo modo. Parametrizziando la superficie in coordinate cartesiane si ha

$$\iint_{x^2+y^2 \le z_0} dx\, dy \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)} = \int_0^{\sqrt{z_0}} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \rho \sqrt{1 + 4\rho^2} = \frac{\pi}{6}\Big((1 + 4z_0)^{\frac{3}{2}} - 1\Big)$$

♠ Secondo modo. Parametrizziamo la superficie in coordinate cilindriche. Prima parametrizziamo il volume in $\mathbf{R}^3$: $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$, $z=u$. $x^2+y^2=z$ implica $u=\rho^2$ e $x^2+y^2\le z_0$ implica $\rho\le z_0$. Quindi la superficie diventa $x=\rho\cos t$, $y=\rho\sin t$, $z=\rho^2$ da cui

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{z_0}} d\rho\rho\sqrt{1+4\rho^2}$$

Terzo modo. Coordinate polari sferiche. Il volume è parametrizzato da $x=\rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\vartheta$. $x^2+y^2=z$ ci dà $\rho^2\sin^2\vartheta=\rho\cos\vartheta$ ossia $\rho=\dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$ e quindi la supeficie diventa

$$x=\cot\vartheta\cos\varphi,\quad y=\cot\vartheta\sin\varphi,\quad z=\cot^2\vartheta$$

Inoltre $x^2+y^2\le r^2$ diventa $\tan^2\vartheta\ge 1/z_0$ ossia ($\vartheta\in[0,\pi/2)$) $\arctan 1/\sqrt{z_0}\le\vartheta\le\pi/2$

$J=\begin{pmatrix} -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta} & -\frac{\sin\varphi}{\tan\vartheta} \\ -\frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta} & -\frac{\cos\varphi}{\tan\vartheta} \\ -\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\vartheta} & 0 \end{pmatrix}$ per cui l'integrale da calcolare è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arctan\frac{1}{\sqrt{z_0}}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\sqrt{1+4\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}}$$

Poniamo $\dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}=u$ da cui

$$2\pi\int_{\sqrt{z_0}}^0 (-u)\sqrt{1+4u^2}du$$

♠♠

♠ Usando la formula sui volumi di rotazione, calcolare il volume definito dalla relazione $(x^2+y^2+z^2+8)^2\le 36(x^2+y^2)$ ♠♠

Solo DOPO aver risolto l'esercizio si consulti
http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisi-II-frontale-2015-2016-ing-informatica/Sloluzioni-minicompito-per-casa.pdf

• Calcolo del potenziale elettrico generato da una sfera in un punto interno ed esterno alla sfera.

Sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ (vuota all'interno). $\underline{y}_0\equiv(\xi,\eta,\zeta)$ un punto dello spazio. Il potenziale nel punto $\underline{y}_0$ generato da un "pezzettino" della sfera intorno al punto della sfera $\underline{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ è dato da (δ è la densità di carica elettrica o gravitazionale ossia densità di massa che assumiamo costante)

$$\frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}=\frac{\delta\|\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v\|dudv}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}=$$

Il potenziale generato dalla sfera in $\underline{y}_0$ è $I=\displaystyle\iint_S\frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}$. Con la parametrizzazione in coordinate polari *avente l'asse z posto lungo la retta congiungente il centro di V con il punto* $\underline{y}_0$, l'integrale diventa

$$r^2\delta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\vartheta\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-2r\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}}=\frac{2\pi r\delta}{\zeta}(|r+\zeta|-|r-\zeta|)$$

Se $\zeta>r$ abbiamo $I=\frac{4\pi r^2\delta}{\zeta}=\frac{Q}{\zeta}$ dove $Q=4\pi r^2$ è la carica della superficie sferica. Se $\zeta<-r$ la formula è la stessa $I=\frac{Q}{-\zeta}$. Se $|\zeta|<r$ abbiamo $I=4\pi\delta r$. Come si vede, in ambedue i casi

le dimensioni del risultato sono pari a una massa fratto una distanza. Inoltre all'interno della sfera non vi è campo elettrico ossia un corpo materiale non sarebbe soggetto ad alcuna forza. ••

105 min. Lezione del 08/10/2020 Curve, integrali curvilinei e forme differenziali. Pagina 1,2,3,4 tranne le ultime tre righe. Esempio 1 pag.5. Calcolo della lunghezza dell'arco di parabola $y = x^2$ $0 \le x \le 1$. Pag.7,9,10 fino a esempio 6 escluso. Pag.11, Teorema 2 pag.15,17 fino a Teorema 3 escluso.

105 min. Lezione del 12/10/2020

• Data la forma differenziale in $\mathbf{R}^2$ $\omega(x, y) = 4x^3ydx + (2y + x^4)dy$ calcolare $\int_\varphi \omega$ dove φ è la curva $\varphi\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbf{R}^2$ $\varphi(t) = \begin{cases} t \\ \arctan(\sin t) \end{cases}$

Data la forma differenziale $\omega \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$ si calcoli $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$ per $\underline{\gamma}(t) = (t, t^2 \sin(1/t))$, $1/(2\pi) \le t \le 2/\pi$

Esercizio 5 dell'appello del primo marzo 2019 ••

Nozione di forma chiusa. Esattezza implica chiusura. Dimostrazione che $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega = -\int_{\underline{\gamma}^-} \omega$ con $\underline{\gamma}^- \doteq \gamma(-t)$, $-b \le t \le -a$.

Sia $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$ con $\underline{x} \in D = \overset{\circ}{D}$. Se l'integrale su una curva che collega due punti non dipende dalla curva ma solo dai punti, vuol dire che l'integrale su ogni curva chiusa che giace in D insieme al suo interno, è nullo.

105 min. Lezione del 13/10/2020 Pag.16 paragrafo 4. Pag.17,18,19,20 fino all'esempio 10 escluso. Pag.20 da esempio 11, pag.21,22 fino a esempio 12 escluso. Teorema 5 pag.26 solo enunciato

• Esercizio 5 del compito del 22 giugno 2016 ••

105 min. Lezione del 15/10/2020 Esercizi sulle forme differenziali.

Data una forma differenziale esatta in $D \subseteq \mathbf{R}^2$, $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$, per trovare il potenziale si può risolvere $U_x = a(\underline{x})$, $U_y = B(\underline{x})$ oppure scrivere

$$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t, y_0)dt + \int_{y_0}^{y} b(x, t)dt$$

Chiaramente si ha $U_y = b(x, y)$ e

$$U_x = a(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} b_x(x, t)dt = a(x, y_0) + \int_{y_0}^{y} a_y(x, t)dt = a(x, y_0) + a(x, y) - a(x, y_0) = a(x, y)$$

105 min. Lezione del 19/10/2020 Funzioni complesse

Da pag.1 a pag.10. Il Teorema 2 è stato dimostrato completamente. Tauraso dimostra solo che la derivabilità di $f(z)$ implica le condizioni di Cauchy–Riemann

Dimostrazione Sia $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olomorfa. Ciò vuol dire che

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(|z - z_0|) = f(z_0) + (a + ib)(z - z_0) + o(|z - z_0|), \qquad a + ib = f'(z_0)$$

Separando parte reale e immaginaria si arriva a

$$\begin{aligned}&u(x,y)+iv(x,y)=(u(x_0,y_0)+(a(x-x_0)-b(y-y_0))+Re(o(|z-z_0|)))+\\&+i\,(v(x_0,y_0)+(a(y-y_0)+b(x-x_0))+Im(o(|z-z_0|)))\,.\end{aligned}$$

$u(x,y)=(u(x_0,y_0)+(a(x-x_0)-b(y-y_0))+Re(o(|z-z_0|)))$ è la relazione di differenziabilità di $u(x,y)$ e la seconda la stessa cosa per $v(x,y)$. Ne segue che $a=u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$ e $b=v_x(x_0,y_0)=-u_y(x_0,y_0)$.

Viceversa supponiamo che $u(x,y)$ e $v(x,y)$ siano differenziabili e valgano le condizioni di Cauchy–Riemann. Sappiamo che

$$\begin{aligned}u(\underline{x})&=u(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)(x-x_0)+u_y(\underline{x}_0)(y-y_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|)\\v(\underline{x})&=v(\underline{x}_0)+v_x(\underline{x}_0)(x-x_0)+v_y(\underline{x}_0)(y-y_0)+o(|\underline{x}-\underline{x}_0|).\end{aligned}$$

Sommando si ottiene

$$u(\underline{x})+iv(\underline{x})=u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+(x-x_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(-iu_y(\underline{x}_0)+v_y(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|)$$

ed usando le condizioni di Cauchy Riemann si arriva a

$$\begin{aligned}&u(\underline{x})+iv(\underline{x})=u(\underline{x}_0)+iv(\underline{x}_0)+\\&+(x-x_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+i(y-y_0)(iv_x(\underline{x}_0)+u_x(\underline{x}_0)+o(|z-z_0|)=\\&=f(z_0)+(z-z_0)(u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))+o(|z-z_0|)\end{aligned}$$

da cui segue la derivabilità della funzione $f(z)$ in $z_0=x_0+iy_0$ e $f'(z_0)=u_x(\underline{x}_0)+iv_x(\underline{x}_0))=\frac{1}{i}(u_y(\underline{x}_0)+iv_y(\underline{x}_0))$ q.e.d.

105 min. Lezione del 20/10/2020 Funzioni complesse

Pag.11, pag.12 esempio 2 secondo integrale, pag.13,15,16,18,19,20 fino a esempio 6 escluso

105 min. Lezione del 22/10/2020 Funzioni complesse

Generalità sulle serie numeriche reali. Pag.9 delle dispense di Tauraso. A "z_n" sostituire "a_n" reale. Pag.10 fino a "uno strumento" escluso.

Teoremi del confronto: 1) $0\le a_k\le c_k$ e $\sum c_k$ convergente, implica $\sum a_k$ convergente, 2) $0\le d_k\le a_k$ e $\sum d_k$ divergente, implica $\sum a_k$ divergente.

♠ Criteri che si avvalgono dei teoremi del confronto.

Sia $a_k\ge 0$. Se accade che $\lim\limits_{k\to+\infty} k^p a_k=l(\neq+\infty)$ per un certo valore $p>1$, la serie $\sum a_k$ è convergente

Dimostrazione Per ipotesi $\forall\,\varepsilon\;\exists\;k_\varepsilon: k>k_\varepsilon \implies l-\varepsilon<k^pa_k<l+\varepsilon$ e quindi $0\, lea_k\le(l+\varepsilon)k^{-p}$ e la serie $\sum k^{-p}$ converge con $p>1$. q.e.d.

Sia $a_k\ge 0$. Se accade che $\lim\limits_{k\to+\infty} k^p a_k=l\neq 0$ per un certo valore $0\le p\le 1$, la serie $\sum a_k$ è divergente

Dimostrazione $\forall\,\varepsilon\;\exists\;k_\varepsilon: k>k_\varepsilon \implies l-\varepsilon<k^pa_k<l+\varepsilon$ e quindi $a_k\ge(l-\varepsilon)k^{-p}$. Prendiamo $\varepsilon=l/2$ ed abbiamo $a_k\ge l/(2k^p)$ ma $\sum k^{-p}$ diverge se $p\le 1$. q.e.d.

L'utilità dei due criteri è quella di fornire un metodo rapido per stabilire la convergenza o divergenza di determinate serie a segno definitivamente costante.

Sia data la serie $\sum 1/(k^3-\ln k)$. Siccome $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^3-\ln k}=0$ la serie converge. Utilizzando $0\le d_k\le a_k$, a lezione avremmo operato $k^3-\ln k\ge k^3/2$ e quindi $\displaystyle\frac{1}{k^3-\ln k}\le\frac{2}{k^3}$ da cui la convergenza.

La serie $\sum 1/(k^3+\ln k)$ converge da $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\frac{k^2}{k^3+\ln k}=0$ ed in ogni caso osservando $\displaystyle\frac{1}{k^3+\ln k}\le$ $1,k^3$, pssiamo usare $0\le c_k\le a_k$

Esercizio. Stabilire la convergenza delle serie $\sum k/\ln k$ e $\sum k/(\ln k)^2$ ♠♠

♠ "La 5a proprietà degli integrali di funzioni di VC (teorema fond. del calcolo integrale per funzioni di VC) un modo differente di enunciare il teorema di Cauchy?" (domanda di uno studente).

Risposta: No.

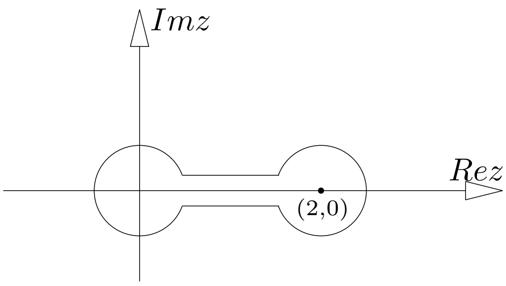
Se una funzione soddisfa le ipotesi del Teorema di Cauchy allora ammette primitiva

Prendiamo $F(z)=\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ con $\gamma(t_0)=z_0$, $\gamma(t_1)=z$.

Vogliamo mostrare che $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h}=f(z)$. Si rifacciano gli stessi calcoli che abbiamo esibito per mostarre che una forma difefrenziale chiusa in un semplicemente connesso è esatta.

Se una funzione ammette primitiva in un insieme connesso aperto non è detto soddisfi il Teorema di Cauchy

Prendiamo la funzione $1/z$, $z\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$. Vediamo se $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{dz}{z(z-2)}=\frac12$. L'integrale è uguale al limite per $\varepsilon\to0$ dell'integrale sulla curva (ε è la distanza dall'asse reale dui due tratti verticali)



Svolgendo i calcoli si ottiene 0. Se invece definisco $1/z$, $z\in\{z\in\mathbf{C}\colon \mathrm{Re}z\ge1\}$ allora il Teorema di Cauchy è vero. Infatti della precedente figura posso solo tenere la seconda "bolla" ed applicare il Teorema di Cauchy ottenendo 1/2. ♠♠

♠ Calcolare il volume dell'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+z^2\le1,\ 2z\ge1\}$

In coordinate polari sferiche $x=\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\cos\vartheta$ $2z\ge1$ diventa $\rho\cos\vartheta\ge 1/2$ e quindi $\rho\ge1/(2\cos\vartheta)$ con $0\le\vartheta\le\pi/2$ innanzitutto. Inoltre deve essere $\rho\le1$ per cui $\cos\vartheta\ge1/2$ e quindi $0\le\vartheta\le\pi/3$. L'integrale è

$$\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\vartheta\int_{\frac{1}{2\cos\vartheta}}^1 d\rho\rho^2\sin\vartheta=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\vartheta\sin\vartheta\left(\frac13-\frac{1}{24\cos^3\vartheta}\right)=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{24}$$

Calcolare il volume dell'insieme $\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+y^2+z^2\le1,\ 2x\ge1\}$

Prima soluzione Scambiare x con z e usare l'esercizio precedente.

Seconda soluzione In coordinate polari sferiche $x=\sin\vartheta\cos\varphi$, $y=\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\cos\vartheta$ $2x\ge1$

diventa $2\rho\sin\vartheta\cos\varphi \geq 1$ e quindi $\rho \geq 1/(2\sin\vartheta\cos\varphi)$ con $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$. Essendo poi $\rho \leq 1$ si ha $1 \geq 1/(2\sin\vartheta\cos\varphi)$ quindi $\sin\vartheta \geq 1/(2\cos\varphi)$ e d'altra parte $\sin\vartheta \leq 1$ da cui $1 \geq 1/(2\cos\varphi)$ ossia $\cos\varphi \geq 1/2$. Sia $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$. Se ne trae

$$\arcsin\frac{1}{2\cos\varphi} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{-\pi}{3} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}$$

L'integrale è

$$\int_{\frac{-\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\arcsin\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\frac{1}{2\sin\vartheta\cos\varphi}}^{1} \rho^2\sin\vartheta d\rho = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\arcsin\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\left(1-\frac{1}{8\sin^3\vartheta\cos^3\varphi}\right)d\vartheta$$

$$\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\arcsin\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta d\vartheta = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\frac{1}{4\cos^2\varphi}}d\varphi \underbrace{=}_{\varphi=\arctan t} \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3-t^2}}{1+t^2}dt \underbrace{=}_{t=\sqrt{3}\sin u}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{1+3\sin^2 u}du = \frac{-\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{4-3\cos^2 u} = \frac{-\pi}{6} + \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{-2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{\arcsin\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\frac{1}{8\sin^3\vartheta\cos^3\varphi}d\vartheta = \frac{-1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\varphi}{\cos^3\varphi}\frac{-1}{\tan\vartheta}\Big|_{\arcsin\frac{1}{2\cos\varphi}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{-1}{12}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{4\cos^2\varphi-1}}{\cos^3\varphi}d\varphi \underbrace{=}_{\varphi=\arctan t} \frac{-1}{12}\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{3-t^2}dt \underbrace{=}_{t=\sqrt{3}\sin u} \frac{-1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \frac{-\pi}{16}$$

Sommando $\pi/6 - \pi/(16) = 5\pi/(48)$. Poi bisogna eseguire il calcolo per $\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$ ma moltiplichiamo per due il risultato e riotteniamo $5\pi/(24)$.

Calcolare il volume dell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ (x-1/2)^2+(y-1/2)^2+z^2 \leq 1/2\}$.

Verifichiamo che $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+z^2 \leq 1/2 \not\Longrightarrow x^2+y^2+z^2 \leq 1$ altrimenti il calcolo è immediato. A tal fine prendiamo il punto $(1/2-\varepsilon, \sqrt{3}/2+\varepsilon, 0)$ e otteniamo che $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+z^2 \leq 1/2$ diventa $1+\varepsilon(\sqrt{3}-1)+2\varepsilon^2 \leq (\sqrt{3}+1)/2$ che è vera se ε è piccolo abbastanza e d'altro canto $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ diventa $1+\varepsilon(\sqrt{3}-1)+2\varepsilon^2 \leq 1$ che è falsa.

$(x-1/2)^2+(y-1/2)^2+z^2 \leq 1/2$ se e solo se $x^2+y^2+z^2 \leq x+y$ e in coordinate polari otteniamo $\rho \leq \sin\vartheta(\cos\varphi+\sin\varphi)$. Il volume è

$$\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{\sin\vartheta(\cos\varphi+\sin\varphi)} \rho^2\sin\vartheta d\rho = \frac{1}{3}\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi(\cos\varphi+\sin\varphi)^3 \int_0^{\pi} d\vartheta\sin^4\vartheta = \frac{1}{3}\frac{8}{3}\sqrt{2}\frac{3}{8}\pi$$

Calcolare il volume dell'insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : y+z \geq 1/(\sqrt{3}-1),\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ ♠♠

105 min. Lezione del 26/10/2020 Funzioni complesse

Pag.24 da "Uno stumento", pag.25, pag.26 fino a "Dimostriamo solo la 2". Pag.27 da "Prima di vedere". Pag.28. La dimostrazione del Teorema 7 sta nella videolezione.

105 min. Lezione del 27/10/2020 Funzioni complesse

Pag.29,30, 31, 32 tranne esempio 3), 33 dal paragrafo 6) tranne esempio 11, pag.34 trorema 9, pag.35, pag.38 esempio 13,

105 min. Lezione del 29/10/2020 Funzioni complesse

Pag.37,41,42 fino al paragrafo 6.

105 min. Lezione del 02/11/2020 Funzioni complesse (Lezione annullata)

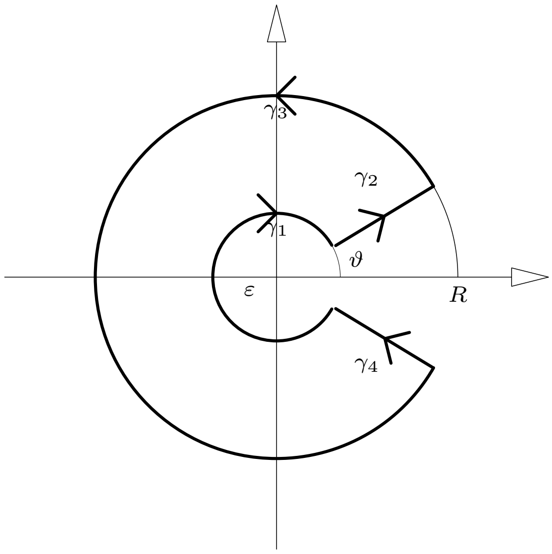
105 min. Lezione del 03/11/2020 Funzioni complesse

Pag.42 paragrafo 2) e pag.43 fino a esempio 18 escluso. Pag.44 esempio 19, pag.45 esempio 20. Nozione di punto all'infinito. Pag.39 da Osservazione fino alla fine.

105 min. Lezione del 05/11/2020 Funzioni complesse

Cammino a "pacman"

- Calcolo di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$



$$\gamma_2(t) = te^{i\vartheta} \quad \varepsilon \le t \le R$$
$$\gamma_3(t) = Re^{it} \quad \vartheta \le t \le 2\pi - \vartheta$$
$$\gamma_4(t) = -te^{i(2\pi-\vartheta)} \quad -R \le t \le -\varepsilon$$
$$\gamma_1(t) = \varepsilon e^{-it} \quad \vartheta - 2\pi \le t \le -\vartheta$$

$$\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} \to \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} \text{ con } z = |z|e^{i\vartheta}\ 0 \le \vartheta < 2\pi.$$

Si esegua $\displaystyle\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_\gamma \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dx$ con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz = \lim_{\vartheta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz = 0$$

Ad esempio

$$\left|\int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz\right| = \left|\int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \underbrace{(-i\varepsilon e^{-it})dt}_{dz}\frac{\varepsilon^{1/2}e^{-it/2}}{(1+\varepsilon^2 e^{-i2t})^2}\right| \le \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} |(-i\varepsilon e^{-it})|dt\frac{|\varepsilon^{1/2}|\cdot|e^{-it/2}|}{|1+\varepsilon^2 e^{-i2t}|^2} \le$$

$$\underbrace{\le}_{\varepsilon\le 1/2} \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \frac{\varepsilon^{3/2}}{1/2}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\left|\int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz\right| = \left|\int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \underbrace{(iRe^{it})dt}_{dz}\frac{R^{1/2}e^{it/2}}{(1+R^2e^{i2t})^2}\right| \le \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{R^{\frac{3}{2}}dt}{(|R|^2-1)^2} = \frac{R^{3/2}}{(|R|^2-1)^2}(2\pi - 2\vartheta)$$

e tende a zero per $R \to +\infty$. Si è usato il fatto che $|z + z'| \geq \big|\, |z| - |z'| \,\big|$

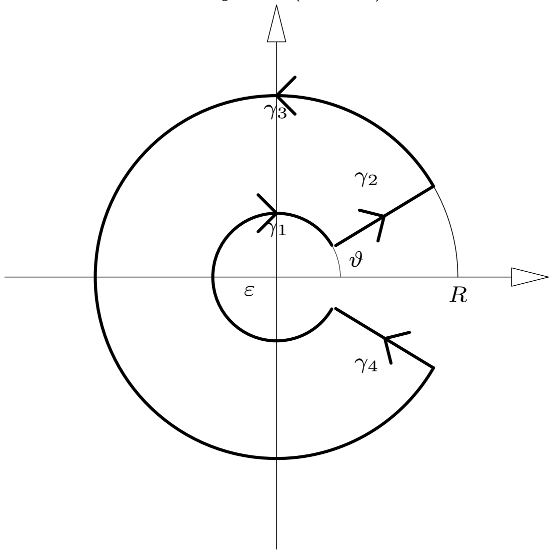
$$\oint_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{-e^{i(2\pi-\vartheta)} dt}_{dz} \frac{(-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^{1/2}}{(1-t^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} \underbrace{=}_{\tau=-t} \int_{\varepsilon}^{R} e^{-i(2\pi-\vartheta)}(-d\tau) \frac{\sqrt{\tau} e^{-i(\pi-\vartheta/2)}}{(1+\tau^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} e^{-i(2\pi-\vartheta)} d\tau \frac{\sqrt{\tau} e^{-i\vartheta/2}}{(1+\tau^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} \xrightarrow[\varepsilon,\vartheta\to 0,\ R\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx$$

Quindi $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=-i} f(z) + \mathrm{Res}_{z=i} f(z)\right)$

Otteniamo $2\pi i \lim\limits_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{z}}{(z+i)^2} + 2\pi i \lim\limits_{z\to -i} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{z}}{(z-i)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ••

♠ Calcolo di $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx$,



$$\gamma_2(t) = te^{i\vartheta} \quad \varepsilon \leq t \leq R$$
$$\gamma_3(t) = Re^{it} \quad \vartheta \leq t \leq 2\pi - \vartheta$$
$$\gamma_4(t) = -te^{i(2\pi-\vartheta)} \quad -R \leq t \leq -\varepsilon$$
$$\gamma_1(t) = \varepsilon e^{-it} \quad \vartheta - 2\pi \leq t \leq -\vartheta$$

$\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \to \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2}$ con $z = |z| e^{i\vartheta}$ $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

Si esegua $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dx$ con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ e si dimostri che

$\lim\limits_{\vartheta\to 0} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = \lim\limits_{\vartheta\to 0} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = 0$

Ad esempio

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz \right| = \left| \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \underbrace{(-i\varepsilon e^{-it}) dt}_{dz} \frac{\varepsilon^{1/2} e^{-it/2}}{(1+\varepsilon e^{-it})^2} \right| \leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} |(-i\varepsilon e^{-it})| dt \frac{|\varepsilon^{1/2}| \cdot |e^{-it/2}|}{|1+\varepsilon e^{-it}|^2} \leq$$

$$\underbrace{\leq}_{\varepsilon\leq 1/2} \leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \frac{\varepsilon^{3/2}}{1/2} dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\left| \int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz \right| = \left| \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \underbrace{(iRe^{it}) dt}_{dz} \frac{R^{1/2} e^{it/2}}{(1+Re^{it})^2} \right| \leq \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{R^{\frac{3}{2}} dt}{(|R|-1)^2} = \frac{R^{3/2}}{(|R|-1)^2} (2\pi - 2\vartheta)$$

e tende a zero per $R \to +\infty$. Si è usato il fatto che $|z+z'| \geq \big|\,|z|-|z'|\,\big|$

$$\oint_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2}dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{-e^{i(2\pi-\vartheta)}dt}_{dz} \frac{(-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^{1/2}}{(1-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^2} \underbrace{=}_{\tau=-t} \int_{\varepsilon}^{R} e^{-i(2\pi-\vartheta)}(-d\tau)\frac{\sqrt{\tau}e^{-i(\pi-\vartheta/2)}}{(1+\tau e^{-i(2\pi-\vartheta)})^2} =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} e^{-i(2\pi-\vartheta)}d\tau \frac{\sqrt{\tau}e^{-i\vartheta/2}}{(1+\tau e^{-i(2\pi-\vartheta)})^2} \xrightarrow[\varepsilon,\vartheta\to 0,\ R\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$$

Quindi $\lim\limits_{\vartheta\to 0}\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\lim\limits_{R\to+\infty} \oint_\gamma \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2}dx = 2\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx = 2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1}f(z) = 2\pi i \frac{d}{dz}\sqrt{z}\Big|_{z=e^{i\pi}} =$
$2\pi i \frac{1}{2}\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = \pi$

Si badi bene: se si fosse scritto $2\pi i \mathrm{Res}_{z=-1}f(z) = 2\pi i \frac{d}{dz}\sqrt{z}\Big|_{z=e^{-i\pi}} = 2\pi i\frac{1}{2}\frac{1}{e^{i\frac{-\pi}{2}}} = -\pi$ ed è chiaramente sbagliato. Il motivo per cui bisogna prendere $-1 = e^{i\pi}$ è dovuto al fatto che gli angoli sono maggiori di zero e minori di 2π. ♠♠

♠ Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{-1}{2}}}{(1+x^2)^2}dx,$

$$I(1-e^{2\pi i\frac{-1}{2}}) = 2\pi i \sum \mathrm{Res} z^{-1/2}(1+z^2)^{-2} \qquad (1)$$

La funzione $(1+z^2)^{-2}$ è olomorfa tranne i punti $z=\pm i$ in cui ha due poli di ordine 2.

$$\mathrm{Res}\frac{z^{-1/2}}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=i} = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{z^{-1/2}}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i}\left[\frac{-1}{2}\frac{z^{-3/2}}{(z+i)^2} - 2\frac{z^{-1/2}}{(z+i)^3}\right] = \frac{-1}{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\frac{-3}{2}}}{(2i)^2} - 2\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\frac{-1}{2}}}{(2i)^3} =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right] - \frac{i}{4}\frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{Res}\frac{z^{-1/2}}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=-i} = \lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\frac{z^{-1/2}}{(z-i)^2} = \lim_{z\to -i}\left[\frac{-1}{2}\frac{z^{-3/2}}{(z-i)^2} - 2\frac{z^{-1/2}}{(z-i)^3}\right] = \frac{-1}{2}\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\frac{-3}{2}}}{(-2i)^2} - 2\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\frac{-1}{2}}}{(-2i)^3} =$$
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right] + \frac{i}{4}\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

La formula (1) dà $2I = 2\pi i\left[\frac{-i}{4\sqrt{2}} + \frac{-i}{2\sqrt{2}}\right]$ da cui $I = \frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$ ♠♠

♠ Calcolare $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(1+x^2)^2}dx,$

$$I(1-e^{2\pi i\frac{-1}{3}}) = 2\pi i\sum \mathrm{Res} z^{-1/3}(1+z^2)^{-2} \qquad (1)$$

$$\mathrm{Res}\frac{z^{-1/3}}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=i} = \frac{d}{dz}\frac{z^{-1/3}}{(z+i)^2}\Big|_{z=i} = \lim_{z\to i}\left[\frac{-1}{3}\frac{z^{-4/3}}{(z+i)^2} - 2\frac{z^{-1/3}}{(z+i)^3}\right] = \frac{-1}{3}\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\frac{-4}{3}}}{(2i)^2} - 2\frac{e^{i\frac{\pi}{2}\frac{-1}{3}}}{(2i)^3} =$$
$$= \frac{1}{12}\left[\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right] - \frac{i}{4}\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

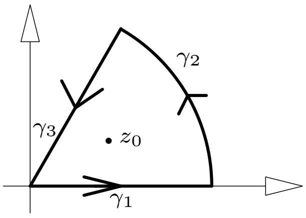
$$\mathrm{Res}\frac{z^{-1/3}}{(1+z^2)^2}\Big|_{z=-i} = \frac{d}{dz}\frac{z^{-1/3}}{(z+i)^2}\Big|_{z=-i} = \lim_{z\to -i}\left[\frac{-1}{3}\frac{z^{-4/3}}{(z-i)^2} - 2\frac{z^{-1/3}}{(z-i)^3}\right] = \frac{-1}{3}\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\frac{-4}{3}}}{(-2i)^2} - 2\frac{e^{i\frac{3\pi}{2}\frac{-1}{3}}}{(-2i)^3} =$$
$$= \frac{1}{12} + \frac{i}{4}(-i)$$

Abbiamo

$$Ie^{-i\frac{\pi}{3}}(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}}) = 2\pi i\left(\frac{1}{6}-\frac{i\sqrt{3}}{6}\right) \Longrightarrow Ie^{-i\frac{\pi}{3}}2i\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi i}{3}\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow I=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx,$
$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac15}(1+x^2)}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(1+x^2)^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac14}}{(1+x^2)^2}dx,$
$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(x+1)(1+x^2)}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(x+1)(1+x^2)^2}dx,$
$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{(1+x^2)^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^3}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{(1+x^2)^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{1+x^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{(1+x+x^2)^2}dx,$
$\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x+x^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^4}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^6}dx,$ ♠♠

Calcolare $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^6}dx$. Più in generale calcoliamo $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^{2n}}dx$. Anziché usare il cammino a pacman che comporta il calcolo di $2n$ residui, utilizziamo il cammino (**valido in questo caso specifico (non si generalizzi)**)



$$\begin{cases}\gamma_1(t)=t,\ 0\le t\le R\\ \gamma_2(t)=Re^{it}\quad 0\le t\le\frac{\pi}{n}\\ \gamma_3(t)=-te^{i\frac{\pi}{n}},\ -R\le t\le 0\qquad z_0=e^{i\frac{\pi}{2n}}\end{cases}$$

All'interno del settore vi è solo la singolarità z_0 per cui abbiamo

$$\int_{\gamma_1}\frac{z^{\frac23}dz}{1+z^{2n}}+\int_{\gamma_2}\frac{z^{\frac23}dz}{1+z^{2n}}+\int_{\gamma_3}\frac{z^{\frac23}dz}{1+z^{2n}}=\int_0^R\frac{t^{\frac23}dt}{1+t^{2n}}+\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{R^{\frac23}e^{it\frac23}Rie^{it}dt}{1+R^{2n}e^{2nit}}+\int_{-R}^0\frac{(-t)^{\frac23}e^{i\frac{2\pi}{3n}}(-dt)e^{i\frac{\pi}{n}}}{1+(-t)^{2n}e^{i\frac{\pi}{n}2n}}$$

Per $R>1$ abbiamo

$$\left|\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{R^{\frac23}e^{it\frac23}Rie^{it}dt}{1+R^{2n}e^{2nit}}\right|\le\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{R^{\frac53}dt}{R^{2n}-1}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0\qquad\int_{-R}^0\frac{(-t)^{\frac23}e^{i\frac{2\pi}{3n}}(-dt)e^{i\frac{\pi}{n}}}{1+(-t)^{2n}e^{i\frac{\pi}{n}2n}}=-\int_0^R\frac{\tau^{\frac23}e^{i\frac{5\pi}{3n}}d\tau}{1+\tau^{2n}}$$

Otteniamo

$$I(1-e^{i\frac{5\pi}{3n}})=2\pi i\lim_{z\to z_0}\frac{z^{\frac23}(z-z_0)}{1+z^{2n}}=2\pi i\frac{e^{i\frac23\frac{\pi}{2n}}}{2ne^{i\frac{\pi}{2n}(2n-1)}}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{2n}\left(\sin\frac{5\pi}{6n}\right)^{-1}$$

Per gli esponenti diversi da $1/2$, **si vedano pure i compiti del precedente anno accademico**

Calcoliamo $I\doteq\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$. Procedendo come sopra otteniamo

$$2I=2\pi i\sum\text{Res}\frac{\sqrt{z}}{1+z^4}$$

La funzione $\dfrac{\sqrt{z}}{1+z^4}$ ha quattro poli di ordine 1 nei punti $z_k = e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{2\pi k}{4}}$ $k=0,1,2,3$. In z_0 il residuo

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\sqrt{z}(z-z_0)}{z^4} \underbrace{=}_{l'Hopital} \lim_{z\to z_0} \frac{\sqrt{z}}{4z^3} = \lim_{z\to z_0} \frac{-z^{3/2}}{4} = \frac{-z_0^{3/2}}{4} = -\frac{e^{3i\pi/8}}{4}$$

Poi otteniamo $-\dfrac{e^{9i\pi/8}}{4} = \dfrac{e^{i\pi/8}}{4}$, $-\dfrac{e^{15i\pi/8}}{4} = -\dfrac{e^{-i\pi/8}}{4}$, $-\dfrac{e^{21i\pi/8}}{4} = -\dfrac{e^{5i\pi/8}}{4} = \dfrac{e^{-3i\pi/8}}{4}$. Quindi

$$2I = \frac{2\pi i}{4}\left[e^{i\pi/8} - e^{-i\pi/8} - e^{3i\pi/8} + e^{-3i\pi/8}\right] = \frac{i\pi}{2}\left[2i\mathrm{Im}(e^{i\pi/8}) - 2i\mathrm{Im}(e^{3i\pi/8})\right] =$$
$$= \pi\left[\sin\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right] = 2\pi \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4} = 2\pi\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

In questo caso sarebbe possibile anche usare il cammino di pag.41. Sul semiasse positivo la parametrizzazione è la stessa. Sul semicerchio l'integrale tende a zero. Sul semiasse negativo la parametrizzazione è $\gamma(t) = -te^{i\pi}$ $-R \le t \le 0$ e

$$\int_{-R}^{0} (-dte^{i\pi})\frac{\sqrt{-te^{i\pi}}}{1+(-te^{i\pi})^4} \underbrace{=}_{\tau=-t} \int_{R}^{0} (-d\tau)\frac{\sqrt{\tau}e^{i\pi/2}}{1+\tau^4} = i\int_0^R d\tau \frac{\sqrt{\tau}}{1+\tau^4}$$

Quindi

$$(1+i)I = 2\pi i\left[\mathrm{Res}\frac{\sqrt{z}}{1+z^4}\Big|_{z=z_0} + \mathrm{Res}\frac{\sqrt{z}}{1+z^4}\Big|_{z=z_1}\right] = 2\pi i\left[-\frac{e^{3i\pi/8}}{4} + \frac{e^{i\pi/8}}{4}\right] =$$
$$= 2\pi i\left[\frac{e^{i\pi/8}}{4} - \frac{e^{i\pi/2 - i\pi/8}}{4}\right] = 2\pi i\left[\frac{e^{i\pi/8}}{4} - i\frac{e^{-i\pi/8}}{4}\right] = \frac{\pi i}{2}\left[\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right] =$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{\pi}{8}(i+1) - \sin\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right] = \frac{\pi}{2}\left[\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right](1+i)$$

$$I = \frac{\pi}{2}\left[\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) - \cos\frac{\pi}{8}\right] = \frac{\pi}{2}\left[\sin\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}\right]$$

♠

Calcoliamo $I \doteq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/3}}{(x+1)(1+x^2)^2}dx$. Sulla semicirconferenza grande otteniamo $\gamma(t) = Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{R^{1/3}e^{it/3}Rie^{it}dt}{(1+Re^{it})(1+R^2e^{2it})^2}\right| \le \int_0^\pi \frac{R^{4/3}dt}{(R-1)(R^2-1)^2} \to 0$$

Quindi abbiamo

$$I(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}) = 2\pi i(\mathrm{Res}f(-1) + \mathrm{Res}f(i) + \mathrm{Res}f(-i))$$

$$\text{Res}f(-1) = \lim_{z\to -1} f(z) = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{(1+1)^2}$$

$$\text{Res}f(i) = \lim_{z\to i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z+i)^2} =$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{\frac{1}{3}z^{\frac{-2}{3}}(z+1)(z+i)^2 - z^{\frac{1}{3}}((z+i)^2+2(z+i)(z+1)}{(z+1)^2(z+i)^4} =$$
$$= \lim_{z\to i} \frac{\frac{1}{3}z^{\frac{-2}{3}}(z+1)(z+i) - z^{\frac{1}{3}}((z+i)+2(z+1))}{(z+1)^2(z+i)^3} = \frac{\frac{1}{3}e^{\frac{-i\pi}{3}}(i+1)2i - e^{\frac{i\pi}{6}}(2i+2(i+1)}{(i+1)^2(i+i)^3} =$$
$$= \frac{\frac{1}{3}e^{\frac{-i\pi}{3}}(2i-2) - e^{\frac{i\pi}{6}}(4i+2)}{2i(-8i)} = \frac{\frac{1}{3}e^{\frac{-i\pi}{3}}(2i-2) - e^{\frac{i\pi}{6}}(4i+2)}{16}$$
$$= \frac{\left(\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\right)(i-1) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)(2i+1)}{8} = \frac{-\sqrt{3}}{24} + \frac{5}{48} - i\left(\frac{1}{24}+\frac{5\sqrt{3}}{48}\right)$$

$$\text{Res}f(-i) = \lim_{z\to -i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\frac{z^{\frac{1}{3}}}{(z+1)(z-i)^2} =$$
$$= \lim_{z\to -i} \frac{\frac{1}{3}z^{\frac{-2}{3}}(z+1)(z-i)^2 - z^{\frac{1}{3}}((z-i)^2+2(z+1)(z-i)}{(z+1)^2(z-i)^4} =$$
$$= \lim_{z\to -i} \frac{\frac{1}{3}z^{\frac{-2}{3}}(z+1)(z-i) - z^{\frac{1}{3}}((z-i)+2(z+1))}{(z+1)^2(z-i)^3} = \frac{\frac{1}{3}e^{-i\pi}(-i+1)(-2i) - e^{\frac{i\pi}{2}}(-2i+2(-i+1))}{(1-i)^2(-i-i)^3} =$$
$$= \frac{\frac{2}{3}+i\frac{2}{3}-4-2i}{(-2i)8i} = \frac{-5}{24} - \frac{i}{12}$$

Sommando si ha

$$I(1-e^{\frac{2i\pi}{3}}) = Ie^{\frac{i\pi}{3}}(-2i)\sin\frac{\pi}{3} = 2\pi i\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{4} + \frac{-\sqrt{3}}{24} + \frac{5}{48} - \frac{i}{24} - \frac{5i\sqrt{3}}{48} + \frac{-5}{24} - \frac{i}{12}\right) =$$
$$= \frac{\pi i}{2}e^{\frac{i\pi}{3}} + 2\pi i\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-\sqrt{3}}{12} - \frac{5}{24}\right) = e^{\frac{i\pi}{3}}\left[\frac{\pi i}{2} + \pi i(\frac{-\sqrt{3}}{6} - \frac{5}{12})\right]$$

Quindi $I = \dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi\sqrt{3}}{36}$

♠ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+bx+b^2}dx$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^4+b^4}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+b^4}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+ax+a^2}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+ax+a^2}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)}dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)}dx$,
♠♠

• Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+a^3}$ $(a>0)$ Si adotti lo stesso cammino “a pacman” della lezione precedente e si integri la funzione $\dfrac{z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3}$. Si ottiene

$$-2\pi i\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+a^3} = 2\pi i\sum Res\frac{z\text{Ln}(z)}{z^3+a^3}$$

$z^3 = -a^3$ per $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_1 = ae^{i\pi}$, $z_2 = ae^{i\frac{5}{3}\pi}$. Si ottiene

$$-I = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3} + \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3} + \lim_{z\to z_2} \frac{(z-z_2)z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{Ln}(z_i)}{3z_i} =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\ln a + i\frac{\pi}{3}}{a} e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{\ln a + i\pi}{a} e^{-i\pi} + \frac{\ln a + i\frac{5\pi}{3}}{a} e^{-i\frac{5\pi}{3}}\right] =$$

$$= \frac{\ln a}{3a}\cdot 0 + \frac{1}{3a}\left[\frac{i\pi}{3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - i\pi + \frac{i5\pi}{3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})\right] \implies I = \frac{2}{9a}\pi\sqrt{3}$$

Osservazione Si sarebbe sbagliato prendendo $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

In tale classe di integrali rientrano quelli della forma $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, P, Q polinomi, $Q(x) \neq 0$, e $P(x)/Q(x)$ funzione non pari. Se fosse pari opereremmo $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ e useremmo il cammino di pagina 41 delle dispense di Tauraso.••

♠ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x^3+1)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x+1)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)(x^2+x+1)}$. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(x^2+x+1)}$.
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3+a^3}dx$ $a>0$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+a^2}dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x^3+a^3}dx$ $a>0$
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\ln x}{x^2+a^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\ln x}{x^2+a^2}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\ln x}{(x^2+a^2)^2}dx$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\ln x}{(x^2+a^2)^2}dx$,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\ln x}{x^3+a^3}dx$ $a>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\ln x}{x^3+a^3}dx$ $a>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\ln x}{x^4+a^4}dx$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}\ln x}{x^4+a^4}dx$ ♠♠

75 min. Lezione del 09/11/2020 funzioni complesse (I 30 minuti persi recuperati il 14/11/2020)

Valor principale di un integrale (V.P.) (non presente sulle dispense di Tauraso e non so se è presente nelle videolezioni; ne dubito).

La nozione di V.P. viene da Cauchy ed infatti sono anche detti integrali secondo Cauchy. Conviene partire con l'esempio ($a<0$, $b>0$) $\displaystyle\int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{r\to 0^-}\int_a^r \frac{dx}{x} + \lim_{s\to 0^+}\int_s^b \frac{dx}{x} = -\infty + \infty$ **Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma** e nessuno dei due esiste.

Cambiamo ora prescrizione

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\int_a^{-r} \frac{dx}{x} + \int_r^b \frac{dx}{x}\right) = \lim_{r\to 0^+}(\ln(r) - \ln(-a) + \ln(b) - \ln r) = \ln\frac{b}{|a|}$$

Si pone $s=-r$, si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite e come si vede, risulta un ben preciso valore.

Se invece di $1/x$ si fosse preso $1/|x|$, anche l'integrale con il V.P. non avrebbe dato un risultato finito. Infatti avremmo ottenuto

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\int_a^{-r} \frac{dx}{-x} + \int_r^b \frac{dx}{x}\right) = \lim_{r\to 0^+}(-\ln(r) + \ln(-a) + \ln(b) - \ln r) \xrightarrow[r\to 0^+]{} +\infty$$

La nozione di V.P. si estende anche ad integrali impropri su tutto l'asse reale. Si voglia calcolare ad esempio l'integrale
$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}dx$. La sua definizione è la seguente

$$I=\lim_{B\to-\infty}\int_B^0 f(x)dx+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx$$

Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma .

È facile verificare che sia il primo che il secondo limite tendono a $+\infty$ per cui l'integrale improprio non esiste. Infatti ad esempio il secondo dà

$$\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(A^2+A+1)-\arctan\frac{2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}=+\infty\xrightarrow[A\to+\infty]{}+\infty$$

È inessenziale calcolare il secondo integrale ai fini della verifica dell'esitenza dell'integrale improprio.

Cambiamo prescrizione ed eseguiamo

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^0 f(x)dx+\int_0^A f(x)dx\right)$$

Si pone $B=-A$, si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite

In tal caso si ottiene

$$\frac{-\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\ln(A^2-A+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{-2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln(A^2+A+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2A+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

il cui limite è $-\pi/\sqrt{3}$.

75 min. Lezione del 10/11/2020 funzioni complesse, Trasformata di Laplace

Esercizio

$$J\doteq\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx\doteq I_1+I_2+I_3$$

I_2 non è in realtà un intgrale improprio in quanto $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{x}=a$ ed inoltre

$$\left|\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\right|\le\frac{1}{x^3}$$

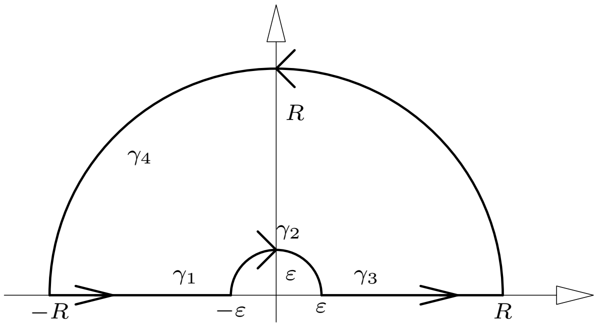
per cui anche I_1 ed I_3 convergono. L'integrale improprio J dunque esiste ma per poterlo calcolare dobbiamo scrivere la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

ed a questo punto l'origine diventa un punto di singolarità per la funzione da cui la necessità di definire l'integrale solo come valor principale ossia

$$VP\ \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

Il cammino su cui integrare è il seguente se $a>0$ e quello opposto (che gira in senso orario) se $a<0$.



Eseguendo gli integrali e prendendo i limiti $\varepsilon\to 0$ $R\to+\infty$, si ottiene

$$\oint_\gamma \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz \xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0} \left(VP\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) - i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0}$$

e quindi

$$\left(VP\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) - i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0} = 2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\right) = 2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib}$$

da cui

$$\left(VP\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right) = 2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib} + i\frac{\pi}{b^2} = i\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

La parte immaginaria è $\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$ ed è il valore dell'integrale cercato. Notare che per $a\to 0$, il risultato tende a zero come ci aspettiamo che sia ponendo $a=0$ nell'integrale originale. Se invece $b\to 0$, il risultato è illimitato come ci si aspetta dal fatto che l'integrale originario diventa un integrale improprio non convergente.

L'esplicitazione dei calcoli lungo le componenti della curva è la seguente

$$\Big|\int_{\gamma_4} f(z)dz\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}(R^2e^{2it}+b^2)}Rie^{it}dt\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaR(\cos t+i\sin t)}}{Re^{it}(R^2e^{2it}+b^2)}Rie^{it}dt\Big| =$$

$$= \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaR\cos t}e^{-aR\sin t}}{(R^2e^{2it}+b^2)}dt\Big| \le \int_0^\pi \frac{|e^{iaR\cos t}e^{-aR\sin t}|}{|R^2e^{2it}+b^2|}dt = \int_0^\pi \frac{|e^{-aR\sin t}|}{|R^2e^{2it}+b^2|}dt \underbrace{\le}_{0\le t\le\pi}$$

$$\le \int_0^\pi \frac{1}{|(R^2e^{2it}+b^2)|}dt \underbrace{\le}_{R>b} \int_0^\pi \frac{1}{|(R^2-b^2)|}dt = \frac{\pi}{R^2-b^2}\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iat}}{t(t^2+a^2)}dt, \qquad \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iat}}{t(t^2+a^2)}dt$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it}(\varepsilon^2e^{i2t}+b^2)}(-i)\varepsilon e^{-it}dt = \int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{(\varepsilon^2e^{i2t}+b^2)}(-i)dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{-i\pi}{b^2}$$

Ove non fosse chiaro, siamo passati da $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$ **a** $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$ **in quanto** $\sin z$ **è illimitata sia nel semipiano superiore che nel semipiano inferiore e quindi ci sarebbe impossibile usare la variabile complessa a meno di scrivere**

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx = VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{2ix(x^2+b^2)}dx - \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-iax}}{2ix(x^2+b^2)}dx$$

e “chiudere” nel semipiano superiore il primo e nel semipiano inferiore il secondo. ••

In generale sia $f(z)$ una funzione tale che esiste ed è finito $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$. Detta $\gamma(t)=z_0+\varepsilon e^{-it}$ $-\pi\le t\le 0$, si ha

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \int_{-\pi}^{0}\frac{f(z_0+\varepsilon e^{-it})}{\varepsilon e^{-it}}(-1)\varepsilon e^{-it}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -i\pi f(z_0)$$

♠ Esercizi sul valor principale. $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x(ax^2+bx+c)}dx$ con $b^2-4ac<0$.

$az^2+bz+c=0$ se e solo se $\displaystyle z_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\doteq\frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $z_1-z_2=i\sqrt{-\Delta}/a$.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{i\pi}{c}+2\pi i Res\Big(\frac{1}{z(az^2+bz+c)}\Big)\Big|_{z=z_1} = \frac{i\pi}{c}+2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z_1(z-z_1)(z-z_2)} = \\
&= \frac{i\pi}{c}+\frac{2\pi i}{a\frac{i\sqrt{-\Delta}}{a}\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}} = \frac{i\pi}{c}+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi}{-b+i\sqrt{-\Delta}} = \frac{i\pi}{c}+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi(-b-i\sqrt{-\Delta})}{4ac} = \\
&= \frac{-\pi b}{\sqrt{4ac-b^2}c}
\end{aligned}$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \mathrm{Im}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx\right) = \pi\frac{a}{|a|},$$

Svolgimento Sia $a>0$. Il cammino è uguale ai precedenti con gli stessi nomi dati alle stesse curve.

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx = \mathrm{Im}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx\right)$$

$$\Big|\int_{\gamma_4} f(z)dz\Big| = \Big|\int_0^\pi \frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}}Rie^{it}dt\Big| = \Big|\int_0^\pi e^{iaR(\cos t+i\sin t)}idt\Big| \le \int_0^\pi e^{-aR\sin t} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt$$

Ora osserviamo che $\sin t\ge(2t)/\pi$ con $0\le t\le\pi/2$ La minorazione segue dalla concavità di $\sin t$ per $0\le t\le \pi/2$ e quindi giace sopra la secante che collega i punti $(0,0)$ con $(\pi/2,1)$. Ne segue

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR\sin t}dt \le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-aR2t}{\pi}}dt = \frac{\pi}{aR}(1-e^{-aR}) \to 0 \ per\ R\to+\infty$$

A lezione ho semplicemente detto: dato il segno di a, (ad esmpio positivo) per stabilire se chiudere sopra o sotto prendiamo $z=iR$ (chiudiamo sopra) e scriviamo $e^{iaz}=e^{-aR}\to 0$. Non ho però eseguito l'integrale lungo γ_4.

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iat}}{t}dt + \int_\varepsilon^R \frac{e^{iat}}{t}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0, R\to+\infty]{} VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iat}}{t}dt$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0} \frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it}}\varepsilon(-i)e^{-it}dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -i\pi$$

Riunendo i contributi abbiamo

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iat}}{t}dt - i\pi = 2\pi i\sum \text{Res} f(z) = 0$$

da cui il risultato prendendo la parte immaginaria.

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx = \pi\frac{1-a}{b^2}+\frac{\pi}{b^2}(e^{-b}-e^{-ab})$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2-x+1)}dx = \pi+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}}\sin\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}(|b|-|a|), \qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x(x^2+bx+b^2)}dx,$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x(x^2-x+1)}dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}e^{\frac{-a\sqrt{3}}{2}}\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{\pi}{3}\right), \quad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x(4a^2x^2-\pi^2)}dx$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)(x^2+1)}dx \qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)}{x^2(x^3+a^3)}dx$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x(4a^2x^2+\pi^2)}dx \qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi x/a)-\sin^2(2\pi x/a)}{x^2(x^3+a^3)}dx$$

Svolgiamo $VP\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}-\sin^2\frac{2\pi x}{a}}{x^2(x^3+a^3)}dx = VP\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}-1+\cos\frac{4\pi x}{a}}{x^2(x^3+a^3)}dx$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\frac{1}{x(x^3+a^3)}dx = i\pi\left[\lim_{x\to 0}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3+a^3}\right]+$$

$$+i\pi\left[\lim_{x\to -a}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\lim_{x\to -a}\frac{1}{x^2+ax+a^2}\right]+2\pi i\text{Res}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\frac{1}{x(x^3+a^3)}\Big|_{z=ae^{i\pi/3}}=$$

$$= i\pi\frac{2\pi i}{a^4}+2\pi i\left(\frac{1}{6a^4}(i\sqrt{3}-1)\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-2\pi^2}{a^4}+\frac{\pi}{3a^4}(-\sqrt{3}-i)\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e l'integrale è $\displaystyle\frac{-\pi^2}{a^4}-\frac{\sqrt{3}\pi}{3a^4}\cosh\frac{\sqrt{3}}{2}$

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Svolgimento (prima maniera) L'integrale improprio converge in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$, e $\displaystyle|\frac{\sin^2 x}{x^2}|\le 1/x^2$

Integriamo per parti

$$\frac{-\sin^2 x}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{x}dx = \pi$$

Seconda maniera Scriviamo

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}dx=VP\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\cos(2x)}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2}dx\right)\right]=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx\right)\right]=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{2i\varepsilon e^{-it}}(-i)\varepsilon e^{-it}}{\varepsilon^2e^{-2it}}dt+\underbrace{\int_0^{+\pi}\frac{e^{2iRe^{it}}}{R^2e^{2it}}Rie^{it}dt}_{\to 0\ per\ R\to+\infty}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{0}\frac{-ie^{it}}{\varepsilon}(1+2i\varepsilon e^{-it}+O(\varepsilon^2))\right]=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\frac{2}{\varepsilon}+2\pi+O(\varepsilon^2)\right)=\pi
\end{aligned}
$$

Nel passaggio dal quinto al sesto uguale si è applicato il teorema dei residui. ♠♠

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$

Svolgimento (prima maniera) Sappiamo che $\sin^3 x=(3\sin x-\sin(3x))/4$ e l'integrale improprio converge per le stesse motivazioni di prima.

$$
VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{x^3}dx=\mathrm{Im}\left(VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{ix}-e^{i3x}}{x^3}dx\right)
$$

Passiamo alla funzione complessa $f(z)=\dfrac{3e^{iz}-e^{i3z}}{z^3}$ e integriamo secondo il cammino di pag.24

$$
\begin{aligned}
&\int_{\gamma_1}f(z)dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}f(t)dt\xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{0}f(x)dx\\
&\int_{\gamma_3}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{R}f(t)dt\xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty}f(x)dx\\
&\int_{\gamma_4}f(z)dz=\int_{0}^{\pi}\frac{3e^{iRe^{it}}-e^{3iRe^{it}}}{R^3e^{3it}}Rie^{it}dt\xrightarrow[R\to+\infty]{}0\\
&\int_{\gamma_2}f(z)dz=\int_{-\pi}^{0}(-i)\varepsilon e^{-it}\frac{3e^{i\varepsilon e^{-it}}-e^{3i\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon^3e^{-3it}}dt=\\
&=\int_{-\pi}^{0}(-i)e^{2it}\frac{3+3i\varepsilon e^{-it}-\frac{3\varepsilon^2}{2}e^{-i2t}-1-i3\varepsilon e^{-it}+\frac{9}{2}\varepsilon^2e^{-2it}+O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2}=-3i\pi+O(\varepsilon)
\end{aligned}
$$

Sappiamo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i}f(z)dz=2\pi i\sum\mathrm{Res}f(z)=0$ e quindi

$$
\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i}f(z)dz=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx-3i=0\implies\mathrm{Im}\left(VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{ix}-e^{i3x}}{x^3}dx\right)=\frac{3\pi}{4}
$$

seconda maniera

Integrando per parti si ha $I=-\frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin^2 x\cos x}{x^2}dx$. L'integrale è uguale a $\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}dx$ ed integrando di nuovo per parti si ottiene
$-\frac{3}{2}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\sin x+3\sin x\cos^2}{x}dx=-\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}+\frac{9}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x-\sin^3 x}{x}dx=$
$=3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\frac{9}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x}dx=(3-\frac{27}{8}+\frac{9}{8})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=$
$\frac{3}{4}\pi$ ♠♠

♠ L'integrale $I\doteq\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^3+1)^2}dx$ svolto a lezione può risolversi pure usando il cammino a pag.46 delle dispense di Tauraso.

$\gamma_1(t)=t$, $0\le t\le R$, $\gamma_2(t)=Re^{it}$ $0\le t\le 2\pi/3$, $\gamma_3(t)=-te^{i2\pi/3}$ $-R\le t\le 0$.

$$\Big|\int_{\gamma_2}f(z)dz\Big|=\Big|\int_0^{2\pi/3}\frac{Rie^{it}}{(R^3e^{i3t}+1)^2}dt\Big|\le\int_0^{2\pi/3}\frac{R}{(|R|^3-1)^2}dt\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$\int_{\gamma_3}f(z)dz=\int_{-R}^{0}\frac{-dte^{i2\pi/3}}{((-te^{i2\pi/3})^3+1)^2}=\int_0^R\frac{-dte^{2i\pi/3}}{(t^3+1)^2}\to\int_0^{+\infty}\frac{-dte^{2i\pi/3}}{(t^3+1)^2}$$

Chiaramente $\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{\gamma_1}f(z)dz=I$ da cui

$$I(1-e^{\frac{2i\pi}{3}})=2\pi i\mathrm{Res}f(e^{\frac{i\pi}{3}})=2\pi i\frac{-2}{9}e^{\frac{i\pi}{3}}\implies I=\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}$$

♠♠

Trasformata di Laplace. Pagine, 1,2,3,4 fino al punto 4) escluso

105 min. Lezione del 12/11/2020 Trasformata di Laplace

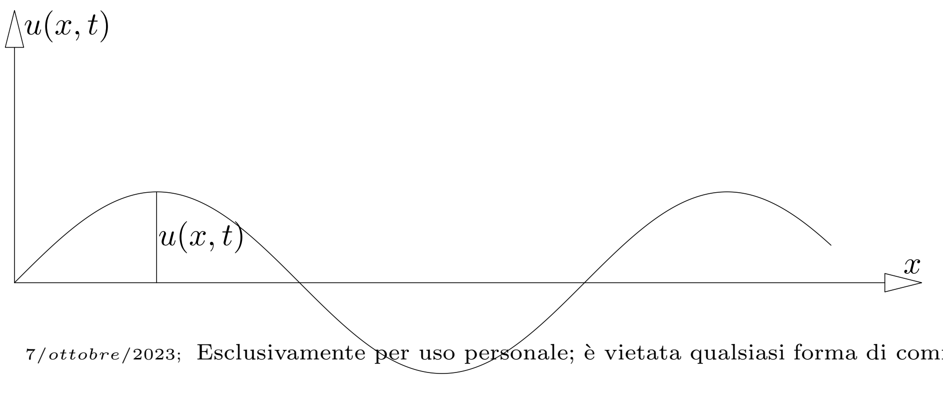
Pag.4 paragrafo 4), pag.5,6,7,8,9,10 dal paragrafo 3, pag.11 fino a "Integrale di Bromwich"

135 min. Lezione del 14/11/2020 (recupero della lezione del 24/9/2020 e dei 30 minuti persi il 10/11/2020) Trasformata di Laplace. Equazioni e sistemi di equazioni differenziali odinarie lineari. Esercizio 21 di Tauraso.

105 min. Lezione del 16/11/2020 Equazione di D'Alembert lineare a coefficienti costanti e termine forzante indipendente da $u(x,t)$.

Risoluzione della seguente equazione alle derivate parziali

- $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & x>0,t>0,a>0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=B\delta(t-T)\end{cases}$



$v(x,p)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}u(x,t)dt \doteq \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p)-u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p)-pu_t(x,0) = p^2v(x,p)$.

$$Be^{-pT} = \mathcal{L}(u_x(0,t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}u_x(x,t)dt\Big|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty} e^{-pt}u(x,t)dt\Big|_{x=0} \stackrel{\rm def}{=} v_x(0,p)$$

per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2v''-p^2v=0 \\ v_x(0,p)=Be^{-pT}\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}} = \alpha e^{\frac{({\rm Re}p+i{\rm Im}p)x}{a}}+\beta e^{-\frac{({\rm Re}p+i{\rm Im}p)x}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\displaystyle\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta=-\dfrac{aB}{p}e^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p) = -aBH(t-T-\dfrac{x}{a})$ che rappresenta uno scalino di ampiezza $-aB$ viaggiante verso destra con velocità a. Dato un punto di ascissa x, per un tempo $t<t_x\stackrel{\rm def}{=}T+\dfrac{x}{a}$ si ha $u(x,t)=0$. Passato t_x si ha $u(x,t)=-aB$. $H(t-t_0)$ è la funzione a scalino in t_0. ●●

Nelle videolezioni viene riportato un secondo modo di trovare $v(x,p)$

Esercizi

♠ a) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=B\delta(t-T)\end{cases}$

$v(x,p)\stackrel{\rm def}{=}\mathcal{L}(u(x,t))$. La variabile x fa da "spettatore" e non viene coinvolta nella trasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = p\mathcal{L}(u(x,t))-u(x,0) = pv(x,p)-u(x,0) = pv(x,p),$$
$$\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p)-pu_t(x,0) = p^2v(x,p)$$

$\mathcal{L}(u(0,t))\stackrel{\rm def}{=}v(0,p) = Be^{-pT}$ per cui rispetto a $v(x,p)$ l'equazione differenziale alle derivate parziali diventa l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} a^2v''-p^2v=0 \\ v(0,p)=Be^{-pT}\end{cases}$$

e la soluzione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\displaystyle\lim_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = Be^{-pT}$ e quindi la soluzione è $v(x,p)=Be^{-pT-\frac{xp}{a}}$. Quindi otteniamo $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = B\delta(t-T-\dfrac{x}{a})$ che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità a. Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

La soluzione del sistema $\begin{cases} a^2v''-p^2v=0 \\ v(0,p)=Be^{-pT}\end{cases}$ può ricercarsi anche attraverso l'uso della trasformata di Laplace. Va osservato però che l'equazione è del secondo ordine ma disponiamo solo della condizione iniziale su $v(0,p)$. La condizione su $v_x(0,p)$ la lasciamo indicata e ce la "giochiamo" al momento giusto. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p)\stackrel{\rm def}{=}h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore"). $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p)-v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p)-sBe^{-pT}-v_x(0,p)$ per cui l'equazione ordinaria diventa

$$a^2s^2h(s,p)-sa^2Be^{-pT}-a^2v_x(0,p)-p^2h(s,p)=0 \implies h(s,p)=\frac{sa^2Be^{-pT}+a^2v_x(0,p)}{a^2s^2-p^2}$$

Facendo l'antitrasformata di Laplace si ottiene

$$v(x,p)=v.p.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}e^{sx}h(x,s)ds=\frac{B}{2}e^{-pT}(e^{\frac{p}{a}x}+e^{-\frac{p}{a}x})+\frac{v_x(0,p)a}{2p}\big(e^{\frac{p}{a}x}-e^{-\frac{p}{a}x}\big)$$

Poiché vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione $|u(x,t)|\le Me^{M't}$ per ogni $x>0$, con costanti M ed M' positive si deve avere $\frac{B}{2}e^{-pT}e^{\frac{p}{a}x}+\frac{v_x(0,p)a}{2p}e^{\frac{p}{a}x}=0$ da cui $v_x(0,p)=-\frac{Bp}{a}e^{-pT}$ e quindi $v(x,p)=Be^{-pT-\frac{p}{a}x}$

b) $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u(0,t)=A\sin(\omega t)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=p^2v(x,p)-A\omega$. $\mathcal{L}(u(0,t))\overset{\text{def}}{=}v(0,p)=\mathcal{L}(A\sin(\omega t))=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases}p^2v(x,p)-A\omega=a^2v''\\ v(0,p)=\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2},\end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. La condizione iniziale impone $\beta=\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{p^2}$. $v(x,p)=(\frac{A\omega}{p^2+\omega^2}-\frac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$.

$u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=AH(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+A\omega t$

Controlliamo che le condizioni iniziali sono verificate dalla soluzione.

$u(x,0)=AH(-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(-\frac{x}{a})-\omega(-\frac{x}{a})\big]=0$ in quanto $H(-\frac{x}{a})=0$ essendo $x>0$ e $a>0$.

$u_t(x,0)=A\delta(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a})-\omega(t-\frac{x}{a})\big]+AH(-\frac{x}{a})\big[\omega\cos\omega(t-\frac{x}{a})-\omega\big]+A\omega=A\omega$ in quanto il primo pezzo si annulla per ogni valore di t il secondo pezzo è nullo per le stesse ragioni di prima.

$u(0,t)=AH(t)\big[\sin\omega t-\omega t\big]+A\omega t=AH(t)\sin\omega t=A\sin(\omega t)$

c) $\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=A\omega,\ u_x(0,t)=B\sin(\omega t)\end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t))=pv(x,p)-u(x,0)=pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p^2v(x,p)-u_t(x,0)=p^2v(x,p)-A\omega$. $\mathcal{L}(u_x(0,t))\overset{\text{def}}{=}v_x(0,p)=\mathcal{L}(B\sin(\omega t))=\frac{B\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases}p^2v(x,p)-A\omega=a^2v''\\ v_x(0,p)=\dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2},\end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\frac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. Di conseguenza si ha $v(x,p)=\frac{A\omega}{p^2}-\frac{B\omega a}{p(p^2+\omega^2)}e^{-x\frac{p}{a}}$ da cui $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=A\omega t-H(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})$

Verifichiamo le condizioni iniziali:

$u(x,0)=H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1+\cos\omega(-\frac{x}{a})=0$

$u_t(x,0)=A\omega-\delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a}))-H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}\sin\omega(-\frac{x}{a})=0$

$u_x(0,t)=\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})+H(t)B\sin\omega t=B\sin(\omega t)$

d) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. $v_x(0,p)=0$ impone $\frac{p}{a}(\alpha-\beta)=0$ e quindi $\beta=0$ da cui $v(x,p)=\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=\dfrac{1}{\omega^2}(t\omega-\sin\omega t)$

e) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=\sin x,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p)\overset{\text{def}}{=}\mathcal{L}(u(x,t))$, $\mathcal{L}(u_t(x,t)=p\mathcal{L}(u(x,t))-u(x,0)=pv(x,p)-\sin x$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t))=p\mathcal{L}(u_t(x,t))-u_t(x,0)=p(pv(x,p)-\sin x)=p^2v(x,p)-p\sin x$, $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t))=(\mathcal{L}(u(x,t)))_{xx}=v_{xx}(x,p)$ $\mathcal{L}(u_x(x,t))=(\mathcal{L}(u(x,t)))_x=v_x(x,p)=\int_0^{+\infty}dte^{-pt}B\delta(t-T)=e^{-pT}$ per cui nella funzione $v(x,p)$ l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria $\begin{cases} p^2v-p\sin x=a^2v_{xx} \\ v_x(0,p)=Be^{-pT} \end{cases}$ che possiamo scrivere anche come

$\begin{cases} p^2v-p\sin x=a^2v'' \\ v'(0,p)=Be^{-pT} \end{cases}$ L'equazione per $v(x,p)$ è del secondo ordine (come per $u(x,t)$) e la condizione iniziale è solo per $v_x(0,p)$. Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo $|u(x,t)|\leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A'. Ciò vuol dire che deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$. Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata di Laplace. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p)\overset{\text{def}}{=}h(s,p)$ (la variabile p "fa sempre da spettatore." $\mathcal{L}(v'(x,p))=sh(s,p)-v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p))=s^2h(s,p)-sv(0,p)-Be^{-pT}$ per cui l'equazione ordinaria diventa $p^2h(s,p)-p\mathcal{L}(\sin x)=a^2s^2h(s,p)-a^2sv(0,p)-a^2Be^{-pT}$ ossia $h(s,p)=\dfrac{p}{(s^2+1)(p^2-a^2s^2)}+\dfrac{-a^2sv(0,p)-a^2Be^{-pT}}{p^2-a^2s^2}$. Antitrasformando si ha $v(s,p)=\dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x+\dfrac{a}{2p^2+2a^2}(e^{-\frac{xp}{a}}-e^{\frac{px}{a}})+\dfrac{v(0,p)}{2}(e^{\frac{px}{a}}+e^{-\frac{px}{a}})+\dfrac{B}{2}(e^{\frac{px}{a}-pT}-e^{-\frac{px}{a}-pT})$. Il limite $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ impone $-\dfrac{a}{p^2+a^2}+v(0,p)+Be^{-pT}=0$ e quindi $v(0,p)=\dfrac{a}{p^2+a^2}-Be^{-pT}$. Dunque si ottiene $v(x,p)=\dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x+\dfrac{a}{2p^2+2a^2}e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{p}{a}x}-Be^{-\frac{p}{a}x-pT}$. Antitrasformando si ha la soluzione $u(x,t)=\sin x\cos at+H(t-\frac{x}{a})\sin(at-x)-aBH(t-\frac{x}{a}-T)$. Verifichiamo le condizioni iniziali. $u(x,0)=\sin x$ chiaramente. $u_t(x,t)=-a\sin x\sin at+\delta(t-\frac{x}{a})\sin(at-x)+aH(t-\frac{x}{a})\cos(at-x)-aB\delta(t-\frac{x}{a}-T)=-a\sin x\sin at+(\sin(at-x))\Big|_{t=x/a}+aH(t-\frac{x}{a})\cos(at-x)-aB\delta(t-\frac{x}{a}-T)=-a\sin x\sin at+aH(t-\frac{x}{a})\cos(at-x)-aB\delta(t-\frac{x}{a}-T)$ e per $t=0$ otteniamo zero. Ora analizziamo $u_x(x,t)=\cos x\cos(at)-\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\sin(at-x)-H(t-\frac{x}{a})\cos(at-x)+B\delta(t-\frac{x}{a}-T)=\cos x\cos(at)-H(t-\frac{x}{a})\cos(at-x)+B\delta(t-\frac{x}{a}-T)$ e per $x=0$ abbiamo $u_x(0,t)=\cos(at)-\cos(at)+B\delta(t-T)$

f) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=A\sin(\lambda t) \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v(0,p)=\dfrac{A\lambda}{\lambda^2+p^2} \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p)=\alpha e^{\frac{px}{a}}+\beta e^{-\frac{px}{a}}+\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)|\le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty}|v(x,p)|=0$ e quindi $\alpha=0$. $v(0,p)=\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}$ impone $v(x,p)=\Big(\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}-\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big)e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t)=\mathcal{L}^{-1}(v(x,p))=H(t-\dfrac{x}{a})\big(A\sin\lambda(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{t}{\omega}\big)-\dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)+\dfrac{t}{\omega}$

g) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x+\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{x}{p}+\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a}{p^4}e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{x}{p^3}+\dfrac{\omega}{p^2(\omega^2+p^2)}$ da cui $u(x,t)=\dfrac{a}{6}(t-\dfrac{x}{a})^3H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{2}xt^2H(t)-\dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)+\dfrac{t}{\omega}$

h) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2-2\dfrac{a}{\omega^3}\Big)H(t-\dfrac{x}{a})+H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{tx}{\omega}-\dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

i) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=x\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=A\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v_x(0,p)=Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}-\dfrac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}$ da cui

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)}+\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}-\frac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\frac{a}{\omega}(t-\frac{x}{a})^2 - 2\frac{a}{\omega^3}\Big)H(t-\frac{x}{a}) + H(t-\frac{x}{a})\frac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\frac{x}{a}) + \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2}\sin(\omega t) - aAH(t-T-\frac{x}{a})$

l) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

m) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\delta(T-t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p) = Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} + Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} + Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \frac{tx}{\omega} - \frac{x}{\omega^2}\sin(\omega t) + A\delta(t-T-\frac{x}{a})$

n) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t + \sin(\omega x) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p} \\ v(0,p) = Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è

$v(x,p) = (\frac{1}{p^4} + \frac{\sin(\omega x)}{p(p^2+a^2\omega^2)}) + e^{-\frac{p}{a}x}(Ae^{-pT} - \frac{1}{p^4})$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) =$$

$$= \frac{t^3}{3} + \frac{\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \frac{1}{2a^2\omega^2}\big(\sin\omega(x+at) + \sin\omega(x-at)\big) - \frac{1}{3}H(t-\frac{x}{a})(t-\frac{x}{a})^3 + A\delta(t-T-\frac{x}{a})$$

o) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t\sin(\omega x) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\sin(\omega x)}{p^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \frac{a\omega}{p^3(p^2+a^2\omega^2)}e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{\sin(\omega x)}{p^2(p^2+a^2\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2a\omega}(t-\frac{x}{a})^2 H(t-\frac{x}{a}) + \frac{1}{a^3\omega^3}\cos\omega(at-x)H(t-\frac{x}{a}) - \frac{1}{a^3\omega^3}H(t-\frac{x}{a}) + \frac{t\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \frac{\sin(\omega x)}{a^3\omega^3}\sin(a\omega t)$

$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=A\sin(\lambda t) \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}-\dfrac{aA\lambda}{p(p^2+\lambda^2)}e^{-\frac{x}{a}p}$

da cui $u(x,t)=V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\dfrac{t}{\omega}-\dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t)-\dfrac{aA}{\lambda}H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{aA}{\lambda}\cos\lambda(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

p) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=-\dfrac{1}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x}+\dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t)=t-(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

q) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t)=t$

r) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-x-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{x}{p^2}-\dfrac{x}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=xt-xtH(t-\dfrac{x}{a})$

s) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p}$ da cui $u(x,t)=H(t)$

t) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=H(t)-H(t-\dfrac{x}{a})$

u) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \qquad t,x>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=H(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-x-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=\dfrac{e^{-pT}}{p} \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x}-\dfrac{a}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x-pT}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t)=\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2H(t-\dfrac{x}{a})-a(t-\dfrac{x}{a}-T)H(t-\dfrac{x}{a}-T)+(1+tx)H(t)$

Verifichiamo che la $u(x,t)$ trovata soddisfi effettivamente l'equazione data e le sue condizioni iniziali. $u_t(x,t)=a(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\delta(t-\dfrac{x}{a})-aH(t-\dfrac{x}{a}-T)-a(t-\dfrac{x}{a}-T)\delta(t-$

$\frac{x}{a}-T)+tH(t)+(1+tx)\delta(t)=a(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a})-aH(t-\frac{x}{a}-T)+xH(t)+1$

$u_{tt}(x,t)=aH(t-\frac{x}{a})+a(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a})+a\delta(t-\frac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\frac{x}{a})+a\delta(t-\frac{x}{a}-T)+x\delta(t)=$ $aH(t-\frac{x}{a})+a(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a})+a\delta(t-\frac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\frac{x}{a})+a\delta(t-\frac{x}{a}-T)$

$u_x(x,t)=-(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2\delta(t-\frac{x}{a})+H(t-\frac{x}{a}-T)+(t-\frac{x}{a}-T)\delta(t-\frac{x}{a}-T)+tH(t)=$ $-(t-\frac{x}{a})H(t-\frac{x}{a})+H(t-\frac{x}{a}-T)+tH(t)$

$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a}(t-\frac{x}{a})\delta(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a}-T)=\frac{1}{a}H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a}-T)$

ed appare evidente che $u_{tt}-a^2u_{xx}\equiv 0$. Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo $u(x,0)=H(0)=1$, $u_t(x,0)=xH(0)=x$, $u_x(0,t)=-tH(t)+H(t-T)+tH(t)=H(t-T)$

v) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=1 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=\frac{1}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}-(\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3})e^{-\frac{p}{a}x}$

da cui $u(x,t)=t-\frac{1}{2}t^2-\Big((t-\frac{x}{a})-\frac{1}{2}(t-\frac{x}{a})^2\Big)H(t-\frac{x}{a})$

w) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=\delta(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-x-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=e^{-pT} \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\frac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x}-\frac{a}{p}e^{-\frac{p}{a}x-pT}+$ $\frac{1}{p}+\frac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t)=\frac{a}{2}(t-\frac{x}{a})^2H(t-\frac{x}{a})-aH(t-\frac{x}{a}-T)+(1+tx)H(t)$

x) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-rt} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\frac{1}{p+r} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e e la soluzione è $v(x,p)=\frac{1}{p^2(p+r)}-$ $\frac{1}{p^2(p+r)}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{t}{r}-\frac{1}{r^2}+\frac{e^{-rt}}{r^2}-(t-\frac{x}{a})\frac{1}{r}H(t-$ $\frac{x}{a})+\frac{1}{r^2}H(t-\frac{x}{a})-\frac{1}{r^2}e^{-r(t-\frac{x}{a})}H(t-\frac{x}{a})$

y) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-rx} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\frac{e^{-rx}}{p} \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\frac{e^{-rx}}{p(p^2-a^2r^2)}-$ $\frac{e^{-px/a}}{p(p^2-a^2r^2)}$ da cui $u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\frac{-e^{-rx}}{a^2r^2}+\frac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)H(t)-$ $\frac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)H(t-\frac{x}{a})+\frac{1}{a^2r^2}H(t-\frac{x}{a})$

z) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t - \dfrac{x}{x_0}) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\cos\dfrac{x}{x_0} - \dfrac{p}{p^2+\omega^2}\sin\dfrac{x}{x_0} \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione

è $v(x,p) = -\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}e^{-px/a} + \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\cos\dfrac{x}{x_0} - \dfrac{p}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\dfrac{x}{x_0}$

Si devono distinguere due casi: 1) $\omega \neq \dfrac{a}{x_0}$ e 2) $\omega = \dfrac{a}{x_0}$.

Cominciamo da 1).

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \Big(\frac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\frac{x_0}{a}\sin\frac{a}{x_0}t\Big)H(t-\frac{x}{a})+$$

$$+\frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\cos\frac{x}{x_0}\sin\omega t - \frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\sin\frac{x}{x_0}\cos(\omega t) + \frac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\frac{x_0}{a}\cos\frac{x}{x_0}\sin\frac{a}{x_0}t - \frac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\frac{x}{x_0}\cos\frac{a}{x_0}t+$$

Ora esaminiamo il caso in cui $\omega = \dfrac{a}{x_0}$.

$$v(x,p) = \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\cos x\frac{\omega}{a} - \frac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\sin x\frac{\omega}{a} - \frac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}e^{-px/a}$$

da cui $u(x,t) = \Big(-\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t) + \dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t)\Big)\cos x\dfrac{\omega}{a} - \dfrac{t}{2\omega}\sin x\dfrac{\omega}{a}\sin(t\omega) + \Big(\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t - \dfrac{x}{a}) - \dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t - \dfrac{x}{a})\Big)H(t-\dfrac{x}{a})$ ♠♠

105 min. Lezione del 17/11/2020 Esercizi sulla Trasformata di Laplace e sugli integrali complessi

105 min. Lezione del 19/11/2020 (Fine delle prime 60 ore di Lezione e quindi della parte di Informatica). Se vogliono, gli studenti del corso di Ingegneria Gestionale Online possono seguire il resto delle lezioni che copriranno parte del loro programma

Esercizi vari. L'ultimo esercizio può trovarsi qui

http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/elettronicaII-II

(cercare soluzioni seco rec.)

- $\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = \dfrac{\pi}{T}\delta(\sin\dfrac{\pi x}{T}) \\ x(0) = a,\ x'(0) = b \end{cases}$ Si dimostri che se $\omega T \neq 2n\pi$ per ogni n intero allora la soluzione è limitata mentre se accade il contrario allora diventa illimitata.

Il sistema diventa $\begin{cases} x''(t) + \omega^2 x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(\delta(x-kT) \\ x(0) = a,\ x'(0) = b \end{cases}$

Al solito si ottiene $X(p) = \dfrac{\mathcal{L}(f) + pa + b}{p^2+\omega^2}$ e $\mathcal{L}(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-pTk} = \dfrac{e^{pT}}{e^{pT}-1}$ e quindi

$$x(t) = \sum_{\pm} Res\Big(\frac{e^{pt}(pa+b)}{p^2+\omega^2} + \frac{e^{p(t+T)}}{(p^2+\omega^2)(e^{pT}-1)}\Big)\Big|_{\pm i\omega} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res\Big(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2+\omega^2)(e^{pT}-1)}\Big)\Big|_{p=i\frac{2k\pi}{T}};$$

$$\sum_{\pm} Res\Big(\frac{e^{pt}(pa+b)}{p^2+\omega^2}\Big)\Big|_{\pm i\omega} = a\cos(\omega t) + \frac{b}{\omega}\sin(\omega t);$$

$$\sum_{\pm} Res\Big(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2+\omega^2)(e^{pT}-1)}\Big)\Big|_{\pm i\omega} = \frac{e^{i\omega(t+T)}}{2i\omega(e^{i\omega T}-1)} - \frac{e^{-i\omega(t+T)}}{2i\omega(e^{-i\omega T}-1)} = \frac{-\cos(\omega(t+T/2))}{2\omega\sin(\omega T/2)}$$

$\lim\limits_{p\to p_k} \dfrac{p-p_k}{e^{pT}-1} = \dfrac{1}{T}$ e quindi $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} Res\Big(\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2+\omega^2)(e^{pT}-1)}\Big)\Big|_{p=i\frac{2k\pi}{T}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{Te^{2k\pi i\frac{t}{T}}}{(\omega T)^2-(2k\pi)^2}$ e la serie è assolutamente convergente. La serie stessa è anche pari a $\displaystyle\frac{1}{\omega^2 T} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2T\cos 2k\pi\frac{t}{T}}{(\omega T)^2-(2k\pi)^2}$.

La soluzione è la somma dei tre contributi

Si faccia attenzione al cammino di integrazione con cui chiudere l'integrale

$x(t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp\frac{e^{p(t+T)}}{(p^2+\omega^2)(e^{pT}-1)}$. Infatti le singolarità dell'integrando si trovano sull'asse immaginario ma non sono limitate né dall'alto né dal basso. Si prende allora una successione di cammini di integrazione siffatti:

$\gamma_k^1(t) = it$ per $-\dfrac{\pi}{T}(2k+1) \le t \le \dfrac{\pi}{T}(2k+1)$ e $\gamma_k^2(t) = \sqrt{a_0^2 + (\dfrac{\pi}{T})^2(2k+1)^2}e^{i\varphi}$ con $\arctan\dfrac{\pi}{T}\dfrac{2k+1}{a_0} \le \varphi \le 2\pi - \arctan\dfrac{\pi}{T}\dfrac{2k+1}{a_0}$

105 min. Lezione del 23/11/2020 Dal libro Fusco N., Marcellini P., Sbordone C. “Elementi di Analisi Matematica (versione semplificata per i nuovi corsi di laurea) (Liguori Editore, ristampa del 2006).

Da pag.71 a pag.81 senza le dimostrazioni.

105 min. Lezione del 24/11/2020 Da pag.265 a pag.269

105 min. Lezione del 26/11/2020 Da pag.270 a pag.283 fino al paragrafo 57 escluso. Pag.287–296 fino al paragrafo 60 escluso

Introduzione

La funzione $z = x + y$, $x, y \in \mathbf{R}^2$ non ammette punti critici e quindi non ammette né massimo né minimo (fatto peraltro intuibile osservando che $z = x + y$ definisce un piano inclinato).

Ora prendiamo la funzione $z = x+y$ e imponiamo che $x^2+y^2 = 1$ (chiamiamo C la circonferenza unitaria). A differenza di $\mathbf{R}^2$ che è chiuso ma non limitato, C è compatto e quindi la funzione $f(x, y) = x + y$, essendo continua, ammette sia massimo che minimo (teorema di Weierstrass).

Il gradiente della funzione $z = x + y$ non si può fare in quanto se (x_0, y_0) è tale che $x_0^2 + y_0^2 = 1$, non altrettanto di può dire di $(x_0 + h, x_0)$ oppure $(x_0, y_0 + h)$.

Poniamo allora $(x, y) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ e deriviamo.

Si ha che il punto $(1, 1)/\sqrt{2}$ è un massimo mentre $(-1, -1)/\sqrt{2}$ è un minimo e in tali punti si ha ∂f è parallelo al gradiente della funzione $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

• Trovare massimi e minimi della funzione $z = f(x, y) = y(x^2 + 5/4)$ con (x, y) soggetti alla condizione $x^2 + y^2 = 1$.

Prima soluzione Sia $C = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$. Un modo di procedere consiste nel parametrizzare la curva $x^2 + y^2 = 1$ con $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ e quindi $f\Big|_C = \sin t(\dfrac{5}{4} + \cos^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Derivando rispetto a t si può notare che $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(0, -1)$ sono massimi mentre $(0, 1)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ e $(1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/2)$ sono minimi.

Inoltre $f(\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$, $f(0,-1) = -5/4$, $f(0,1) = 5/4$. I punti $(1/2,\pm\sqrt{3}/2)$ sono massimi assoluti mentre $(-1/2,\pm\sqrt{3}/2)$ minimi assoluti. Gli altri sono estremi relativi.

Si può notare pure, fatto assai importante, che in ciascuno dei punti indicati si ha $\underline{\partial} f(\underline{\gamma})\cdot\underline{\gamma}' = 0$ *e* $\underline{\gamma}\cdot\underline{\gamma}' = 0$ *(fatto quest'ultimo vero per ogni t ma riguardante la circonferenza in modo specifico).*

Il gradiente di $g(x,y) = x^2+y^2-1$ è $(2x,2y) = 2(\gamma_1,\gamma_2)$ e quindi nei punti di massimo e minimo locali vincolati si ha $\underline{\partial} f(\underline{x}_0)$ parallelo al gradiente del vincolo $g(x,y)$ purché $\underline{\gamma}'(t)\neq 0$ in quel punto.

Seconda soluzione Si estrae $x^2 = 1-y^2$ dal vincolo e si ottiene $f(x,y) = y(1-y^2+5/4) = -y^3+9y/4 \doteq h(y)$ con $|y|\leq 1$.

$$h'(y) = -3y^2+9/4 \geq 0 \iff |y| \leq 3/4$$

e quindi per $y = -\sqrt{3}/2$ abbiamo un minimo ed un massimo a $y = \sqrt{3}/2$. I punti $(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2)$ sono minimi mentre $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$ sono massimi. Agli estremi abbiamo $h(-1,0) = -5/4$ mentre $h(1,0) = 5/4$

$\boxed{\text{Notare che la funzione non vincolata } f(x,y) = y(x^2+5/4) \text{ non ammette punti critici.}}$ ••

Il problema appena studiato è molto particolare in quanto consente o di parametrizzare completamente il vincolo (prima soluzione) o di estrarre una delle due variabili ed inserirla nella seconda (seconda soluzione). In generale non è possibile né l'una né l'altra ma è necessario passare attraverso il teorema delle funzioni implicite.

Supponiamo di voler trovare gli estremi della funzione $f(x,y,z)$ vincolata a $g(x,y,z) = 0$. Supponiamo che $\underline{\partial} g(\underline{x}^0)\neq \underline{0}$ e quindi $g_z(\underline{x}^0)\neq 0$ (ad esempio). Allora dal teorema delle funzioni implicite si ha $g(x,y,h(x,y))\equiv 0$ per $\|(x,y)-(x^0,y^0)\| < \delta$. La funzione ristretta al vincolo diventa $f(x,y,h(x,y))$ e in questo caso (x,y) non sono vincolate. Ne segue che se cerchiamo i punti di estremo dobbiamo eseguire il gradiente

$$f_x + f_z h_x = 0, \quad f_y + f_z h_y = 0, \quad h_x = -\frac{g_x(x,h)}{g_z(x,y)} \quad h_y = -\frac{g_y(x,h)}{g_z(x,y)}$$

e quindi

$$f_x - \frac{f_z(x,h)}{g_z(x,y)} h_x(x,h) = 0, \qquad f_y - \frac{f_z(x,h)}{g_z(x,y)} h_y(x,h) = 0$$

Se chiamiamo $\lambda = f_z(x,h)/g_z(x,y)$ possimo dire che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \lambda\underline{\partial} g(\underline{x})$.

Se ne ricava l'ipotesi che in generale, nei punti critici vincolati, si ha $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \lambda\underline{\partial} g(\underline{x})$. Costruiamo quindi la funzione $F(\underline{x},\lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ e cerchiamo di risolvere il sistema

$$F_{x_i}(\underline{x}) = f_{x_i}(\underline{x}) - \lambda g_{x_i}(\underline{x}) = 0 \quad F_\lambda(\underline{x}) = -g(\underline{x}) = 0$$

Una volta trovato un punto $\underline{x}_0$ $\boxed{\text{bisogna verificare che } \underline{\partial} g(\underline{x}_0)\neq \underline{0}}$. Tali punti sono detti *regolari*. Si tenga presente che il massimo o il minimo (vincolati), possono presentarsi anche in punti irregolari dove i moltiplicatori di Lagrange non sono applicabili. Si veda a tal punto l'esempio 3 a pag.292 del libro di testo

Il seguente teorema dà condizioni sufficienti, non necessarie, perché un punto critico vincolato si di massimo, di minimo oppure una sella.

Teorema *Siano* $f, g\colon X \to$, $\overset{\circ}{X} \subset \mathbf{R}^n$ *di classe* C^2. *Se la forma quadratica*

$\sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\underline{x}_0) - \lambda^o g_{x_i x_j}(\underline{x}_0)]h_i h_j = (\underline{h}, H(\underline{x}_0)\underline{h})$, *ristretta all'insieme dei vettori* $\underline{h}$ *tangenziali al vincolo in* $\underline{x}_0$ *ossia* $(\underline{\partial} g(\underline{x}_0), \underline{h}) = 0$, *è definita negativa (positiva) allora* $\underline{x}_0$ *è punto di massimo (minimo) forte vincolato della funzione* $f(\underline{x})$ *alla condizione* $g(\underline{x}) = 0$. *Se esistono* $\underline{h}_1$, *e* $\underline{h}_2$ *tali che* $(\underline{h}_1, H(\underline{x}_0)\underline{h}_1) > 0$, *e* $(\underline{h}_2, H(\underline{x}_0)\underline{h}_2) < 0$, *allora* $\underline{x}_0$ *è di sella*

• Trovare massimi e minimi della funzione $z = f(x, y) = x + y$ con $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$. ••

♠ **Esercizi**

Data la funzione $f(x, y) = x^2 y + xy^2 + xy$, si trovino i valori di massimo e di minimo soggetti alla condizione $\{xy \geq \frac{1}{16},\ y \geq -x - 1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y) = xy$ soggetti alla condizione $x^2 + y^2 = 1$

Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ soggetti alla condizione $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sia data la funzione $f(x, y) = y^2$. Trovare massimi e minimi locali di $f(x, y)$ con (x, y) soggette alla condizione $x^4 + yx^2 - y^2 + 243 = 0$ e stabilirne la natura Si veda qui, compito del primo luglio http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15.html

Si stabilisca la natura dei punti critici della funzione $f(z, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ soggetta alla condizione $xy + xz + yz = 1$.

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x, y) = x$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto (1/4,−1/8) è di massimo assoluto]

Osservazione Ad un certo punto a lezione ho scritto $1 = \lambda(y + 12y)$ invece di $1 + \lambda(y + 12y^2)$ e ciò ha implicato che $\lambda = -13/8$ invece di $\lambda = 16$. In tal modo avrei ottenuto $-16b^2$ invece di $8b^2/13$ e il punto sarebbe stato di massimo. Si dimostri che tale massimo è assoluto.

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x, y) = x + y$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto (2/9,−2/27) è di minimo locale]

Si trovino i punti critici e loro caratterizzazione della funzione $u = f(x, y, z) = z$ soggetta al vincolo $(x + 3y^2)e^{xz} - 1 = 0$. Risultato. Il punto $(e, 0, -e^{-1})$ è una sella.

Si dimostri che $(e, 1, 1)$ è un punto critico della funzione $u = f(x, y, z) = x$ soggetta al vincolo $x + y + z - \ln x - \ln y - \ln z = e + 1$. Si verifichi che è un massimo locale (non globale) ♠♠

105 min. Lezione del 28/11/2020 Estremi vincolati, esercizi

• Siano $x, y, z \geq 0$ e $x+y+z = 1$. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$, $a, b, c > 0$. ••

Teorema *Sia data la funzione reale* $f \in C^1(E)$ $E = \overset{o}{E} \subseteq \mathbf{R}^n$. *Siano dati m vincoli differenziabili* $g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0$ $k = 1, \ldots, m < n$, $g_k : U = \overset{o}{U} \to \mathbf{R}$ e $U_0 = \{\underline{x} \in U : \underline{g}(\underline{x}) = 0\}$. $\underline{y} \in U_0$ *è un punto regolare ossia supponiamo che la matrice* $\underline{\partial} \underline{g} = \begin{pmatrix} (g_1)_{x_1} & (g_1)_{x_2} & \cdots & (g_1)_{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ (g_m)_{x_1} & (g_m)_{x_2} & \cdots & (g_m)_{x_n} \end{pmatrix}$ *abbia rango massimo m. Allora* $\underline{y}$ *è un punto critico di* $f(\underline{x})$ *ristretta agli m vincoli se esiste una m–pla di numeri reali* $\underline{\lambda}_0 \in \mathbf{R}^m$ *tale che* $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_0 \underline{g}_{\underline{x}}$ (6.2) ossia $f_{\underline{x}} - \lambda_1 (g_1)_{\underline{x}} - \lambda_2 (g_2)_{\underline{x}} - \ldots - \lambda_m (g_m)_{\underline{x}} = \underline{0}$ ••

• **Esercizio** Sull'insieme $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 : x = z^2,\ y = z^2\}$ trovare il punto $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ più vicino al punto $(0, 0, 1)$.

(6.2) Nella relazione $f_{\underline{x}} = \underline{\lambda}_0 \underline{g}_{\underline{x}}$ i due vettori $f_{\underline{x}}$ e $\underline{\lambda}_0$ sono vettori riga.

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0,0,1)$ e quindi la funzione $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x})=x-z^2=0$, $\phi_2(\underline{x})=x-z^2=0$. La funzione da estremizzare è

$$L(\underline{x},\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+(z-1)^2-\lambda_1(x-z^2)-\lambda_2(x-z^2)$$

Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix}1 & 0 & -2z\\ 0 & 1 & -2z\end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due e quindi non esistono punti critici **non regolari.** A questo punto risolviamo il sistema

$$\begin{cases}\underline{\partial}(f(\underline{x})-\lambda_1\phi_1(\underline{x})-\lambda_2\phi_2(\underline{x})=0\\ \phi_1(\underline{x})=0, \quad \phi_2(\underline{x})=0\end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases}2x-\lambda_1=0, \qquad 2y-\lambda_2=0, \quad 2(z-1)+2z\lambda_1+2z\lambda_2=0\\ x=z^2, \quad y=z^2\end{cases}$$

$$x=\frac{\lambda_1}{2}, \quad y=\frac{\lambda_2}{2}, \quad z=\frac{1}{1+\lambda_1+\lambda_2} \quad x=y=z^2, \quad \Longrightarrow \lambda_1=\lambda_2, \quad \frac{\lambda_1}{2}=\frac{1}{(1+2\lambda_1)^2}$$

Ne segue $\lambda_1=1/2$ da cui $(x,y,z)=(\frac14,\frac14,\frac12)$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -2z\\ 0 & 1 & -2z\end{pmatrix}\Big|_{(\frac14,\frac14,\frac12)}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Longrightarrow a=b=c$$

La matrice hessiana da studiare è

$$\big(L_{\underline{xx}}-\lambda_1(\varphi_1)_{\underline{xx}}-\lambda_2(\varphi_2)_{\underline{xx}}\big)_{(\lambda_1=\lambda_2=1/2,\,(1/4,1/4,1/2)}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\doteq M$$

e $(a,a,a)\cdot M(a,a,a)=8a^2>0$ quindi un minimo che è assoluto●●

Soluzione alternativa Scrivere

$$x^2+y^2+(z-1)^2=2z^4+(z-1)^2\doteq f(z), \qquad f'(z)=8z^3+2(z-1)=(z-\frac12)(8z^2+4z+4)\geq 0 \iff z\geq 1/2$$

e quindi $z=1/2$ è un minimo da cui $f(1/2)=3/4$. Inoltre $\lim\limits_{z\to\pm\infty}f(z)=+\infty$ per cui $z=1/2$ corrisponde a un minimo assoluto.

♠ **Esercizio** Sull'insieme $S=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon y=x^2,\ z=x^2\}$ trovare il punto $\underline{x}^0=(x^0,y^0,z^0)$ più vicino al punto $(0,0,1)$.

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0,0,1)$ e quindi la funzione $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x})=y-x^2=0$, $\phi_2(\underline{x})=z-x^2=0$. La funzione da estremizzare è

$$L(\underline{x},\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2+(z-1)^2-\lambda_1(y-x^2)-\lambda_2(z-x^2)$$

Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix}-2x & 1 & 0\\ -2x & 0 & 1\end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due e quindi non esistono punti critici **non regolari.** A questo punto risolviamo il sistema

$$\begin{cases}\underline{\partial}(f(\underline{x})-\lambda_1\phi_1(\underline{x})-\lambda_2\phi_2(\underline{x})=0\\ \phi_1(\underline{x})=0, \quad \phi_2(\underline{x})=0\end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} 2x(1+\lambda_1+\lambda_2)=0, \quad 2y-\lambda_1=0, \quad 2(z-1)-\lambda_2=0 \\ y=x^2, \quad z=x^2 \end{cases}$$
Si ottengono tre punti $P_1=(0,0,0)$, $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$; $P_\pm=(\pm\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, $\lambda_1=\frac{1}{2}$, $\lambda_2=-\frac{3}{2}$. Stabiliamo la natura dei punti critici. La tangenzialità dello spostamento è data da $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque si ha $\begin{cases} -2ax+b=0 \\ -2ax+c=0 \end{cases}$ che per ogni x implica $b=c$; inoltre calcolata per $x=0$ dà $b=c=0$ e $a\neq 0$.

La matrice hessiana da studiare è $\begin{pmatrix} 2+2\lambda_1+2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e nel caso del punto $(0,0,0)$ bisogna individuare il segno della forma quadratica

$(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=2(2b^2-a^2)=-2a^2<0$ per cui è un massimo relativo.

Nel caso dei punti $P_\pm$ abbiamo che la relazione di tangenzialità implica che $b=c\neq 0$ per cui

$(a \quad b \quad c)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}=b^2>0$ da cui un minimo relativo.

Il massimo trovato non è certamente assoluto in quanto in S esistono chiaramente infiniti punti che distano da $(0,0,1)$ più di quanto disti $(0,0,0)$ ossia 1. Per dimostrare che i due punti di minimo sono assoluti, poniamo $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq r$ con $r>2$ e indichiamo $S_r=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon y=x^2, z=x^2, \|\underline{x}\|\leq r\}$ per compattezza e grazie al teorema di Weierstrass, massimo e minimo assoluti esistono esistono e i due punti $P_\pm$ sono certamente di minimo relativo. Dobbiamo analizzare la distanza fra $(0,0,1)$ e il bordo di S_r. Essendo tale distanza superiore a quella fra $(0,0,1)$ e $P_\pm$ possiamo dire che $P_\pm$ sono punti di minimo assoluti e rimangono tali se si passa all'insieme S

Anche qui si poteva agire nel seguente modo

$$x^2+y^2+(z-1)^2=x^2+x^4+(x^2-1)^2=2x^4-x^2+1\doteq f(x), \qquad f'(x)=8x^3-2x\geq 0$$
$$\iff \quad -1/2\leq x\leq 0, x\geq 1/2$$

Inoltre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ e quindi i minimi sono assoluti ma il massimo no ♠♠

♠ Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z=f(x,y)=y$ soggetta al vincolo $x^3+xy+y^2=0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura.

Svolgimento Innanzitutto ossrviamo che per ogni $y_0\in\mathbf{R}$, l'equazione $x^3+xy_0+y_0^2=0$ ha soluzione in x. Ciò accade in quanto $h(x)=x^3+ax+a^2$ va da $-\infty$ a $+\infty$ ed è continua per cui interseca l'asse delle ordinate. Ciò implica che la funzione $f(x,y)=y$ non ammette né massimo né minimo assoluto. Per cercare i massimi e minimi locali formiamo la funzione $F(x,y,\lambda)=y-\lambda(x^3+xy+y^2)$ e risolviamo il sistema

$$F_x=0, \qquad F_y=0, \qquad F_\lambda=0$$

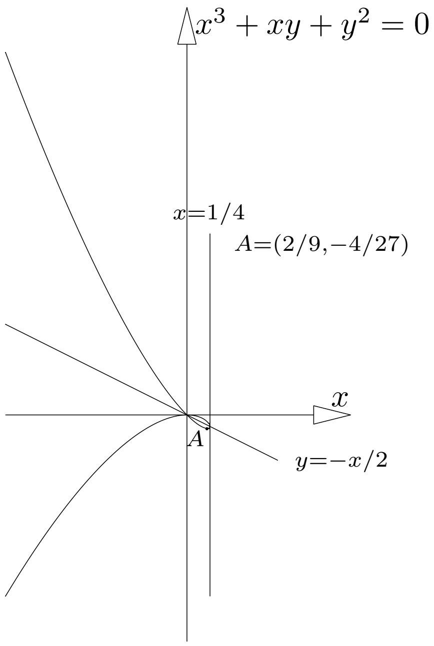
e viene fuori che $x_0=2/9$, $y_0=-4/27$, $\lambda_0=-27/2$. Per saperne di più usiamo il teorema sopra e costruiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Big|_{\underline{x}_0,\lambda_0}=\frac{27}{2}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\doteq A$$

Il gradiente di $x^3 + xy + y^2$ è $(3x^2 + y, x + 2y)$ e calcolato in $\underline{x}_0$ dà $(0, -2/27)$. La relazione $(0, -2/27) \cdot (a, b) = 0$ comporta $b = 0$ per cui dobbiamo studiare la forma quadratica $(\underline{v}, A\underline{v})$ dove $\underline{v}$ è un vettore del tipo $(a, 0)$ con $a \in \mathbf{R}$. Si ottiene $(\underline{v}, A\underline{v}) = 54a^2/3 > 0$ per ogni a non nulla. Ne segue che il punto $\underline{x}_0$ è di minimo vincolato.

Si poteva pure rispondere tracciando il grafico della funzione di y definita da $x^3 + xy + y^2 = 0$ e ritrovare le conclusioni del primio esercizio. Si scrive

$$y = \frac{-x \pm |x|\sqrt{1-4x}}{2}$$



♠♠

Nozione di rotore di un campo vettoriale e di forma chiusa in $\mathbf{R}^3$.

Nozione di curva in $\mathbf{R}^3$, forme differenziali in $\mathbf{R}^3$, nozione di rotore di un campo vettoriale, forme chiuse, esatte, chiuse su un semplicemente connesso.

Teorema *Sia $A \subseteq \mathbf{R}^3$ aperto e connesso e sia $\omega(\underline{x}) = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy + c(\underline{x})dz$ una forma tale che $a, b, c \in C^1(A)$. Allora la forma è esatta se e solo se l'integrale su ogni curva chiusa regolare, semplice è nullo.*

Il Teorema 3 a pag.17 delle dispense di Tauraso sugli integrali curvilinei dimostra lo stesso risultato per forme differenziali sul piano. La esattezza vuol dire che esiste una funzione $f \in C^1(A)$ tale che $\underline{\partial} f = (a, b, c)$.

105 min. Lezione del 30/11/2020 Teoria ed esercizi sulle forme in $\mathbf{R}^3$

n Condizioni sufficienti perché un punto critico di una funzione differenziabile in $\mathbf{R}^n$ con $n > 2$ sia massimo oppure minimo.

• Funzione potenziale per forme chiuse definite in $\mathbf{R}^3$ oppure parallelepipedi

Quindi data una forma ω chiusa in $\mathbf{R}^2$ oppure $\mathbf{R}^3$ definita su di un semplicemente connesso possiamo trovare una funzione (detta anche *funzione potenziale*) $f(\underline{x})$ tale che $\omega = df$. Procedendo come nel Teorema 8.2 sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva tale che $\underline{\gamma}(a) = \underline{x}_o$ e $\underline{\gamma}(b) = \underline{x}$. $\underline{\gamma}(t) \in E$ per ogni t. Come funzione $f(\underline{x})$ basta prendere $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}} \omega$. Ai fini del calcolo però conviene prendere la curva che rende l'integrale il più semplice possibile e ciò dipende dalla struttura di E. Se ad esempio

$E=\mathbf{R}^3$ e $\omega=\sum_{i=1}^{3} a_i(\underline{x})dx_i$ allora una possibile curva regolare a tratti è : $\underline{\gamma}_1(t)=(t,y_o,z_o)$, $x_o\le t\le x$, $\underline{\gamma}_2(t)=(x,t,z_o)$, $y_o\le t\le y$, $\underline{\gamma}_3(t)=(x,y,t)$, $z_o\le t\le z$.

$$f(\underline{x})\overset{\text{def}}{=}\int_{\underline{\gamma}}\omega=\int_{\underline{\gamma}_1}\omega+\int_{\underline{\gamma}_2}\omega+\int_{\underline{\gamma}_3}\omega=\int_{x_o}^{x}dta_1(t,y_o,z_o)+\int_{y_o}^{y}dta_2(x,t,z_o)+\int_{z_o}^{z}dta_3(x,y,t).$$

Esercizio Si verifichi che $\partial f(\underline{x})=\omega(\underline{x})$.

$$f_x=a_1(x,y_o,z_o)+\int_{y_o}^{y}\frac{\partial a_2}{\partial x}(x,t,z_o)dt+\int_{z_o}^{z}\frac{\partial a_3}{\partial x}(x,y,t)dt\quad\underbrace{=}_{\text{usando la chiusura}}$$
$$=a_1(x,y_o,z_o)+\int_{y_o}^{y}\frac{\partial a_1}{\partial t}(x,t,z_o)dt+\int_{z_o}^{z}\frac{\partial a_1}{\partial t}(x,y,t)dt$$
$$=a_1(x,y_o,z_o)+a_1(x,y,z_o)-a_1(x,y_o,z_o)+a_1(x,y,z)-a_1(x,y,z_o)=a_1(x,y,z)$$

$$f_y=a_2(x,y,z_0)+\int_{z_0}^{z}dt\frac{\partial a_3}{\partial y}(x,y,t)=a_2(x,y,z_0)+\int_{z_0}^{z}dt\frac{\partial a_2}{\partial z}(x,y,t)=$$
$$=a_2(x,y,z_0)+a_2(x,y,z)-a_2(x,y,z_0)=a_2(x,y,z)$$

Si può trovare la funzione potenziale anche nel seguente modo. Indichiamo con $g(\underline{x})$ la funzione potenziale.

Si risolve la equazione $g_x(\underline{x})=a_1(\underline{x})$ e quindi $g(\underline{x})=\int_{x_0}^{x}dta_1(t,y,z)+q(y,z)$. Si ottiene

$$g_y(\underline{x})=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial a_1}{\partial y}(t,y,z)+q_y(y,z)\quad\underbrace{=}_{\text{usando la chiusura}}\quad\int_{x_0}^{x}\frac{\partial a_2}{\partial x}(t,y,z)dt+q_y(y,z)\quad\underbrace{=}_{\text{integrando}}$$
$$=a_2(x,y,z)-a_2(x_0,y,z,)+q_y(y,z)=a_2(x,y,x)$$

e quindi $q_y(y,z)=a_2(x_0,y,z)$. Una ulteriore integrazione dà $q(y,z)=\int_{y_0}^{y}dsa_2(x_0,s,z)+p(z)$. A questo punto la funzione potenziale è

$$g(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}dta_1(t,y,z)+\int_{y_0}^{y}dsa_2(x_0,s,z)+p(z).$$

L'ultima derivazione dà

$$g_z(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}dt\frac{\partial a_1}{\partial z}(t,y,z)+\int_{y_0}^{y}ds\frac{\partial a_2}{\partial z}(x_0,s,z)+p_z(z).$$

ed usando sempre la chiusura si perviene a

$$g_z(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial a_3}{\partial x}(t,y,z)dt+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial a_3}{\partial y}(x_0,s,z)ds+p_z=a_3(x,y,z).$$

ossia

$$g_z(x,y,z)=a_3(x,y,z)-a_3(x_o,y,z)+a_3(x_o,y,z)-a_3(x_o,y_o,z)+p_z=a_3(x,y,z)$$

Integrando si ha $p_z(z) = a_3(x_0, y_0, z)$ e quindi $p(z) = c+\int_{z_0}^{z} dua_3(x_0, y_0, u)$ e quindi la funzione potenziale è $g(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} dta_1(t, y, z) + \int_{y_0}^{y} dsa_2(x_0, s, z) + \int_{z_0}^{z} dua_3(x_0, y_0, u) + c$

Ogni altra funzione potenziale differisce dalla precedente per una costante. Infatti

Esercizio Si dimostri che la funzione appena scritta è uguale alla precedente a meno di una costante.

Ci basta far vedere che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \underline{\partial} g(\underline{x})$ e ciò è chiaramente vero. ••

• **Esercizio** Sia C l'insieme dato dall'intersezione della sfera $x^2 + y^2 + z^2 \le a^2$ e il piano $x + y + z = 0$. Sia data la forma differenziale $\omega = ydx + zdy + xdz$. ∂C è percorso in modo tale che la sua proiezione sul piano (x, y) sia percorsa in senso antiorario. Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$.

Prima soluzione Risolvendo il sistema delle due superfici ed eliminando z si ha $2x^2+2y^2+2xy = a^2$ ossia la proiezione sul piano (x, y) della curva che sta in $\mathbf{R}^3$.

$$\omega = d(xy) - xdy + zdy + x(-dx - dy) = d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - 2xdy + dy(-x - y) =$$
$$= -3xdy + d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - \frac{1}{2}d(y^2)$$

$d(f(\underline{x})) = \frac{\partial f}{\partial x} f(\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} f(\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial z} f(\underline{x})$ ed è chiaramente una forma differenziale esatta. Quindi $\int_{\partial^+ C} \omega = -3 \int_{\partial^+ C} xdy$ e dal Lemma di Gauss-Green, $\int_{\partial^+ C} xdy$ è l'area della proiezione sul piano (x, y) del disco contenuto all'interno della circonferenza equatoriale. L'area ha il segno + se la proiezione della circonferenza è percorsa in senso antiorario. La proiezione di tale circonferenza è l'ellisse $2x^2 + 2y^2 + 2xy = a^2$. Con la trasformazione di coordinate $\begin{cases} x = (-\xi + \eta)/\sqrt{2} \\ y = (\xi + \eta)/\sqrt{2} \end{cases}$ l'ellisse diventa $\xi^2 + 3\eta^2 = a^2$ ossia $\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2} = 1$ che può essere parametrizzata come $\xi = a \sin t$, $\eta = \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t$ mentre la curva $\partial^+ C \in \mathbf{R}^3$ è $(\xi, \eta, z) = (\xi, \eta, -\sqrt{2}\xi) = (a \sin t, \frac{a}{\sqrt{3}} \cos t, -\sqrt{2}a \sin t)$ $(z = -x - y)$. L'area della proiezione è $\pi \frac{a^2}{\sqrt{3}}$ e quindi $\int_{\partial^+ C} \omega = -\sqrt{3}\pi a^2$. Più dettagliatamente $\iint_{2x^2+2y^2+2xy \le a^2} dxdy = \iint_{\xi^2+3\eta^2 \le a^2} |J| d\xi d\eta = \iint_{\xi^2+3\eta^2 \le a^2} d\xi d\eta$ che è l'area dell'ellisse data nelle variabili (ξ, η). ••

Seconda soluzione Eseguiamo l'integrale curvilineo sempre tenendo conto dei contributi alla forma differenziale che possono essere ricondotti a forme esatte. Con il cambio di coordinate $((\xi, \eta) \to (x, y))$ scritto sopra abbiamo

$$\omega = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \frac{d\eta - d\xi}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}\right) \frac{d\xi + d\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\eta - \xi}{\sqrt{2}} d\Bigg(\underbrace{-\frac{-\xi + \eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}}_{z=-x-y}\Bigg) =$$

Osserviamo che $\xi d(\xi) = d(\xi^2)/2$ (così per η) e quindi l'integrale su una curva chiusa è zero. Rimaniamo con

$$\frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{2} + (-\sqrt{2}\eta) \frac{d\xi}{\sqrt{2}} + \frac{-\xi}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}d\eta) = \frac{3}{2}(\xi d\eta - \eta d\xi),$$

$$\xi = a\sin t,\ \eta = \frac{a}{\sqrt{3}}\cos t,\ 0 \le t \le 2\pi,\ \Longrightarrow\ \int \frac{3}{2}(\xi d\eta - \eta d\xi) = -\sqrt{3}\pi a^2$$

••

♠ *Terza soluzione* Come la prima solo che per calcolare $\int_{\partial^+ C} xdy$ usiamo coordinate polari. Dunque dobbiamo calcolare l'integrale $\iint_{2x^2+2y^2+2xy\le a^2} dxdy$. Usiamo le coordinate polari $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$, ed otteniamo che $2x^2+2y^2+2xy = a^2$ è equivalente a $2\rho^2+2\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta = a^2$ ossia $\rho^2 = \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$ e quindi $\iint_{\tilde D} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}}} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2}\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} =$ $\int_0^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$. Con la sostituzione $\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ si ha $\int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2-\sin 2\vartheta}$ e quindi l'integrale è $\int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{4a^2}{4-\sin^2 2\vartheta}$. Per risolvere l'integrale bisogna effettuare la sostituzione $\vartheta = \arctan x$ da cui si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\frac{4a^2}{4-4\frac{x^2}{(1+x^2)^2}} = a^2\int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{x^4+x^2+1} = a^2\int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$
$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{a^2}{2} 2\pi \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e quindi il risultato è $-\sqrt{3}\pi a^2$.

Quarta soluzione Una volta arrivati a $\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2}\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$ usiamo i residui. $e^{it} = z$ da cui

$$\frac{a^2}{2}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{iz}\frac{1}{2+\frac{z^2-z^{-2}}{2i}} = a^2 \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{z^4+4iz^2-1}$$

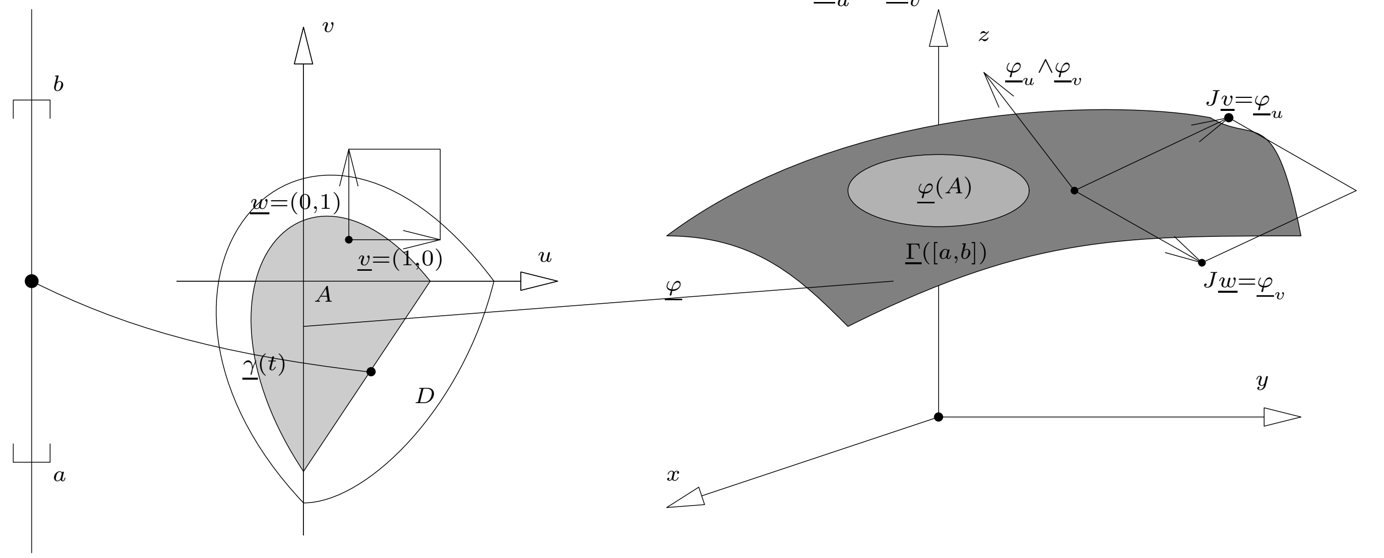
$z^4+4iz^2-1 = 0$ ossia $z^2 = -2i \pm i\sqrt{3}$ e solo il segno $+$ ci interessa.

$$2\pi i a^2 \oint_{|z|=1} \frac{zdz}{z^4+4iz^2-1} = 2\pi i a^2 \left(\frac{z_0}{4z_0^3+8iz_0} + \frac{z_1}{4z_1^3+8iz_1}\right) = 2\pi i a^2\left(\frac{1}{4z_0^2+8i} + \frac{1}{4z_1^2+8i}\right) =$$
$$= 2\pi i a^2 \frac{2}{4z_0^2+8i} = \frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$$

105 min. Lezione del 01/12/2020 Teorema di Stokes o del rotore

Sia $D \subset \mathbf{R}^2$ compatto $D = \overline{B}$ con B aperto e connesso. $\underline{\varphi}\colon D \to \mathbf{R}^3$ è una superficie regolare di equazioni parametriche $\underline{\varphi}(u,v) = \begin{cases} x = \varphi^1(u,v) \\ y = \varphi^2(u,v) \\ z = \varphi^3(u,v) \end{cases}$ .Sia $A = \overset{\circ}{A}$ un aperto tale che $\overline{A} \subset \overset{\circ}{D}$ e ∂A è una curva regolare. Sia $S = \underline{\varphi}(A)$. Chiameremo *bordo di S* l'immagine secondo $\underline{\varphi}$ della frontiera di A ossia $\partial S = \underline{\varphi}(\partial A)$. Sia $\underline{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^2$ una curva il cui sostegno è ∂A e orienta ∂A positivamente. La curva $\underline{\Gamma} = \underline{\varphi} \circ \underline{\gamma}\colon [a,b] \to \mathbf{R}^3$ ha come sostegno ∂S. Si dice che Γ orienta positivamente ∂S e si indica con $\partial^+ S$ il cammino individuato da Γ. Se $\underline{\gamma}(t) = \begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ la curva Γ

ha equazioni $\begin{cases} x = \varphi^1(u(t), v(t)) \\ y = \varphi^2(u(t), v(t)) \\ z = \varphi^3(u(t), v(t)) \end{cases}$ I vettori $\underline{a}(t) \in \mathbf{R}^2$ e $\underline{b}(t) \in \mathbf{R}^2$ sono rispettivamente i vettori, normalizzati a uno, tangente e ortogonale a ∂A in modo tale che $\underline{\gamma}$ orienti positivamente ∂A. $\underline{a}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1, a_2) = \dfrac{(u'(t), v'(t))}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}$ e $\underline{b}(t) = (b_1, b_2) = \dfrac{(v'(t), -u'(t))}{\sqrt{(u')^2 + (v')^2}}$. La matrice $\begin{pmatrix} \varphi^1_u & \varphi^1_v \\ \varphi^2_u & \varphi^2_v \\ \varphi^3_u & \varphi^3_v \end{pmatrix}$ applicata ai vettori di $\mathbf{R}^2$ ci fornisce la loro immagine in $\mathbf{R}^3$ sotto la parametrizzazione della superficie ossia i due vettori $\begin{pmatrix} \varphi^1_u & \varphi^1_v \\ \varphi^2_u & \varphi^2_v \\ \varphi^3_u & \varphi^3_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{t}$ e $\begin{pmatrix} \varphi^1_u & \varphi^1_v \\ \varphi^2_u & \varphi^2_v \\ \varphi^3_u & \varphi^3_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\tau}$. Sia $\underline{n}_e$ la normale esterna che è definita come quella normale (delle due possibili $\underline{n} \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ e $-\underline{n}$) tale che $(\underline{\tau} \wedge \underline{t}) \cdot \underline{n}_e > 0$



Sia ora $\underline{V}(\underline{x}) = P(\underline{x})\underline{i} + Q(\underline{x})\underline{j} + R(\underline{x})\underline{k}$ un campo vettoriale al quale è associata la forma differenziale $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. Abbiamo il seguente importante teorema

Teorema 8.6 (di Stokes) *Sia S una superficie di classe C^2. Allora* $\displaystyle\iint_S (\underline{rotV}, \underline{n}_e) d\sigma = \int_{\partial^+ S} \omega$

Esempi

Riprendiamo l'esercizio del 30/11/2020 risolvendolo con Stokes.

Quinta soluzione Applichiamo il Teorema di Stokes. La superficie è quella del piano $z+x+y = 0$ ($\underline{\varphi}(A)$) nella figura. La curva è quella già scritta ($\underline{\Gamma}([a, b])$ nella figura). La parametrizzazione della superficie è $x = u$, $y = v$, $z = -u - v$ e quindi $\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = (1, 1, 1)$. $rot\underline{V} = -(1, 1, 1)$

$$\int_{\partial^+ C} \omega = \iint_D (\underline{rotV}, \underline{n}_e) d\sigma = \iint_{u^2+v^2+2uv \le a^2} -(1,1,1) \cdot (1,1,1) \frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{\sqrt{3} du\, dv}_{d\sigma} =$$

$$= -3 \iint_{u^2+v^2+2uv \le a^2} du\, dv = -\sqrt{3}\pi a^2$$

Sesta soluzione Come superficie $\underline{\varphi}(A)$ stavolta prendiamo $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ e $z + y + x \ge 0$. Eseguiamo il cambio di coordinate

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{6}} - \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{\xi}{\sqrt{6}} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\xi + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}$$

È il cambio che porta il vettore $(0,0,1)$ nel vettore $(1,1,1)/\sqrt{3}$ e quindi il piano $z+x+y=0$ diventa $\zeta=0$. Inoltre è una rotazione per cui $x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$. Il sotegno $x^2+y^2+z^2=a^2$ $x+y+z=0$ diventa $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$, $\zeta=0$ (il piano equatoriale nel sistema (ξ,η,ζ)). La forma differenziale diventa

$$ydx+zdy+xdz=\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta d\xi-\xi d\eta)-\frac{1}{2}\xi d\xi-\frac{1}{2}\eta d\eta+\zeta d\zeta$$

e a questo punto il calcolo diventa evidente.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\doteq AB$$

A è la matrice che porta la terna $(\underline{i},\underline{j},\underline{k})$ nella terna $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ con $\underline{e}_3=\underline{k}$. B è la matrice che porta la terna $(\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ nella terna $(\underline{e}'_1,\underline{e}'_2,\underline{e}'_3)$ con $\underline{e}_2=\underline{e}'_2$ e $\underline{e}'_3=(1,1,1)/\sqrt{3}$.

♠ Si valuti $\displaystyle\int_{\underline{\varphi}}\omega$ dove $\omega=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$ e $\underline{\varphi}$ è la curva il cui sostegno è costituito dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2=2y$ e dal piano $y=z$.

La curva $\underline{\varphi}$ è chiusa in quanto il piano è inclinato e il cilindro è infinito. Sostituendo $z=y$ nella forma differenziale vediamo che $\omega=2d(xy)$ e quindi l'integrale è nullo.

Usando il Teorema di Stokes vediamo che $\underline{rotV}=\underline{0}$ dove $\underline{V}=(y+z)\underline{i}+(z+x)\underline{j}+(x+y)\underline{k}$ e quindi...

Sia C l'insieme dato dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2=a^2$ e il piano $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ $a,b>0$. Sia data la forma differenziale $\omega=(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$. Sia ∂^+C l'orientazione positiva su C. Si calcoli $\int_{\partial^+C}\omega$.

L'intersezione (detta S) delle due superfici, una volta proiettata sul piano (x,y) è data dalla circonferenza $x^2+y^2=a^2$ e il disco da essa contenuto è detto D.

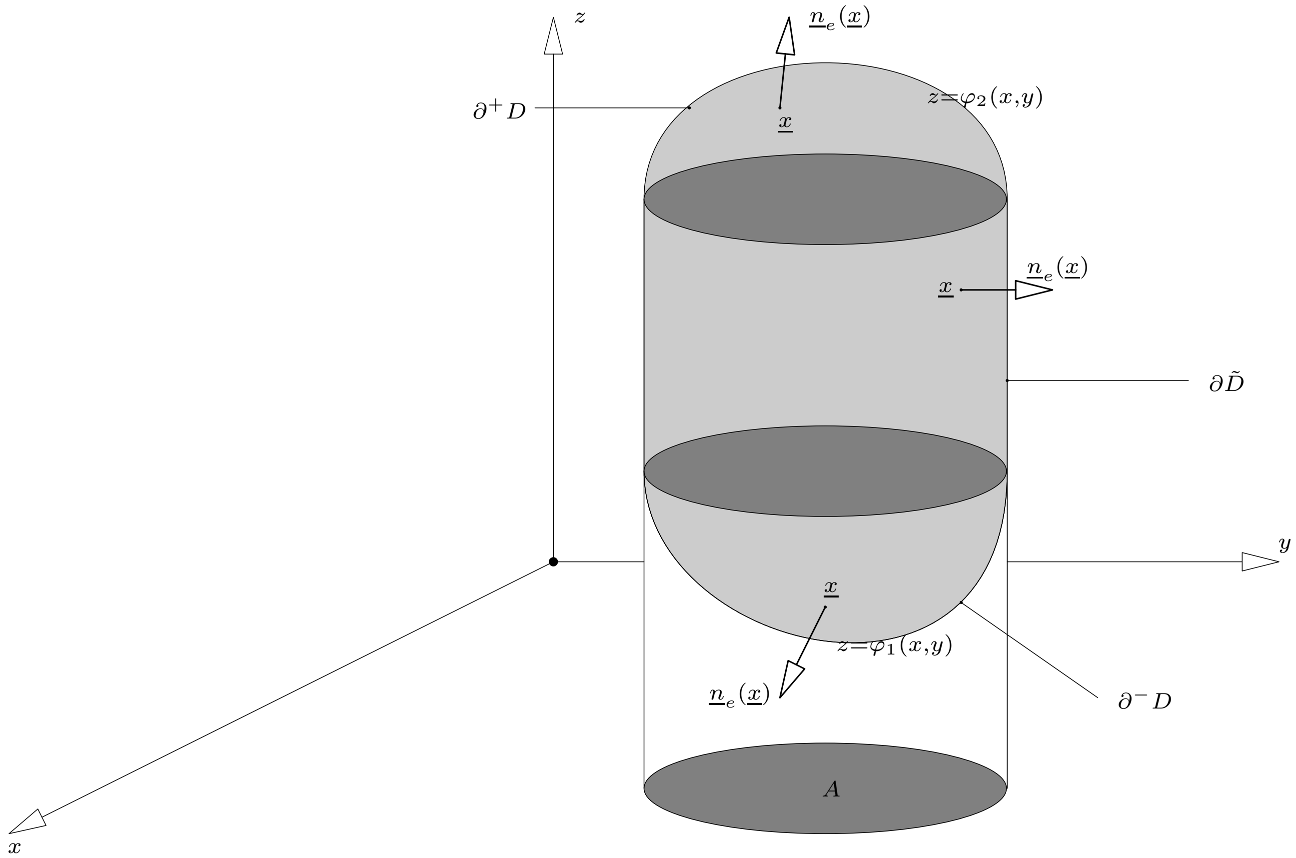
Usando l'espressione di z in funzione di x, l'integrale della forma è dato da $\displaystyle\int_{\underline{\varphi}}\left((ydx-xdy)-\frac{2b}{a}xdy\right)=$ $-2\pi a^2-2ab\pi=-2a\pi(a+b)$ e il bordo di S è percorso in senso antiorario. $\underline{\varphi}$ è la parametrizzazione del bordo di S ossia $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=b(1-\cos t)$ ma tale parametrizzazione non serve ai fini del calcolo.

Usando il Teorema di Stokes abbiamo $\underline{rotV}=-2(1,1,1)$ dove $\underline{V}=(y-z)\underline{i}+(z-x)\underline{j}+(x-y)\underline{k}$ e la normale esterna è il vettore $\underline{n}_e=\frac{1}{c}(\frac{b}{a},0,1)$ dove c è il modulo del vettore $(\frac{b}{a},0,1)$. $\displaystyle\iint_D(\underline{rotV},\underline{n}_e)d\sigma=(-2\frac{b}{a}-2)\pi a^2$. ♠♠

Teorema della Divergenza

Teorema *In riferimento alla figura sottostante si ha*

$$\iint_{\partial^+D}(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_e)d\sigma+\iint_{\partial^-D}(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_e)d\sigma+\iint_{\partial\tilde{D}}(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_e)d\sigma=\iiint div\underline{V}(\underline{x})dxdydz$$

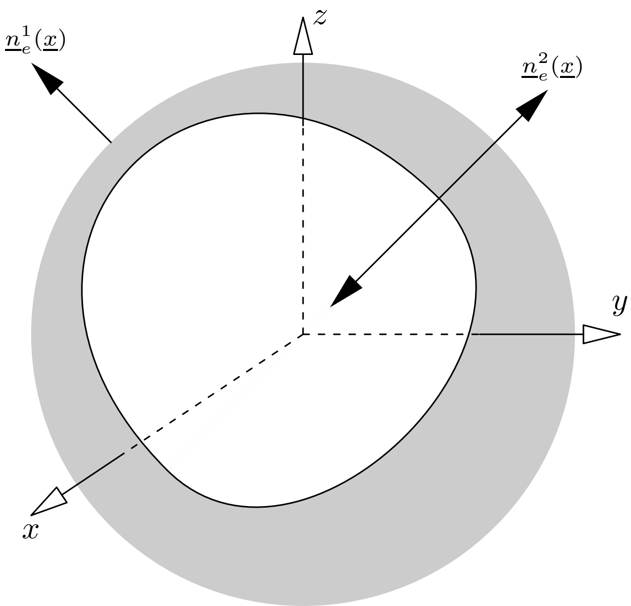


La superficie $\partial\tilde{D}$ è data da $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, $z = u$, $a \le t \le b$ con $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$ e $\varphi_1(\underline{\gamma}) \le u \le \varphi_2(\underline{\gamma})$. Il bordo di A è dato dalla curva $\underline{\gamma}(t)$.

Corollario *Teorema a pag.222 del libro di testo*

Corollario *Siano dati due aperti regolari D_1 e D_2 tali che $\overline{D}_2 \subset D_1$. Sia dato il campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3} V_i(\underline{x})\underline{e}_i$, $\underline{V} \in C^1(\mathbf{R}^3)$ tale che $div\underline{V} \equiv 0$. Siano $\underline{n}_e^1$ e $\underline{n}_e^2$ le normali esterne delle regioni racchiuse da D_1 e D_2. Allora abbiamo $\iint_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma = \iint_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma$.*

Dimostrazione Sia $\underline{\nu}$ la normale esterna della regione compresa fra D_1 e D_2 che chiamiamo D_3. Dal Teorema di Gauss abbiamo $\iiint_{D_3} div\underline{V} dxdydz = 0 = \iint_{\partial D_3} (\underline{V}, \underline{\nu}) d\sigma$. $\iint_{\partial D_3} (\underline{V}, \underline{\nu}) d\sigma = \iint_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma - \iint_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma = 0$ da cui il risultato. ∎



Esempio 1 pag.259 del libro. La proiezione dell'intersezione fra la sfera e il cono è data da $x^2+y^2=2y-x^2-y^2$ ossia $x^2+(y-1/2)^2=1/4$. L'integrale è

$$\iint_{x^2+(y-1/2)^2\le 1/4} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2y-x^2-y^2}} zdz = \iint_{x^2+(y-1/2)^2\le 1/4} dxdy \frac{1}{2}(2y-2x^2-2y^2)$$

Usiamo coordinate polari $x=\frac{r}{2}C \;\; y=\frac{1}{2}+\frac{r}{2}S$, $0\le t\le 2\pi$, $0\le r\le 1$ da cui

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 r\frac{r}{4}(\frac{1}{2}+\frac{rS}{2}-\frac{r^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{rS}{2}) = \frac{\pi}{32}$$

• Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})=(z,y,-z)$ attraverso la superficie laterale della piramide che ha i vertici di base nei punti $(1,1,0)$, $(0,2,0)$, $(-1,-1,4)$, $(0,1,1)$ e vertice nel punto $(0,0,5)$.

Svolgimento Dette S_1,S_2,S_3,S_4 le quattro superfici laterali e B la base della piramide si ha

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} (\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma + \iint_B (\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma = \iiint div(\underline{V}(\underline{x}))dx\,dy\,dz = 0$$

da cui

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} (\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma = -\iint_B (\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma$$

Sia T l'insieme interno all'insieme stellato determinato dai quattro punti $(1,1,0)$, $(0,2,0)$, $(-1,-1,0)$, $(0,1,0)$.

$$-\iint_B (\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma = -\iint_T (z,y,-z)\cdot(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})\sqrt{3}dx\,dy = \iint_T y,dx\,dy =$$
$$= \int_0^1 dx \int_1^{2-x} dyy + \int_{-1}^0 dx \int_{2x+1}^{3x+2} ydy = \frac{2}{3}+\frac{1}{3} = 1$$

••

105 min. Lezione del 03/12/2020 Successioni di funzioni

Del libro di testo da pag.1 a pag.9 fino a teorema escluso

105 min. Lezione del 10/12/2020 Successioni e serie di funzioni

Dal Teorema di pag.9 fino al paragrafo 5) escluso di pag.14

♠ Sia $k > 0$ e $x \in \mathbf{R}$. Al variare di x si calcoli l'integrale $V.P. \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x(k+it)}}{k+it}\frac{dt}{\pi}$ ♠♠

♠ Calcoliamo $V.P. \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)} \doteq V.P. \int_0^{+\infty} F(x)dx$ dove p, q sono interi relativi con $p/q. > -1$, $a > 0$

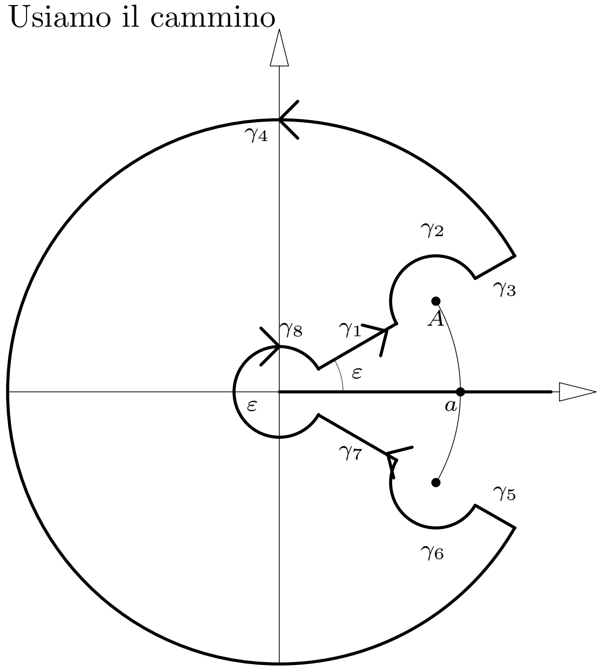
$\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)}$ esiste eventualmente come integrale improprio

$f(z)$ una funzione olomorfa su tutto il piano complesso tranne un numero finito di poli o singolarità essenziali che non devono stare sul semiasse reale positivo

3) $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} \frac{|z||f(z)|}{z^{\frac{p}{q}}(z-a)} = 0.$ ♠♠

Rispetto ai casi già studiati di valor principale, in questo caso abbiamo una singolarità lungo il taglio del piano complesso

Usiamo il cammino



$$
\begin{aligned}
&A = ae^{i\varepsilon},\ \gamma_1(t) = te^{i\varepsilon} \quad \varepsilon \le t \le a-r\\
&\gamma_2(t) = ae^{i\varepsilon} + re^{-it} \quad -\pi \le t \le 0,\\
&\gamma_3(t) = te^{i\varepsilon} \quad a+r \le t \le R\\
&\gamma_4(t) = Re^{it} \quad \varepsilon \le t \le 2\pi-\varepsilon\\
&\gamma_5(t) = -te^{i(2\pi-\varepsilon)} \quad -R \le t \le -a-r\\
&\gamma_6(t) = (ae^{i\varepsilon} + re^{-it})e^{i(2\pi-\varepsilon)} \quad -2\pi \le t \le -\pi,\\
&\gamma_7(t) = -te^{i(2\pi-\varepsilon)} \quad -a+r \le t \le -\varepsilon\\
&\gamma_8(t) = \varepsilon e^{-it} \quad \varepsilon-2\pi \le t \le -\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1\cup\gamma_3} f(z)dz = V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{-\pi}^{0}\frac{f(ae^{i\varepsilon}+re^{-it})(-i)re^{-it}dt}{(ae^{i\varepsilon}+re^{-it})^{\frac{p}{q}}(ae^{i\varepsilon}+re^{-it}-a)} \xrightarrow[R\to\infty,r\to0,\varepsilon\to0]{} -if(a)a^{\frac{-p}{q}}\pi$$

$$\int_{\gamma_4} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{2\pi-\varepsilon}\frac{f(Re^{-it})iRe^{it}dt}{R^{\frac{p}{q}}e^{it\frac{p}{q}}(Re^{it}-a)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$
\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_5\cup\gamma_7} f(z)dz = \lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-R}^{-a-r} \frac{f(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})(-dt)e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})^{\frac{p}{q}}(-te^{i(2\pi-\varepsilon)}-a)}+
$$

$$
+\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-a+r}^{-\varepsilon} \frac{f(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})(-dt)e^{i(2\pi-\varepsilon)}}{(-te^{i(2\pi-\varepsilon)})^{\frac{p}{q}}(-te^{i(2\pi-\varepsilon)}-a)} =
$$

$$
=\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\left[\int_{-R}^{-a-r}\frac{f(-t)(-dt)}{(-t)^{\frac{p}{q}}e^{i2\pi\frac{p}{q}}(-t-a)}+\int_{-a+r}^{0}\frac{f(-t)(-dt)}{(-t)^{\frac{p}{q}}e^{i2\pi\frac{p}{q}}(-t-a)}\right]=
$$

$$
\underbrace{=}_{\tau=-t} V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)(-d\tau)}{\tau^{2\pi\frac{p}{q}}e^{i2\pi\frac{p}{q}}(\tau-a)} = -e^{-i2\pi\frac{p}{q}}V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(\tau)d\tau}{\tau^{2\pi\frac{p}{q}}(\tau-a)}
$$

$$
\int_{\gamma_6} f(z)dz = \int_{-2\pi}^{-\pi}\frac{f((ae^{i\varepsilon}+re^{-it})e^{i(2\pi-\varepsilon)})(-i)re^{-it}e^{i(2\pi-\varepsilon)}dt}{(ae^{i\varepsilon}+re^{-it})^{\frac{p}{q}}\, e^{i(2\pi-\varepsilon)\frac{p}{q}}((ae^{i\varepsilon}+re^{-it})e^{i(2\pi-\varepsilon)}-a)}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}
$$

$$
\to\int_{-2\pi}^{-\pi}\frac{f((a+re^{-it}))(-i)re^{-it}dt}{(a+re^{-it})^{\frac{p}{q}}\, e^{i2\pi\frac{p}{q}}((a+re^{-it})-a)}\xrightarrow[r\to 0]{} -i\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}e^{-i2\pi\frac{p}{q}}
$$

Riunendo il tutto si ha

$$
\lim_{R\to+\infty}\lim_{r\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_1\cup\ldots\cup\gamma_8} F(z)dz =
$$

$$
=V.P.\int_0^{+\infty}\frac{F(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)}(1-e^{-i2\pi p/q})-i\pi(1+e^{-i2\pi p/q})f(a)a^{\frac{-p}{q}} = 2\pi\sum \mathrm{Res}F(z)
$$

da cui

$$
V.P.\int_0^{+\infty}\frac{f(x)dx}{x^{\frac{p}{q}}(x-a)} = i\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}\frac{1+e^{-i2\pi p/q}}{1-e^{-i2\pi p/q}}+\frac{2\pi i}{1-e^{i2\pi p/q}}\sum \mathrm{Res}F(z)=
$$

$$
=\pi f(a)a^{\frac{-p}{q}}\cot\frac{\pi p}{q}+\frac{2\pi i}{1-e^{-i2\pi p/q}}\sum\mathrm{Res}F(z)
$$

L'argomento è immediatamente generalizzabile a funzioni del tipo $\dfrac{f(x)}{x^{\frac{p}{q}}(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)}$ con $0<a_1<a_2<\ldots<a_n$.

Esercizi

$V.P.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$, $V.P.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x-1)(x^2+1)}$, $V.P.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x^2+1)}$,
$V.P.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-1)(x^3+1)}$, $V.P.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-4)(x^3-1)}$, $V.P.\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x-8)(x^3+1)}$

Usiamo la formula per risolvere

$$
V.P.\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(x-4)(x^3-1)} = V.P.\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^{-1/2}(x-4)(x-1)(x^2+x-1)} =
$$

$$
=\pi\Big(\frac{4^{\frac12}}{64-1}\cot\frac{-\pi}{2}+\frac{1^{\frac12}}{(1-4)(1^2-1+1)}\cot\frac{-\pi}{2}\Big)+\frac{2\pi i}{2}\left[\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{\frac{2i\pi}{3}}-4}\frac{1}{3e^{\frac{4i\pi}{3}}}+\frac{e^{\frac{2i\pi}{3}}}{e^{\frac{4i\pi}{3}}-4}\frac{1}{3e^{\frac{2i\pi}{3}}}\right]=
$$

$$
=\pi i\left[\frac{2}{9-i\sqrt{3}}-\frac{2}{9+i\sqrt{3}}\right]=\frac{-\pi\sqrt{3}}{42}
$$

Risolviamo poi

$$V.P.\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(x-8)(x^3+1)}=\frac{2\pi}{1+8^3}\cot\frac{-\pi}{3}+\frac{2\pi i}{-2i\sin\frac{\pi}{3}e^{\frac{i\pi}{3}}}\left[\frac{e^{\frac{-i5\pi}{9}}}{(e^{\frac{i\pi}{3}}-8)}+\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{-9}+\frac{e^{\frac{-i7\pi}{9}}}{(e^{\frac{i5\pi}{3}}-8)}\right]\frac13=$$
$$=\frac{-2\pi}{513\sqrt3}+\frac{2\pi}{27\sqrt3}-\frac{2\pi}{3\sqrt3}\left[\frac{e^{\frac{-i8\pi}{9}}}{(\frac12+i\frac{\sqrt3}{2}-8)}+\frac{e^{\frac{-i10\pi}{9}}}{(\frac12-i\frac{\sqrt3}{2}-8)}\right]=$$
$$=\frac{-2\pi}{513\sqrt3}+\frac{2\pi}{27\sqrt3}-\frac{2\pi}{3\sqrt3}\frac{15\cos\frac{\pi}{9}-2\sqrt3\sin\frac{\pi}{9}}{228}$$

105 min. Lezione del 14/12/2020 Successioni e serie di funzioni Pag.20,21,22,23 fino al teorema 2 escluso.

Data la successione $\{x^n\}$, $0\le x\le 1$, sappiamo che il limite per $n\to\infty$ è dato dalla funzione $L(x)=0$ per $0\le x<1$ e $L(1)=1$. La funzione $L(x)$ è quindi discontinua. In altre parole $\lim\limits_{x\to1^-}\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ mentre $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1^-}x^n=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$ e i due limiti non sono scambiabili.

Si prenda ora la successione di funzioni data da $f_n(x)=n^2x$ per $0\le x\le 1/n$, $f_n(x)=-n^2(x-2/n)$ per $1/n\le x\le 2/n$ e $f_n(x)=0$ per $2/n\le x\le 1$. È facile vedere che $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ per ogni x e quindi $L(x)=0$ e quindi $\displaystyle\int_0^1 L(x)dx=0$ ma $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=1$ e quindi l'integrale del limite è diverso dal limite degli integrali. Tali fenomeni sono caratteristici di una convergenza della successione a $L(x)$ NON UNIFORME.

Notare che nel teorema di pag.8 è essenziale l'intervallo limitato ($a\ne-\infty$, $b\ne+\infty$). La definizione di uniforme convergenza per la successione $\{f_n(x)\}$ è anche data da $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,n_\varepsilon$: $n>n_\varepsilon\implies\sup\limits_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

• La convergenza uniforme può anche essere formulata come

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\;n_\varepsilon\colon\;p,q>n_\varepsilon\implies\sup_{x\in I}|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$$

Facciamo vedere che la successione $\{x^n\}$ non è uniformemente convergente in $[0,1)$. $x^n<\varepsilon$ ossia $n\ln x<\ln\varepsilon$ e quindi $n>\dfrac{-\ln\frac1\varepsilon}{\ln x}$. Se ne dedurrebbe $n_{\varepsilon,x}=1+\left[\dfrac{-\ln\frac1\varepsilon}{\ln x}\right]$ ma è evidente che se $0<\varepsilon<1$, $n_{\varepsilon,x}\to+\infty$ se $x\to1^-$ e quindi la successione non converge uniformemente.

Si può anche implementare la definizione di non uniforme convergenza ossia

$$\exists\;\varepsilon>0\colon\forall\;m\;\exists\;n>m\;\exists\;\overline{x}_n\in[0,1)\colon|f_n(\overline{x}_n)-f(\overline{x}_n)|\ge\varepsilon$$

Prendiamo $\varepsilon=1/(2e)$ e $\overline{x}=(1-1/n)$ ottenendo così $\overline{x}^n=e^{n\ln(1-1/n)}\to1/e>1/(2e)$. Significa che $\boxed{1=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to1^-}x^n\ne0=\lim\limits_{x\to1^-}\lim\limits_{n\to+\infty}x^n}$

Se $I=[0,a]$ con $a<1$ la convergenza è uniforme. Infatti per $0<\varepsilon\le1$ $\sup\limits_{0\le x\le a}n_{\varepsilon,x}=1+\left[\dfrac{-\ln\frac1\varepsilon}{\ln x}\right]\le1+\left[\dfrac{-\ln\frac1\varepsilon}{\ln a}\right]$ e tale valore va bene quale n_ε **per ogni** $0\le x\le a$. Notare tra l'altro che per $x\in[0,a]$ la funzione limite è identicamente nulla e quindi il teorema di pag.4 non previene la convergenza uniforme. In tal caso $\boxed{0=\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a^-}x^n=\lim\limits_{x\to a^-}\lim\limits_{n\to+\infty}x^n}$ ••

• Facciamo vedere che la successione di pag.7 è uniformemente convergente in $[a,+\infty)$ per $a>0$. Il massimo della funzione xe^{-x^2k} cade in $x_k=\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ e quindi per $k>1/(2a^2)$ si ha $x_k<a$. Ciò vuol dire che $\max\limits_{x\geq a} f_k(x)=ae^{-a^2k}$ (si veda la figura a pag.7). Chiaramente esiste k_ε tale che $ake^{-a^2k}<\varepsilon$ per ogni $k>k_\varepsilon$ e quindi $\sup\limits_{x\geq a} kxe^{-x^2k}<\varepsilon$ per ogni $k>k_\varepsilon$ ossia l'uniformre convergenza. ••

• Dimostriamo che la funzione $f_n(x)=n^2x$ per $0\leq x\leq 1/n$, $f_n(x)=-n^2(x-2/n)$ per $1/n\leq x\leq 2/n$ e $f_n(x)=0$ per $2/n\leq x\leq 1$ non è uniformemente convergente in $[0,1]$; fatto questo certo da $\boxed{1=\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq 0=\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx.}$

$f_n(\overline{x}_n)=f(1/n)=n$ da cui la non convergenza uniforme. Se invece considerassimo $x\in[a,1]$ $0<a<1$, allora $\sup\limits_{[a,1]} f_n(x)=0$ non appena $2/n<a$. ••

• L'esempio 1 a pag.5 non converge uniformemente in quanto la funzione limite è discontinua. Basta osservare che $f_k(\overline{x}_k)=f_k(k\dfrac{1}{k})=\arctan(1)=\pi/4$ e non è piccolo a piacere. ••

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^2e^{-x^2k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

Svolgimento La serie converge puntualmente per ogni $x\in\mathbf{R}$. Se $x=0$ vale identicamente zero. Se $x\neq 0$ possiamo osservare che $\lim\limits_{k\to+\infty}\sqrt[k]{e^{-x^2k}}=e^{-x^2}<1$ da cui la convergenza. Possiamo anche osservare che $\lim\limits_{k\to+\infty} k^2e^{-x^2k}=0$.

Convergenza uniforme. Siccome in questo caso specifico possiamo addirittura calcolare $S(x)$

$$S(x)\doteq x^2\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2k}=\begin{cases} x^2\dfrac{1}{1-e^{-x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

siamo in grado di dire che $\lim_{x\to 0} S(x)\neq 0$ ossia la funzione limite non è continua in $x=0$; segno questo che la convergenza non è uniforme in nessun intervallo del tipo $(-a,a)$, $(-a,0)$, $(a,0)$.

Dimostrare che la convergenza è uniforme in ogni intervallo del tipo $[a,+\infty)$ con $a>0$. ••

♠ Dimostrazione diretta che la convergenza non è uniforme in $(0,1)$. Sia $x\in[1/N,2/N]\subset(0,1)$ e sia k tale che $x^2k\leq 1$. È sufficiente $k\leq N^2/4$. Ne segue che

$$\sup_{(0,1)} x^2\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-x^2k}\geq \sup_{[1/N,2/N]} x^2\sum_{k=n+1}^{N^2/4} e^{-x^2k}\geq \frac{1}{N^2}\sum_{k=n+1}^{N^2/4}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\frac{N^2-n}{4N^2}\geq\frac{1}{8e}$$

non appena $N^2>n/4$ per cui, dato un qualsiasi intero n, la precedente quantità maggiore è di $1/(8e)$ ossia la non convergenza uniforme. ♠♠

♠ Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^3e^{-x^2k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

Svolgimento Per la convergenza puntuale si procede come sopra e si verifica che converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Poi verifichiamo che $S(x) \doteq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} = \dfrac{x^3}{1-e^{-x^2}}$ se $x \neq 0$ mentre vale zero se $x=0$. Siccome $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 0$, ci sono gli indizi di una possibile uniforme convergenza ed infatti il massimo della funzione $x^3 e^{-x^2 k}$ si ha per $x_k = \left(\dfrac{3}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq \overline{x}_k$ da cui

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k}|_{x_k=\overline{x}_k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-3/2} < \varepsilon$$

da cui la convergenza totale e quindi uniforme. ♠♠

• Dimostrare che la serie geometrica $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^k$ non converge uniformemente per $|z|<1$. Per essere uniformemente convergente deve accadere

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon\colon\ p,q > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in I} |f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon$$

$$f_q(z) - f_p(z) = \sum_{k=0}^{q} z^k - \sum_{k=0}^{p} z^k = \sum_{k=p+1}^{q} z^k = \frac{z^{q+1}-z^{p+1}}{1-z}$$

Prendiamo $z = 1-\delta$ con $\delta = \dfrac{1}{(p+q)^2}$ ed otteniamo

$$\frac{(1-\delta)^{q+1} - (1-\delta)^{p+1}}{\delta} = \frac{e^{(q+1)\ln(1-\delta)} - e^{(p+1)\ln(1-\delta)}}{\delta} =$$
$$= \frac{1+(q+1)(\delta)+O(\delta^2) - 1 - (p+1)(-\delta) + O(\delta^2)}{\delta} = q - p + O(\delta)$$

e non è una quantità piccola a piacere. Perché è necessario specificare $\delta = \dfrac{1}{(p+q)^2}$ e non lasciare semplicemente δ indipendente da p e q?

Si poteva pure scrivere $|f(z) - f_n(z)| = |\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} z^k| = \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$. Ora prendiamo $z = 1-1/n$ da cui $n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} \to +\infty$ e quindi niente uniforme convergenza. ••

♠ Dimostare che la serie di potenze $\sum a_k z^k$ converge uniformemente in $|z| \leq c < R$ dove R è il raggio di convergenza della serie definito da $R = \lim\limits_{k\to+\infty} |a_k|^{-1/k}$

Svolgimento $R = \lim\limits_{k\to+\infty} |a_k|^{-1/k} \iff \lim\limits_{k\to+\infty} |R^k a_k|^{1/k} = 1$ e quindi, definitivamente, $R^k |a_k| < (1+\varepsilon)^k$ ossia $R^k|a_k| < (1+\varepsilon)^k$ per ogni $k > k_\varepsilon$. Ora scriviamo $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |a_k z^k| = \sum\limits_{k=0}^{k_\varepsilon} |a_k z^k| + \sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_k z^k|$ e $\sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} R^k |a_k \dfrac{z^k}{R^k}| \leq \sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} R^k |a_k| \dfrac{|z^k|}{R^k} \leq \sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} (1+\varepsilon)^k \dfrac{c^k}{R^k}$ e scegliamo $\varepsilon < R/c - 1$. In tal modo $(1+\varepsilon)\dfrac{c}{R} = \delta < 1$ e abbiamo $\sum\limits_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty} \delta^k$ evidentemente convergente essendo $\delta < 1$. Ne segue la totale convergenza della serie. ♠♠

♠ Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione $f_k(x) = x/k$ ♠♠

♠ Trovare gli insiemi di convergenza puntuale della successione di funzioni $f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2} + |x+1|^k}$.
Dimostrare poi che converge uniformemente in ogni insieme $[-a, a]$ con $a > 0$
1) Dimostrare che non converge uniformemente nell'insieme $[a, +\infty)$.
Svolgimento Convergenza puntuale. Sia $|x+1| \geq 1$.

$$f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2} + |x+1|^k} = |x+1| \left(1 + e^{x^2}|x+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} |x+1|$$

Sia $|x+1| < 1$.

$$f_k(x) = \sqrt[k]{e^{x^2} + |x+1|^k} = e^{\frac{x^2}{k}} \left(1 + e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$$

Convergenza uniforme in $[-2, 0]$ ossia $|x+1| < 1$.

$$|f_k(x) - 1| = \left|\sqrt[k]{e^{x^2} + |x+1|^k} - 1\right| = \left|e^{\frac{x^2}{k}} \left(1 + e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right|$$

Ora usiamo:
1) $(1+x)^{\frac{1}{k}} \leq 1 + x/k$ dimostrabile studiando il grafico della funzione $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{k}} - 1 - x/k$ per $x \geq 0$ e
2) $e^x \leq 1 + x(e-1)$, $0 \leq x \leq 1$.
Quindi otteniamo per $k \geq 2$

$$0 \leq \left|e^{\frac{x^2}{k}} \left(1 + e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right| = e^{\frac{x^2}{k}} \left(1 + e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}} - 1 \leq$$
$$\leq \left(1 + \frac{x^2}{k}(e-1)\right)\left(1 + \frac{1}{k}e^{-x^2}|x+1|^k\right) - 1 = (1 + O(\frac{1}{k})) - 1 = O(\frac{1}{k})$$

da cui la convergenza uniforme in $[-2, 0]$.

Convergenza uniforme in $[0, A]$ con $A > 0$. Dobbiamo stimare

$$|f_k(x) - |x+1|\,| = \left||x+1| \left(1 + e^{x^2}|x+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} - |x+1|\right| \leq |x+1| \left(1 + \frac{1}{k}e^{x^2}|x+1|^{-k} - 1\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{k}(A+1)e^{A^2} \cdot 1$$

e quindi la convergenza uniforme. Ho usato $(1+x)^{\frac{1}{k}} \leq 1 + x/k$. Unendo con il punto precedente, otteniamo la convergenza uniforme nell'insieme $[-a, a]$.

1) Non convergenza uniforme in $[a, +\infty)$. Dobbiamo far vedere che

$$\exists\ \varepsilon > 0\colon\ \forall\ m\ \exists\ k > m\colon \sup_{x\in[a,+\infty)} |f_k(x) - |x+1|\,| \geq \varepsilon$$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_k(x) - |x+1|\,| \geq |k+1| \cdot \left|\left(1 + e^{k^2}|k+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}} - 1\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

È facile verificare che la convergenza è uniforme in tutti gli insiemi della forma $(-\infty, a]$, con $a < -2$, $[a, b]$, $0 < a < b < 2$, $[a, +\infty)$, $a > 0$. Invece la convergenza non è uniforme nell'insieme

$[a,b]$ con $a<-2$, e $b>-2$ e $a<0$, $b>0$. In quest'ultimo caso è facile applicare il teorema a pag.9 del libro.

Si espliciti la non convergenza uniforme nell'intervallo $[-1,1]$. ♠♠

♠ Studiare al convergenza puntuale ed uniforme della successione $f_k(x)=\dfrac{x}{1+(kx)^2}$. Puntualmente converge a zero per ogni x. Per la convergenza uniforme eseguiamo la derivata prima

$$f_k'(x)=\frac{1-k^2x^2}{1+(kx)^2}\geq 0 \iff |x|\leq 1/k$$

Quindi il massimo di $f_k(x)$ lo si ha per $x=1/k$ e vale $1/k$. Abbiamo quindi $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f_k(x)|\leq\dfrac{1}{k}<\varepsilon$ per ogni $k>[1/\varepsilon]$ da cui la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. ♠♠

♠ Sia data la successioni di funzioni $f_k(x)=\dfrac{x}{1+|(kx)^p|}$. Si dica per quali valori di $0<p\leq 1$ converge uniformemente in $\mathbf{R}$.

Risposta Se $0<p<1$ la successione converge ma non uniformemente. Infatti certamente violo la relazione da soddisfare $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|f_k(x)|<\varepsilon$ se prendo $x_k=k^{\frac{1}{1-p}}$. Se invece $p=1$, maggiorando $|f_k(x)|\leq\dfrac{|x|}{|x|k}=\dfrac{1}{k}$ si ha la convergenza uniforme.♠♠

♠ Si dimostri che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}$ converge uniformemente per $x\geq 0$ ma non converge totalmente.

Dimostrazione Certamente la serie converge puntualmente essendo una serie di Leibnitz. Sia quindi $\displaystyle S(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k}\doteq\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k(x)$ ed inoltre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k(x)\doteq S_n(x)$

$$\begin{aligned}
S-S_{2n}&=-a_{2n+1}(x)+\underbrace{(a_{2n+2}(x)-a_{2n+3}(x))}_{\geq 0}+\underbrace{(a_{2n+4}(x)-a_{2n+5}(x))}_{\geq 0}+\ldots+\\
&+(a_{2n+6}(x)-a_{2n+7}(x))+\ldots\geq -a_{2n+1}(x)\\
S-S_{2n-1}&=a_{2n}(x)+\underbrace{(-a_{2n+1}(x)+a_{2n+2}(x))}_{\leq 0}+(-a_{2n+3}(x)+a_{2n+4}(x))+\ldots+\\
&+(-a_{2n+5}(x)+a_{2n+6}(x))+\ldots\leq a_{2n}(x)
\end{aligned}$$

Quindi

$$|S(x)-S_k(x)|\leq|a_{k+1}|=\frac{1}{x+k+1}\leq\frac{1}{k}$$

e quindi la convergenza uniforme. La serie non può convergere totalmente in quanto

$$\frac{1}{x+k}\geq\frac{1}{2k}\ \forall\ k>x,\implies\sum_{\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{x+k}\geq\sum_{\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{2k}=+\infty$$

Ricordo che dalla convergenza totale segue sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme ma la convergenza assoluta è esclusa in questo caso. ♠♠

♠ Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\pi k+\arctan\frac{x}{k})$. Si studi 1) la convergenza puntuale, 2) la convergenza uniforme sugli insiemi $[-a,a]$, 3) la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$.

Svolgimento 1) La serie è in realtà $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})$. Usiamo Le maggiorazioni $|\arctan x|\leq |x|$ e $|\sin x|\leq |x|$ ed abbiamo

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|}{k\sqrt{k}}$$

da cui l'assoluta convergenza e quindi la convergenza semplice.

2) Se $x\in[-a,a]$ abbiamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|}{k\sqrt{k}}\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a}{k\sqrt{k}}$ da cui la totale convergenza e quindi uniforme, in $[-a,a]$

3) Per la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$, dobbiamo mostrare che, detta $S(x)$ la somma sella serie per ogni x, si ha

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|S(x)-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|=\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|<\varepsilon$$

Dall'esercizio precedente, dopo aver notato che $\sin x$ e $\arctan x$ sono entrambe crescenti, possiamo dire che

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right|\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(\arctan\frac{x}{n+1})\leq\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\varepsilon$$

se n è grande abbastanza. Oppure usare $\sin(\arctan x/k)=x/\sqrt{x^2+k^2}$ Naturalmente si poteva risolvere direttamente questa parte dell'esercizio che avrebbe compreso anche le prime due. ♠♠

♠ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k^4x^4}$ diverge a $+\infty$ per $x=0$ e converge per ogni altro valore di x in quanto il termine generale tende a zero come $1/k^4$. Chiaramente la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbf{R}$ ma è uniforme in ogni sottoinsieme del tipo $[a,+\infty)$, $a>0$. ♠♠

♠ Si dica se converge e per quali valori di x, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+|x|)^{2k}}$. Si dica se nell'insieme trovato la convergenza è uniforme.

Svolgimento Basta osservare che $1+x^2\geq 2\sqrt{|x|}$ per cui $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+|x|)^{2k}}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}$. ♠♠

♠ Trovare il raggio di convergenza della serie $\sum z^k\sin(\pi\sqrt{k^2+\sqrt{k}})$ e verificare se converge per $z=\pm1$.

♠ Trovare il raggio di convergenza della serie $\sum z^k\sin(\pi(k+1)\sqrt{k^2+\sqrt{k}})$ e verificare se converge per $z=\pm1$.

♠ Esercizio 3 nel compito del 21/2/2015 ♠♠

♠ Si prenda ora la successione di funzioni data da $f_n(x)=n^{\frac{3}{2}}x$ per $0\leq x\leq 1/n$, $f_n(x)=-n^{\frac{3}{2}}(x-2/n)$ per $1/n\leq x\leq 2/n$ e $f_n(x)=0$ per $2/n\leq x\leq 1$. È facile vedere che $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ per ogni x e la convergenza non è uniforme; fatto questo evidente da $f_k(1/k)=\sqrt{k}\to+\infty$. Quindi si ha $L(x)=0$ e $\displaystyle\int_0^1 L(x)dx=0$. Inoltre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$ e quindi l'integrale del limite è uguale al limite degli integrali anche se in questo caso la convergenza non è uniforme ♠♠

Se l'intervallo è infinito, $[0,+\infty)$ ad esempio, quandanche si avesse la convergenza uniforme, non è detto si avrebbe $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_k(x)dx = \int_0^{+\infty}\lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx.$

• Sia data la successione $f_k(x) = \dfrac{k}{x^2+k^2}$. Da $f_k(x) \leq 1/k^2$, la successione converge **uniformemente** in $[0,+\infty)$ alla funzione nulla ma

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{k}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Tale risultato non è in contraddizione con il teorema di pag.8 in quanto l'intervallo è illimitato. Se invece si prendesse $[0,A)$ si avrebbe

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{k}{x^2+k^2}dx = \lim_{k\to+\infty}\arctan\frac{A}{k} = 0 = \int_0^{+\infty}\lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx.$$

come deve essere.

Se invece avessimo $x\in[0,a]$ allora

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{a}\frac{k}{x^2+k^2}dx = \lim_{k\to+\infty}\arctan\frac{a}{k} = 0$$

come deve essere

Viceversa la successione $f_k(x) = \dfrac{1}{k(x^2+1)}$ converge uniformemente alla funzione nulla e $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{k(x^2+1)} = \frac{\pi}{2k}\to 0$ ••

Teorema pag.9–10.

Applicazione. Si prenda la funzione $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k^2x\pi)}{k^4}$. Le condizioni del teorema sono verificate e quindi $f'(x) = \pi\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k^2x\pi)}{k^2}$ sebbene $f(x)$ non è esprimibile in forma chiusa tramite funzioni elementari.

La funzione $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k^2x\pi)}{k^2}$ è definita per ogni $\mathbf{R}$ e definisce una funzione continua grazie alla stima $\dfrac{|\sin(\pi k^2x)|}{k^2} \leq \dfrac{1}{k^2}$ che garantisce l'uniforme convergenza. Inoltre si sa essere derivabile nei punti della forma $\dfrac{2p+1}{2q+1}$ (https://sites.math.washington.edu/ morrow/335_09/gerver.pdf; **da non leggere in vista dell'esame**) e non derivabile altrove ed è chiaro che non possiamo scrivere $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\pi\cos(k^2x\pi)$ dal momento che la serie diverge.

♠ La successione $f_k(x) = x\ln(x^2+k^2)$ diverge per ogni valore di $x\neq 0$ ma la successione delle derivate $f'_k(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+k^2}$ converge a zero. Il teorema non è applicabile in quanto la convergenza

$f'_k(x) \to 0$ non è uniforme ($f'_k(k) = 1 \not\to 0$). La condizione $f_k(x_0) \to l$ è soddisfatta da $x_0 = 0$ e $l = 0$. ♠♠

Come al solito, se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, la conclusione del teorema può avverarsi oppure no. Prendiamo ad esempio $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2 k} = \dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$. La condizione di convergenza è $e^{-x^2} < 1$ ossia $x > 0$. La convergenza non è uniforme. Se lo fosse allora

$$\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon\colon \sup_{x\in(0,+\infty)} \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-x^2 k} < \varepsilon \implies \frac{e^{-x^2 n}}{e^{x^2}-1} < \varepsilon$$

ma per $x_n = 1/\sqrt{n}$ otteniamo $\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{e^{1/n}-1} \to +\infty$ per $n \to +\infty$. La convergenza non è uniforme e quindi non può esserlo neppure quella di $\sum_{k=0}^{+\infty} -2xke^{-x^2 k}$. Il Teorema di pag.9,10 dunque non si applica. In ogni caso alla fine faccio vedere che la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} -2xke^{-x^2 k}$ non è uniformemente convergente. Cionostante

$$f'(x) = \frac{-2xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} -2xke^{-x^2 k}.$$

La derivata del limite è il limite delle derivate. Dobbiamo mostrare che $\sum_{k=0}^{+\infty} -2xke^{-x^2 k} = \dfrac{-2xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$. A parte $-2x$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-x^2 k} = e^{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)e^{-x^2(k+1)} - \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2 k} = e^{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty} ke^{-x^2 k} - \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2 k}$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-x^2 k}(1-e^{x^2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2 k} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1} \implies \sum_{k=0}^{+\infty} ke^{-x^2 k} = \frac{-e^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}$$

In questo caso dunque le ipotesi del teorema non sono valide ma la tesi si. Nel prossimo esempio non sono valide né le ipotesi né le tesi.

• Sappiamo che la funzione $f_n(x) = n^2 x$ per $0 \le x \le 1/n$, $f_n(x) = -n^2(x - 2/n)$ per $1/n \le x \le 2/n$ e $f_n(x) = 0$ per $2/n \le x \le 1$ non è uniformemente convergente in $[0, 1]$;. Prendiamo $\{F_k(x)\}$ con $F_k(x) = \int_0^1 f_k(x)dx$, $F_k(x) = k^2 x/2$ per $0 \le x \le 1/k$, $F_k(x) = 1 - \dfrac{k^2}{2}(x - \dfrac{2}{k})$ per $1/k \le x \le 2/k$, $F_k(x) = 1$ per $x \ge 2/k$. $\lim\limits_{k\to+\infty} F_k(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ per cui la convergenza non può essere uniforme né può esserlo quella di $F'_k(x) = f_k(x)$ come già sapevamo. Ora

$$\lim_{k\to+\infty} F'_k(x) = \lim_{k\to+\infty} f_k(x) = 0$$

ma $\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{k\to+\infty} F_k(x)=0$ solo per $x>0$ e non per $x=0$.

• La serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} -2xke^{-x^2k}$ non converge uniformemente. Bisogna far vedere che

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ n_\varepsilon\colon\ n>n_\varepsilon\ \Longrightarrow\ \sup_{x>0}|h(x)-h_n(x)|<\varepsilon$$

$$h(x)-h_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} ke^{-x^2k}\doteq\sum_{k=n+1}^{+\infty} ka^k=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(k+1)\frac{a^{k+1}}{a}-\sum_{k=n+1}^{+\infty}a^k=\sum_{p=n+2}^{+\infty}p\frac{a^p}{a}-\frac{a^{n+1}}{1-a}=\sum_{p=n+1}^{+\infty}p\frac{a^p}{a}-(n+1)a^n-\frac{a^{n+1}}{1-a}$$

da cui

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty}pa^p\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{(n+1)a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^{n+2}}{(1-a)^2}$$

e se $n=0$ si ha (il punto controverso a lezione)

$$\sum_{p=1}^{+\infty}pa^p\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{(1-a)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}\Big|_{a=e^{-x^2}}=\frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2},\qquad x\neq 0$$

In ogni caso

$$|h(x)-h_n(x)|=\left|\frac{(n+1)e^{-x^2(n+1)}}{1-e^{-x^2}}+\frac{e^{x^2(n+2)}}{(1-e^{-x^2})^2}\right|$$

Prendiamo $x_n=1/n\to 0$ e teniamo presente che $x^2/(1-e^{-x^2})\to 1$.

$$|h(x)-h_n(x)|=\left|\frac{n+1}{x_n^2}\frac{x_n^2}{1-e^{-x_n^2}}e^{-x_n^2(n+1)}+\frac{1}{x_n^4}\frac{x_n^4}{(1-e^{-x_n^2})^2}e^{-x_n^2(n+2)}\right|\to+\infty$$

♠ Stabilire la convergenza puntuale e uniforme della serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+k^4}$

La funzione è dispari e quindi basta studiare la serie per $x\geq 0$. Da

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+k^4}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^3}{k^4}$$

la serie converge per ogni x. Converge anche uniformemente in ogni intervallo $[0,A]$ qualsiasi sia A. Non converge uniformemente in un qualsisasi intervallo infinito del tipo $[A,+\infty)$. Non converge uniformemente se

$$\exists\ \varepsilon>0\colon\ \forall\ n\ \exists\ N>n\colon\ \sup_{x\geq A}\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+k^4}\geq\varepsilon$$

Sia N tale che $A<N\leq x<N+1$ e $\varepsilon=1/32$. Abbiamo

$$\sum_{k=N}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+k^4}\geq\sum_{k=N}^{2N}\frac{N^3}{(N+1)^4+N^4}>\sum_{k=N}^{2N}\frac{N^3}{N^4+(2N)^4}=\frac{N+1}{17N}>\frac{1}{17}$$

♠♠

105 min. Lezione del 15/12/2020 Serie di Fourier

Paragrafo 7 serie di Fourier

Se una funzione $f(x)$ ha periodo T allora la funzione $g(x) \doteq f(x\frac{T}{2\pi})$ ha periodo 2π

$$g(x+2\pi) = f(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)) = f(\frac{T}{2\pi}x+T) = f(\frac{T}{2\pi}x)$$

quindi

$$\begin{aligned}
&g(x) = f(x\frac{T}{2\pi}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx + \\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)dx\Big)\cos(kx) + \Big(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)dx\Big)\sin(kx)\Big) = \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\frac{T}{2\pi})dx + \\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x\frac{T}{2\pi})\cos(kx)dx\Big)\cos(kx) + \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x\frac{T}{2\pi})\sin(kx)dx\Big)\sin(kx)\Big) = \\
&\underbrace{=}_{2\pi y/T=x} \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)dy + \\
&+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{T}\Big(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\cos\frac{2\pi ky}{T}dy\Big)\cos(ky) + \frac{2}{T}\Big(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\sin\frac{2\pi ky}{T}dy\Big)\sin(ky)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
&f(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)dy + \\
&+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{T}\Big(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\cos\frac{2\pi ky}{T}dy\Big)\cos\frac{2\pi kx}{T} + \frac{2}{T}\Big(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\sin\frac{2\pi ky}{T}dy\Big)\sin\frac{2\pi kx}{T}
\end{aligned}$$

105 min. Lezione del 17/12/2020 Successioni e serie di funzioni

♠ Data la seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(kz^{k-1}-(k+1)z^k)$ si trovi l'insieme più grande di convergenza puntuale, di convergenza uniforme

Soluzione Per la convergenza puntuale possiamo procedere in due maniere.

La prima.Se $|z| = r \geq 1$ il termine generale della serie non tende a zero in quanto

$$|(kz^{k-1}-(k+1)z^k)| \geq \big|(k+1)|z|^k - k|z|^{k-1}\big|. = (k+1)r^r - kr^{k-1} \to +\infty$$

Rimane $|z| < 1$ e quindi convergono separatamente le due serie di potenze $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} kz^{k-1}$ e $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)z^k$. La conclusione è che la serie converge per $|z| < 1$ e se ne può calcolare pure la somma

Sia $S(z) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} kz^k$.

$$S(z) = \sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)z^k + \sum_{k=1}^{+\infty} kz^k = z\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)z^{k-1} + \frac{z}{1-z} = z\sum_{p=1}^{+\infty} pz^p + \frac{z}{1-z}$$

da cui $S(z)(1-z) = \dfrac{z}{1-z}$ e quindi $S(z) = z/(1-z)^2$ e quindi $\sum_{k=0}^{+\infty} kz^{k-1} = \dfrac{1}{(1-z)^2}$

$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)z^k = \sum_{k=0}^{+\infty} kz^k + \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \dfrac{z}{(1-z)^2} + \dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{(1-z)^2}$. La differenza fa zero

La seconda $\sum_{k=0}^{+\infty}(kz^{k-1} - (k+1)z^k) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(kz^{k-1} - (k+1)z^k) = \lim_{n\to+\infty} -(n+1)z^n = 0$ se $|z| < .1$ Se $|z| \geq 1$ il limite non esiste oppure esiste ma non è finito. Quindi la serie converge puntualmente al valore zero.

Convergenza uniforme.

Non converge uniformemente in tale insieme e per mostrarlo prendiamo z reale. Se convergesse uniformemente avremmo

$$0 = \int_{1/2}^{1} \sum_{k=0}^{+\infty}(kx^{k-1} - (k+1)x^k)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{1/2}^{1}(kx^{k-1} - (k+1)x^k)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(1 - \frac{1}{2^k}) - (1 - \frac{1}{2^{k+1}}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} -\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = -1 \quad \text{assurdo}$$

Converge uniformemente per $|z| \leq c < 1$ e questo è stato mostrato qualche sercizio prima. Rifacendo il calcolo di prima con $|z_0| < 1$, $|z_1| < 1$ otteniamo

$$0 = \int_{z_0}^{z_1} \sum_{k=0}^{+\infty}(kz^{k-1} - (k+1)z^k)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{z_0}^{z_1}(kz^{k-1} - (k+1)z^k)dx = \sum_{k=0}^{+\infty}(z_0^k - z_1^k) - (z_0^{k+1} - z_1^{k+1}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(z_0^k - z_0^{k+1}) - \sum_{k=0}^{+\infty}(z_1^k - z_1^{k+1}) = 1 - 1 = 0$$

Data la seguente serie di funzioni $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}$ $x \in \mathbf{R}$ Si trovino i valori di x per cui converge puntualmente. Si dica se converge uniformemente in 1) $[2, +\infty)$, 2)$[1, +\infty)$

Convergenza puntuale.

Sia $x = a > 1$.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k(a^{2k+1}-1)}{(a^{2k}+1)(a^{2k+2}+1)} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k a^{2k+1}}{a^{2k}a^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} < +\infty$$

Per $x = 1$ la serie è nulla. Se $x = 0$ la serie si riduce al valore -1.

Sia $x=-a<-1$, $a>1$.

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-a)^k((-a)^{2k+1}-1)}{((-a)^{2k}+1)((-a)^{2k+2}+1)}\right|\le\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|a|^k|a|^{2k+1}}{a^{2k}a^{2k+2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{|a|^{k+1}}$$

Sia $0<|x|<1$

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}\right|\le\sum_{k=0}^{+\infty}|x|^k(|x|^{2k+1}+1)\le\sum_{k=0}^{+\infty}2|x|^k<+\infty$$

Per $x=-1$ non converge dal momento che il termine generale della serie non tende a zero.

In $[2,+\infty)$ è uniformemente convergente. Infatti

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}\le\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^kx^{2k+1}}{x^{2k}x^{2k+2}}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^{k+1}}\le\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}$$

da cui la convergenza totale.

In $[1,+\infty)$ non è uniformemente convergente; basta dimostrarlo in $[1,2]$ e basta far vedere che
$\displaystyle\lim_{x\to1^+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}\neq0=\sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{x\to1^+}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}\ge\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(2x^{2k})(2x^{2k+2})}=\frac14\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^{k+1}}-\frac14\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^{3k+2}}=\frac14\frac{1}{x-1}-\frac14\frac{x}{x^3-1}=$$
$$=\frac14\frac{x^2+x+1-x}{x^3-1}\xrightarrow[x\to1^+]{}+\infty\implies\lim_{x\to1^+}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k(x^{2k+1}-1)}{(x^{2k}+1)(x^{2k+2}+1)}=+\infty$$

Data la seguente serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^3}{x^4+k^4\ln(1+x^a)}$ $x>0$ Si trovino i valori di a reali per cui la serie converge uniformemente in $(a,+\infty)$

♠♠

90 min. Lezione del 19/12/2020 Esercizi

Lezione del 21/12/2020 soppressa

90 min. Lezione del 22/12/2020 (ultima lezione) Esercizi