Ing. Elettronica& Internet, Informatica (frontale e online), A.A.2019–2020

Giornale delle lezioni e materiale svolto a lezione ma non presente sulle dispense

Il 19/11/2019 è stato l’ultimo giorno di lezione per Informatica

Gli esercizi per casa e non svolti a lezione iniziano con ♠ e finiscono con ♠♠

L’inizio di esercizi e/o argomenti svolti a lezione ma non presenti sulle dispense è contraddistinto con • e la fine con ••

Le dispense del Prof.Tauraso sono divise in 4 capitoli. Le pagine da studiare dopo ogni lezione si riferiscono al capitolo relativo

105 min. Lezione del 23/09/2019 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Nozioni di topologia in $\mathbf{R}^n$. Distanza, sfera aperta, sfera chiusa, punto interno, insieme aperto, insieme chuso, punto di frontiera, punto isolato, punto di accumulazione.

Distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$ (o norma di $\underline{x}-\underline{x}'$)

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2\right)^{1/2} \stackrel{\text{def}}{=} \{\|\underline{x}-\underline{x}'\|,\ \text{dist}(\underline{x},\underline{x}'),\ \rho(\underline{x},x')\} \tag{1.1}$$

Se $n=1$ si ottiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_i')^2\right)^{1/2} = |x_1-x_1'|$$

Se $n=2$ si ottiene

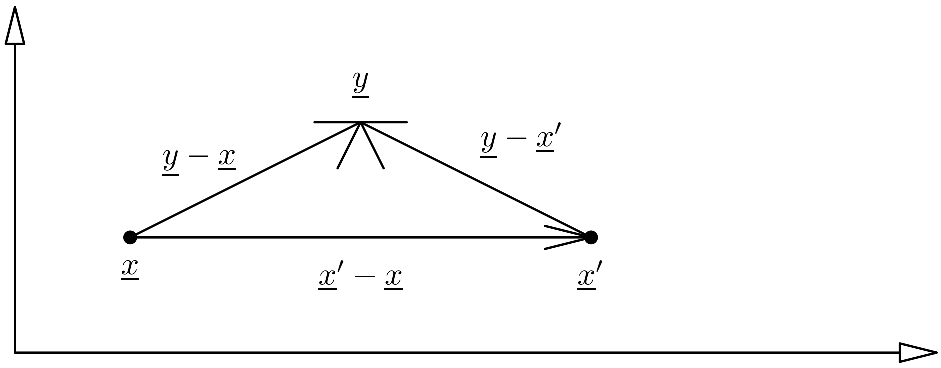
$$\big((x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2\big)^{1/2}$$

che è l’usuale teorema di Pitagora imparato alle scuole medie.

La distanza fra due punti soddisfa

$$\begin{array}{ll} 1)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\|\geq 0, & 2)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\|=0 \iff \underline{x}=\underline{x}' \\ 3)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\|=\|\underline{x}'-\underline{x}\| & 4)\ \|\underline{x}-\underline{x}'\|\leq\|\underline{x}-\underline{y}\|+\|\underline{y}-\underline{x}'\| \end{array}$$

La 4) è la disuguaglianza triangolare disegnata: in un triangolo un lato è minore della somma degli altri due. L’uguaglianza si ha solo quando il triangolo degenera e i lati si allineano lungo un segmento.



Definizione Dato $\underline{x}_o\in\mathbf{R}^n$, e dato un numero reale positivo r, l’insieme

$$B_r(\underline{x}_o)\stackrel{\text{def}}{=}\{\underline{x}\in\mathbf{R}^n : \|\underline{x}-\underline{x}_o\|<r\}$$

si dice *sfera aperta di centro* $\underline{x}_o$ *e raggio* r. A volte la parola "aperta" viene omessa.
L'insieme

$$\overline{B}_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| \le r\}$$

si dice *sfera chiusa di centro* $\underline{x}_o$ *e raggio* r.
L'insieme

$$\partial B_r(\underline{x}_o) \stackrel{\text{def}}{=} \{\underline{x} \in \mathbf{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}_o\| = r\}$$

si dice *frontiera* di $B_r(\underline{x}_o)$
Sia $E \subseteq \mathbf{R}$. Un punto $\underline{x} \in E$ è detto *punto interno ad* E se

$$\exists\ r > 0 :\ B_r(\underline{x}) \subset E$$

Definizione L'insieme dei punti interni ad E è indicato $\overset{\circ}{E}$. Un insieme è detto *aperto*, se tutti i suoi punti sono interni e quindi $E = \overset{\circ}{E}$.

♠ **Esercizio** La *sfera aperta* $B_r(\underline{\xi})$ è un insieme aperto. Infatti se $\underline{x} \in B_r(\underline{\xi})$ allora

$$\left(\sum_{i=1}^n (\xi_i - x_i)^2\right)^{1/2} = d < r$$

Consideriamo ora la sfera aperta $B_{r-d}(\underline{x})$ e quindi

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} < r - d$$

Sia $\underline{y} \in B_{r-d}(\underline{x})$. Abbiamo

$$\left(\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

Eleviamo al quadrato

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i + x_i - \xi_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2 + 2\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i)$$

La disuguaglianza di Cauchy–Schwarz ci dà

$$\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)(x_i - \xi_i) \le \left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2}$$

per cui otteniamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (y_i - \xi_i)^2 &\le \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \left[\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 + \\
&+ 2\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{1/2} = \\
&= \left[\left(\sum_{i=1}^n (y_i - x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \xi_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 = (r - d) + d = r
\end{aligned}$$

♠♠

L'insieme vuoto per definizione è aperto. $\mathbf{R}^n$ e $\emptyset$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi

Definizione *La frontiera di* E, ∂E, *è definita come l'insieme dei punti (non necessariamente appartenenti a* E*) tali che qualunque sia la sfera aperta contenente il punto, tale sfera contiene sia punti di* E *che punti del complementare* E^c.

In formule $\underline{y} \in \partial E$ se

$$\forall\ r > 0,\ B_r(\underline{y}) \cap E \neq \emptyset\ \wedge\ B_r(\underline{y}) \cap E^c \neq \emptyset$$

Un punto $\underline{y} \in \partial E$ può appartenere ad E così come al complementare. La frontiera della sfera aperta appartiene al complementare mentre la frontiera della sfera chiusa apppartiene alla sfera. Per definizione $\partial E = \partial E^c$.

Definizione $\underline{y}$ *è punto di accumulazione per* E *(in simboli* $\underline{y} \in E'$*)* se

$$\forall\ r > 0\ B_r(\underline{y}) \cap E \backslash \{\underline{y}\} \neq \emptyset$$

In altre parole parole, ogni sfera aperta contenente $\underline{y}$, deve contenere almeno un punto di E. In termini di successioni si traduce in

$$\exists\ \{\underline{x}_n\}\ :\ \underline{x}_n \in E,\ \underline{x}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underline{y}\ \wedge\ \forall\ m\ \exists\ n > m : \underline{x}_n \neq \underline{y}$$

Definizione $\underline{y} \in E$ è *punto isolato* se

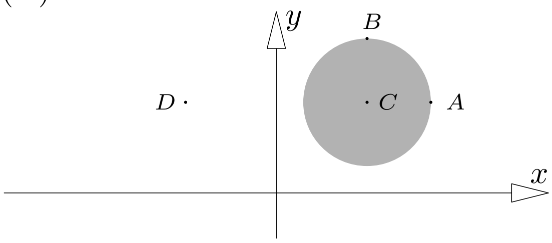
$$\exists\ r > 0 :\ B_r(y) \cap E \backslash \{\underline{y}\} = \emptyset$$

Un punto isolato è necessariamente di frontiera. Un punto di frontiera o è di accumulazione o è isolato.

Definizione $E \cup E'$ è detto *chiusura* di E e si indica con $\overline{E}$. Dunque un insieme è detto *chiuso* se $E = E \cup E' = \overline{E}$ per cui è chiuso se $E' \subset E$.

Un esempio in $\mathbf{R}^2$. Il cerchio in figura è $B_r(C)$, $r = 0.7$, $C = (1, 1)$. I punti A e B sono sia di accumulazione che di frontiera ma non interni. Il punto C è di accumulazione e interno ma non di frontiera

La frontiera dell'insieme $B_r(C) \cup D$ contiene D che non è di accumulazione.



Definizione di limite per funzioni di più variabili.

Definizione *Sia* $\underline{x}_o \in E'$ *e* $l \in \mathbf{R}$. *Diremo che*

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = l \qquad (f(\underline{x}) \xrightarrow[\underline{x}\to\underline{x}_o]{} l) \quad \text{se} \quad \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E \backslash \{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ |f(\underline{x}) - l)| < \varepsilon$$

Per $l = +\infty$ si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = +\infty$ se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E \backslash \{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ f(\underline{x}) > M$

Per $l = -\infty$ si ha $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{x}_o} f(\underline{x}) = -\infty$ se $\forall\ M \in \mathbf{R}\ \exists\ \delta_\varepsilon : \underline{x} \in B_{\delta_\varepsilon}(\underline{x}_o) \cap E \backslash \{\underline{x}_o\}\ \Rightarrow\ f(\underline{x}) < M$

L'esistenza del limite implica che so *ogni* restrizione della funzione il limite faccia zero.

• Esercizio. Dimostrare che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}x = 0$

Svolgimento usiamo il fatto che $f(\underline{x}) \to 0$ se e solo se $|f(\underline{x})| \to 0$ per cui dimostriamo che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}|x| = \lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}|x| = 0$ Ora usiamo $(|x|-|y|)^2 = x^2+y^2-2|x|\cdot|y| \geq 0$ da cui $|x|\cdot|y| \leq (x^2+y^2)/2$. Si ha

$$0 \leq \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2}|x| \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|x| = \frac{|x|}{2}$$

e per il torema del confronto (o dei carabinieri), il limite è zero dal momento che sia la parte sinistra che destra tendono a zero. ••

• Esercizio. Dimostrare che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ non esiste

Svolgimento osserviamo che $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(x, mx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx^2}{x^2(1+m^2)} = \dfrac{m}{1+m^2}$ e quindi il limite dipende dalla restrizione, fatto impossibile se esistesse il limite per $\underline{x} \to \underline{0}$.

Se ripetessimo i calcoli precedenti arriveremmo a

$$0 \leq \frac{|x|\cdot|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}$$

ma stavolta $1/2 \not\to 0$. ••

105 min. Lezione del 24/09/2019 Non presente sulle dispense di Tauraso.

Definizione (derivata parziale) *Il limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(\underline{x}))$$

è la derivata parziale rispetto a x_j $1 \leq j \leq n$ *della funzione calcolata nel punto* $\underline{x}$*. Una funzione è derivabile in* $\underline{x}$ *se ammette tutte le derivate parziali in* $\underline{x}$

La derivata parziale j–esima può essere scritta anche come $\partial_j f(\underline{x})$, $\partial_{x_j} f(\underline{x})$, $f_{x_j}(\underline{x})$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x})$, $D_{\underline{e}_j} f(\underline{x})$. Il vettore applicato in $\underline{x}$ dato da tutte le n derivate parziali verrà scritto come $\underline{\partial} f(\underline{x})$ ed è detto *gradiente (in* $\underline{x}$*)* . Le derivate parziali sono un caso particolare delle *derivate direzionali*

Definizione 2 (derivata direzionale) *Dato il vettore* $\underline{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *tale che* $v_1^2 + v_2^2 + \ldots v_n^2 = 1$*. Il limite*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \ldots, x_n + v_n t) - f(\underline{x}))$$

dicesi derivata direzionale della funzione nel punto $\underline{x}$

Osservazioni *i)* Abbreviando si scrive $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t}(f(\underline{x} + t\underline{v}) - f(\underline{x}))$. La derivata direzionale in $\underline{x}$ (che si badi bene è un numero reale e non un vettore) si indica talvolta con $D_{\underline{v}} f(\underline{x})$. Con $\underline{v} = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$ (1 al j-esimo posto) si ottiene f_{x_j}.

L'espressione $\underline{x} + t\underline{v}$ rappresenta l'equazione parametrica della retta passante per $\underline{x}$ ed avente direzione data da $\underline{v}$. Quindi, al variare di t,

$$f(x_1 + v_1 t, x_2 + v_2 t, \ldots, x_n + v_n t) \stackrel{\text{def}}{=} f(\underline{x} + t\underline{v})$$

è l'insieme dei valori delle ordinate della funzione quando ci si muove sulla retta in questione.

Definizione 3 (differenziabilità) *Una funzione è differenziabile in $\underline{x}$ se esiste $\underline{\alpha} \in \mathbf{R}^n$ tale che accade che*

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x}+\underline{h}) - f(\underline{x}) - \underline{\alpha}\cdot\underline{h})) = 0$$

Se una funzione è differenziabile in ogni punto del suo dominio si dice che è differenziabile

Prendendo la restrizione relativa da $\underline{h} = (h_1, 0, 0, \ldots, 0)$, il limite diventa

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{1}{|h_1|}(f(x_1+h_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n) - \alpha_1 h_1)) = 0$$

e ciò può accadere se e solo se $\alpha_1 = f_{x_1}(\underline{x})$. Ne segue che se una funzione è differenziabile è anche derivabile.

Esercizio Il viceversa non è vero ossia si può avere una funzione derivabile in un punto ma non differenziabile. Sia data la funzione $\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \underline{x}\neq\underline{0} \\ 0 & \underline{x}=\underline{0} \end{cases}$

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

e lo stesso per f_y quindi $f(\underline{x})$ è derivabile nell'origine. Per essere differenziabile deve accadere che

$$\lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{0}+\underline{h}) - f(\underline{0}) - \underline{\partial} f(\underline{0})\cdot\underline{h})) = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{f(\underline{0}+\underline{h})}{\|\underline{h}\|} = \lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} = 0$$

ma è impossibile; basta prendere la restrizione $h_1 = 0$, $h_2 \to 0$.

Esercizio Dimostrazione che

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } |y|\geq x^2 \\ 1 & \text{se } y=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è continua nell'origine.

Esercizio

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\ln(x^2+y^4)}{\sin(xy)} = \frac{2x}{x^2+y^4}\frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2+y^4)\frac{\cos(xy)y}{\sin^2(xy)},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(x^2+y^4)}{\sin(xy)} = \frac{4y^3}{x^2+y^4}\frac{1}{\sin(xy)} - \ln(x^2+y^4)\frac{\cos(xy)x}{\sin^2(xy)}$$

Alcuni studenti hanno chiesto se esiste una strategia per capire se una data funzione ammette limite e/o è continua in un determinato punto. Si possono dare delle linee guida.

1) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste e valga l. In tal caso non resta che dimostrarlo usando i vari teoremi sulla somma, prodotto, quoziente di funzioni. A volte bisogna maggiorare o minorare a seconda dei casi. È il caso della funzione $(x^2y)/(x^2+y^2)$

2) Supponiamo ci si convinca che il limite esiste ma non si sa quanto valga. In tal caso si può prendere una particolare restrizione e calcolare il limite su tale restrizione, diciamo che valga l. A questo punto non resta che dimostrare che il limite è effettivamente l.

3) Ci si convince che il limite non esiste. In tal caso: o si si dimostra che il limite non esiste lungo una particolare restrizione della funzione o si trovano due restrizioni lungo le quali i limiti esistono ma sono diversi

Nel secondo caso rientra la funzione $(xy)/(x^2+y^2)$

105 min. Lezione del 26/09/2019 Non presente sulle dispense di Tauraso.

• Trovare il limite $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} \dfrac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}$. Siccome $x^2y^2 \to 0$ quando $\underline{x} \to \underline{0}$ e siccome $\sin t \sim t$, il comportamento della funzione è all'incirca $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ che evidentemente tende a zero.

$$0 \le \left|\frac{\sin(x^2y^2)}{x^2+y^2}\right| = \frac{|\sin(x^2y^2)|}{x^2y^2}|xy|\frac{|xy|}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{0}} \frac{|\sin(x^2y^2)|}{x^2y^2} = 1, \quad \text{ed anzi} \quad \frac{|\sin(x^2y^2)|}{x^2y^2} \le 1, \qquad \frac{|xy|}{x^2+y^2} \le 1/2$$

Quindi

$$0 \le \frac{|\sin(x^2y^2)|}{x^2y^2}|xy|\frac{|xy|}{x^2+y^2} \le 1|xy|\frac{1}{2} \to 0$$

da cui si deduce che il limite vale zero. ••

• Notare che non è restrittivo studiare sempre il limite $\underline{x} \to \underline{0}$ e verificare, qualora esista, che sia pari a zero. Infatti supponiamo di voler studiare

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = l \quad l \ne 0, \pm\infty$$

Poniamo $\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_0$ e $g(x') = f(\underline{x}_0 + \underbrace{(\underline{x}-\underline{x}_0)}_{x'}) - l$ e quindi possiamo scrivere il limite come

$\lim\limits_{\underline{x}'\to\underline{0}} g(\underline{x}') = 0.$ ••

• Verificare se esiste o meno $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{0}} f(\underline{x})$ dove $f(\underline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{y-x} & \underline{x} \ne \underline{0} \\ 0 & \underline{x} = \underline{0} \end{cases}$

Il limite non esiste. Prendiamo la restrizione $y = x + \sqrt{x}$ ed otteniamo

$$f(x, x+\sqrt{x}) = \frac{x^2 + x^2 + 2x\sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} \to 0$$

Inoltre

$$\lim_{x\to0} f(x, x+x^3) = \lim_{x\to0} \frac{x^2+x^2+2x^4+x^3}{x^3} \nexists$$

e quindi il limite non esiste

Condizioni sufficienti per la differenziabilità

Teorema *Se una funzione ammette derivate parziali in ogni punto di una sfera aperta contenente* $\underline{x}$ *ed inoltre tali derivate sono continue in* $\underline{x}$ *allora la funzione è in quel punto differenziabile*

Dimostrazione Dobbiamo far vedere che $\lim\limits_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{1}{\|\underline{h}\|}(f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})-\underline{\partial} f(\underline{x})\cdot\underline{h})=0$. Scriviamo l'identità

$$
\begin{aligned}
& f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})-\underline{\partial} f(\underline{x})\cdot\underline{h}= \\
&= \underbrace{\Big[f(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)\Big]}_{=f_{x_1}(\xi_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)h_1,\quad x_1+\frac{h_1-|h_1|}{2}<\xi_1<x_1+\frac{h_1+|h_1|}{2}}+ \\
&+ \underbrace{\Big[f(x_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)-f(x_1,x_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)\Big]}_{=f_{x_2}(x_1,\xi_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)h_2,\quad x_2+\frac{h_2-|h_2|}{2}<\xi_2<x_2+\frac{h_2+|h_2|}{2}}+ \\
& \quad\vdots \\
&+ \underbrace{\Big[f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n+h_n)-f(x_1,\dots,x_n)\Big]}_{=f_{x_2}(x_1,\dots,x_{n-1},\xi_n)h_n,\quad x_n+\frac{h_n-|h_n|}{2}<\xi_n<x_n+\frac{h_n+|h_n|}{2}} -\underline{\partial} f(\underline{x})\cdot\underline{h}.
\end{aligned}
$$

Si è usato il teorema del valor medio (Lagrange) per funzioni *di una variabile*

$$f(a)-f(b)=f'(c)(b-a),\quad a<c<b$$

Sommando i termini si ha

$$
\begin{aligned}
& f_{x_1}(\xi_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)h_1-f_{x_1}(x_1,\dots,x_n)h_1+ \\
& f_{x_2}(x_1,\xi_2,x_3+h_3,\dots,x_n+h_n)h_2-f_{x_2}(x_1,\dots,x_n)h_2+ \\
& \vdots \\
& f_{x_n}(x_1,\dots,x_{n-1},\xi_n)h_n-f_{x_n}(x_1,\dots,x_n)h_n
\end{aligned}
$$

La continuità delle derivate prime ci dà

$$|f_{x_1}(\xi_1,x_2+h_2,\dots,x_n+h_n)h_1-f_{x_1}(x_1,\dots,x_n)h_1|\le\varepsilon|h_1|$$

e così per le altre in modo da avere

$$\frac{1}{\|\underline{h}\|}|f(\underline{x}+\underline{h})-f(\underline{x})-\underline{\partial} f(\underline{x})\cdot\underline{h}))|\le\varepsilon\frac{|h_1|+\ldots+|h_n|}{\|\underline{h}\|}\le\varepsilon\sqrt{n}$$

■

Dispense di Tauraso (sezione sugli integrali)

Pag.1,2. Pag.6,7 a partire dal Teorma 4.

105 min. Lezione del 30/09/2019

Teorema 3 pag.5. Esempio 2 pag.8–9

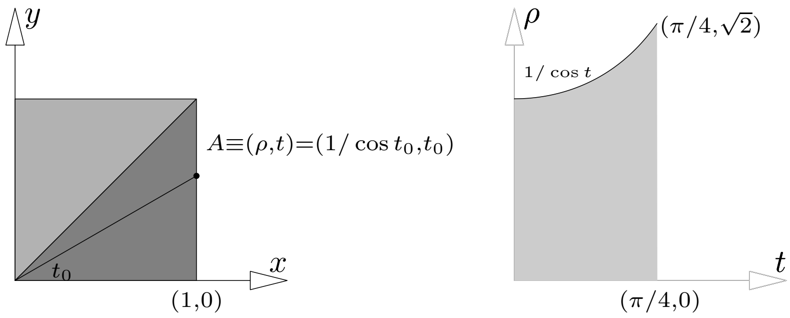
Calcolo dell'area del cerchio di raggio r usando le coordinate cartesiane.

Cambio di variabili da cartesiane a polari piane $x=X(\rho,t)\stackrel{\text{def}}{=}\rho\cos t$, $y=Y(\rho,t)\stackrel{\text{def}}{=}\rho\sin t$

$$\iint_D f(x,y)dx\,dy=\iint_{D'} f(X(\rho,t),Y(\rho,t))\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(\rho,t)}\right|d\rho\,dt=\iint_{D'} f(X(\rho,t),Y(\rho,t))\rho\,d\rho\,dt$$

Uso della formula precedente per il calcolo dell’area del cerchio di raggio r. La formula generale del cambio di coordinate è data da Tauraso a pag. 12–13. Io non l’ho descritta a lezione ma la scriverò caso per caso.

• Calcolare l’area del quadrato usando coordinate polari.



L’area è due volte l’area della metà inferiore.

$$\iint_{\{\underline{x}\in\mathbf{R}^2: x\in[0,1],\ 0\le y\le x\}} dxdy = \iint_{\{(t,\rho)\in\mathbf{R}^2: t\in[0,\pi/4],\ 0\le\rho\le 1/\cos t\}} \underbrace{\rho}_{iacobiano} d\rho\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{1/\cos t} \rho\, d\rho\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos t}}\right] dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = \frac{\tan t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$$

e quindi l’area è due volte la quantità trovata. ••

Esempio 3 pag.9; esempio 7 pag.16

105 min. Lezione del 01/10/2019

• L’esempio di di pag.9 è stato risolto anche considerando D come semplice rispetto all’asse delle x.

$$D = \{\underline{x}: 0 \le y \le 1,\ -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\}$$

per cui

$$V = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} (1-x+y)dx = \int_0^1 dy \left[x - \frac{x^2}{2} + yx\right]_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} = \int_0^1 dy \left(2\sqrt{1-y} + 2y\sqrt{1-y}\right)$$

$$2\int_0^1 dy\sqrt{1-y} = 2\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\Big|_1^0 = \frac{4}{3}$$

$$2\int_0^1 dyy\sqrt{1-y} = 2\int_0^1 dyy\left(-\frac{2}{3}(1-y)^{3/2}\right)' = 2\left[y\frac{-2}{3}(1-y)^{3/2}\right]_0^1 + \frac{4}{3}\int_0^1 dy(1-y)^{3/2} =$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^1 dy(1-y)^{3/2} = \frac{4}{3}\frac{2}{5}(1-y)^{5/2}\Big|_1^0 = \frac{8}{15}$$

La somma delle due quantità dà $\dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{15} = \dfrac{28}{15}$ ••

Esempio 6 pag.15 e 9 pag.19

♠ Calcolare $\displaystyle\iint_D |y - x^2| dx\, dy$ dove D è nell’ordine: i) il quadrato di centro l’origine e lato pari a 2, **[R.12/5]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.41/30]** iii) L’insieme defnito da $x^2 \le |y| \le 1$. **[R.8/5]**

Calcolare $\displaystyle\iint_D |\,x|y| - x^2|dx\,dy$ dove D è il quadrato di centro l'origine e lato lungo 2. **[R.2/3]**

Calcolare $\displaystyle\iint_D |y - x^3|dx\,dy$ dove D è nell'ordine: i) il quadrato di centro l'origine e lato pari a 2, **[R.16/7]** ii) triangolo di vertici $(-1,-1)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, **[R.8/7]** iii) L'insieme defnito da $x^2 \le |y| \le 1$. **[R.8/5]**

Calcolare il volume del seguente insieme $\{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon 0 \le z \le r - \sqrt{x^2+y^2}\}$ (cono) **R.**$\boldsymbol{\pi r^3/3}$

Calcolare il volume dell'insieme in $\mathbf{R}^3$ definito da $x^2+y^2 \le z \le 1+x+y$. **R.**$9\pi/8$ ♠♠

Degli esercizi di Tauraso sugli integrali multipli, fare tutti quelli dal num.1 al num.9

105 min. Lezione del 03/10/2019

Pag.20,21,22.

• Calcolo del volume della sfera di raggio R usando la formula della sezione 2) di pag.21.••

Pag.24 e applicazione al calcolo del volume della sfera di raggio R. Per casa risolvere gli esercizi di Tauraso da 10 a 13.

♠ Calcolo dell'integrale $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\le R^2} |x-y|dxdydz$

Calcolo del volume dell'insieme definito da $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ 4(x-1)^2+2y^2 \ge 1,\quad \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{y^2}{2} \le 9,\ 0 \le z \le x^2+2y^2\}$

Calcolare il volume dell'insieme definito da $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2(x^2+y^2)$ (Si integri per strati)

Calcolo dell'integrale $\displaystyle\iiint_D z^2dx\,dy\,dz$ e $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2(x^2+y^2)$ (Si integri per strati)♠♠

♠ Calcolo del volume dell'insieme definito da $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2(x^2+y^2)$

Si sono usate le coordinate polari sferiche ed il calcolo si trova a pag.298–299 del Marcellini–Sbordone. Ad ogni modo lo riportiamo qui. Dopo aver posto $x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$ osserviamo che $x^2+y^2+z^2 \le 2z$ (sfera piena di centro $(0,0,1)$ e raggio 1) genera $\rho \le 2\cos\vartheta$, mentre $z \le 2(x^2+y^2)$ (paraboloide) genera $\rho \ge \dfrac{\cos\vartheta}{2\sin^2\vartheta}$. Osserviamo che l'insieme di cui vogliamo calcolare il volume giace nel semipiano superiore delle z e quindi $0 \le \vartheta \le \pi/2$. Ciò garantisce che $\cos\vartheta \ge 0$ altrimenti $\rho \le 2\cos\vartheta$, non può essere vera. Inoltre deve essere $\dfrac{\cos\vartheta}{2\sin^2\vartheta} \le 2\cos\vartheta$ da cui $\pi/6 \le \vartheta \le \pi/2$. Quindi l'integrale è $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_{\frac{\cos\vartheta}{2\sin^2\vartheta}}^{2\cos\vartheta} d\rho\,\rho\sin\vartheta = \dfrac{9\pi}{16}$ ♠♠

♠ Calcolare il volume $|V|$ della regione definita da $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon z \ge 5x^2+2y^2-4xy, z \le x+2y+1\}$. [R. $27\sqrt{6}\pi/64$] ♠♠

105 min. Lezione del 07/10/2019

Coordinate cilindriche a pag.25 delle dispense di Tauraso.

• Calcolare il volume dell'insieme $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon z \ge x^2+y^2,\ z \le z_0, z_0 > 0\}$.

Il volume è

$$|V| = \iint_{x^2+y^2\le z_0} dx\,dy((z_0 - x^2 - y^2) = \pi z_0^2/2$$

In coordinate cilindriche parametrizziamo V

$$x = \rho\cos t,\ y = \rho\sin t,\ z = u, \qquad \rho \le \sqrt{u}$$

per cui

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{z_0} du \int_0^{\sqrt{u}} d\rho \underbrace{\rho}_{iacobiano} = \pi z_0^2/2$$

♠ Calcolo del volume dell'insieme definito da $D = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon\ x^2+y^2+z^2 \le 2z,\ 0 \le z \le 2(x^2+y^2)$

Secondo modo. Coordinate cilindriche. $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, $z = u$. La sfera ed il parabolide di intersecano sul piano la cui equazione si ottiene risolvendo il sistema $\{x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0,\ z - 2(x^2 + y^2) = 0\}$. Eliminando $x^2 + y^2$ si ottiene $z = 0$, $z = 3/2$. L'intersezione è una circonferenza di raggio $\sqrt{3/2}$ $\{x^2 + y^2 + z^2 - 2z \le 0$ dà $\rho^2 \le 2u - u^2$ mentre $z \le 2(x^2 + y^2)$ dà $\rho^2 \ge u/2$ e quindi l'integrale è $\displaystyle\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\frac{3}{2}} du \int_{\sqrt{u/2}}^{\sqrt{2u-u^2}} d\rho\,\rho = \frac{9\pi}{16}$ ♠♠

• Volumi di rotazione. Nel piano (z, y) si abbia un insieme chiuso e limitato (ad esempio un poligono) che non intersechi né l'asse z né l'asse y e lo si ruoti intorno all'asse z di α radianti. Il volume della regione ottenuta è

$$\alpha \iint_D y\,dy\,dz$$

Se invece ruotiamo intorno all'asse y abbiamo

$$\alpha \iint_D z\,dy\,dz$$

Ragionamento intuitivo Sia $C_{y,z}$ la circonferenza ottenuta a partire da (y, z) e ruotando di 360 gradi intorno a z. Possiamo pensare che il volume di rotazione sia $\displaystyle\bigcup_{y,z\in D} C_{y,z}$. Un facile disegno mostra che se $(y', z') \ne (y, z)$ allora $C_{y',z'} \cap C_{y,z} = \emptyset$. Per il calcolo del volume dovrei "sommare" la lunghezza di tutte le circonferenze $C_{y,z}$ al variare di (y, z) in D. Ciascuna circonferenza è lunga $2\pi y$ e la "somma" è $\displaystyle\iint_D 2\pi y\,dy\,dz$ appunto.

Se la rotazione avviene intorno all'asse y, allora il volume è

$$2\pi \iint_D z\,dy\,dz$$

Dimostrazione rigorosa nel caso della rotazione intorno all'asse z. Siano (u, v) le coordinate dell'insieme D. Le coordinate (x, y, z) sono $x = u\cos t$, $y = u\sin t$, $z = v$ e l'insieme è

$$V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3\colon (u, v) \in D, x = u\cos t, y = u\sin t, z = v, 0 \le t \le \alpha\}$$

e l'integrale è

$$|V| = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^\alpha dt \iint_D \underbrace{u}_{iacobiano} du\,dv = \alpha \iint_D \underbrace{u}_{iacobiano} du\,dv$$

Esercizio

• Sia dato il volume $V = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}$ avente densità di massa costante δ. Si vuole calcolare il potenziale gravitazionale in un qualsiasi punto dello spazio sia interno che esterno al volume.

Sia $\underline{y}_0 \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ un punto dello spazio. Orientiamo gli assi in modo che il punto $\underline{y}_0$ stia sull'asse z ossia abbia coordinate $(0,0,\zeta)$. Il potenziale generato da V in $\underline{y}_0$ è $I = \displaystyle\iiint_V \frac{\delta dxdydz}{dist(\underline{x},\underline{y}_0)}$.
L'integrale diventa $\delta \displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^r d\rho \frac{\rho^2 \sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}} = \frac{2\pi\delta}{\zeta} \int_0^r d\rho\rho(|\rho+\zeta| - |\rho-\zeta|)$.
Si è usato il fatto che

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\frac{1}{\rho\zeta}\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}\right) = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\rho^2 - 2\rho\zeta\cos\vartheta + \zeta^2}}$$

Ora dobbiamo dividere i due casi $\zeta > r$ e $\zeta \le r$.

Primo caso. Sia $\zeta > r$. L'integrale è $\displaystyle\frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho) = \frac{2\pi\delta}{\zeta}\int_0^r d\rho 2\rho^2 = \frac{4\pi}{3}\delta\frac{r^3}{\zeta}$. Il risultato è quello classico: il potenziale è come se fosse generato da una massa tutta concentrata nell'origine.

Secondo caso. Se $r > \zeta > 0$ otteniamo invece $\displaystyle\frac{2\pi\delta}{\zeta}\left(\int_0^{\zeta} d\rho\rho(\rho + \zeta - (\zeta - \rho) + \int_{\zeta}^{r} (\rho + \zeta - (\rho - \zeta)\right) =$ $2\pi\delta(r^2 - \frac{1}{3}\zeta^2)$ e si può notare che per $\zeta = r$ le due formule coincidono.••

• **Superfici** Sia $\underline{\varphi} \colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ (ci limitiamo a superfici che dipendono da due parametri ed il cui grafico è contenuto in $\mathbf{R}^3$.)

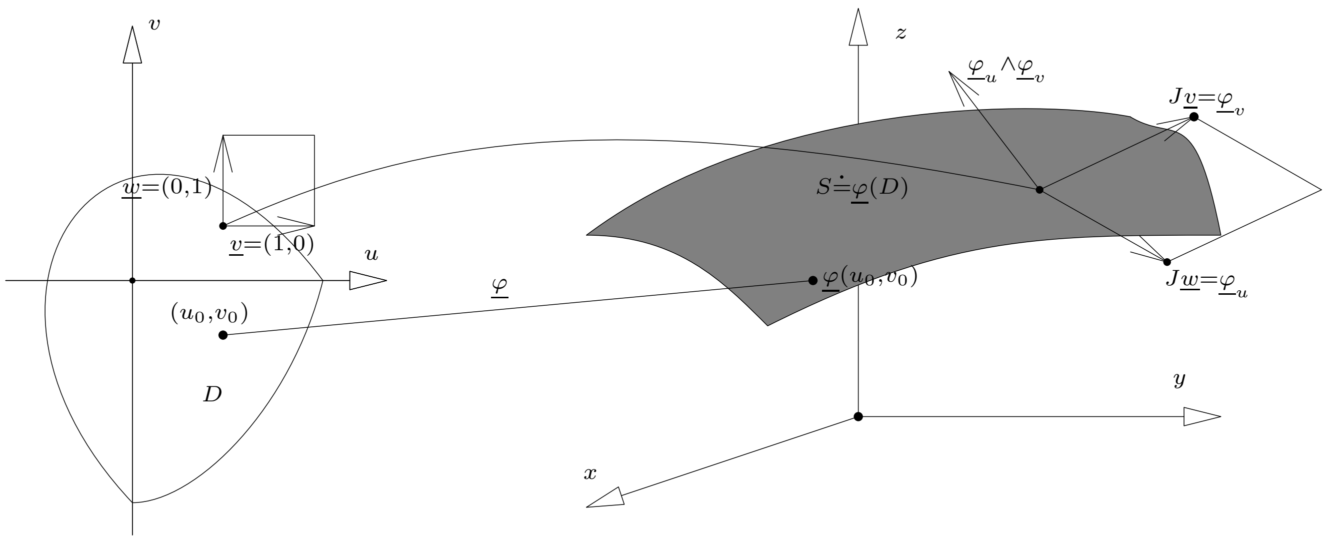
Definizione *Sia $D = \overline{D} = \overset{\circ}{D} \cup \partial D$ un insieme in $\mathbf{R}^2$ e sia $\underline{\varphi}$ una applicazione da D a valori in $\mathbf{R}^3$. $\underline{\varphi} = \overset{\text{def}}{=} (\alpha(u,v), \beta(u,v), \gamma(u,v))$ con le seguenti condizioni: i) $\alpha, \beta, \gamma, \in C^1(D; \mathbf{R})$ ii) il rango della matrice $J = \begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}$ è due iii) $(u,v) \ne (u',v')$ implica $\underline{\varphi}(u,v) \ne \underline{\varphi}(u',v')$ per ogni $(u,v), (u',v') \in \overset{\circ}{D}$*

La *ii)* è equivalente a dire è la somma dei quadrati dei determinanti dei minori di ordine due è non nulla ossia

$$\sqrt{\left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|^2 + \left|\begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|^2} \ne 0$$

La superficie descritta è detta *regolare.*
Sia $I_1 = \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \beta_u & \beta_v \end{pmatrix}\right|$, $I_2 = \left|\begin{pmatrix} \alpha_u & \alpha_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|$, $I_3 = \left|\begin{pmatrix} \beta_u & \beta_v \\ \gamma_u & \gamma_v \end{pmatrix}\right|$

Osservazion1 La matrice J definisce un operatore lineare che manda vettori a due componenti in vettori a tre componenti. Il fatto che il rango della matrice sia due, significa che due vettori linearmente indipendenti vengono mandati in due vettori linearmente indipendenti.



La matrice J applicata al vettore $(1,0)$ produce il vettore $\underline{\varphi}_u \doteq (\alpha_u, \beta_u, \gamma_u)$ mentre applicata al vettore $(0,1)$ produce $\underline{\varphi}_v \doteq (\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$

$$\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \alpha_u & \beta_u & \gamma_u \\ \alpha_v & \beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \underline{i}(\beta_u\gamma_v - \beta_v\gamma_u) - \underline{j}(\alpha_u\gamma_v - \gamma_u\alpha_v) + \underline{k}(\alpha_u\beta_v - \beta_u\alpha_v)$$

per cui il modulo delle componenti del prodotto vettoriale corrispondono a (I_1, I_2, I_3). Il rettangolo definito dai vettori $\underline{\varphi}_u$ e $\underline{\varphi}_v$ giace sul piano tangente alla superficie e la sua area è pari a $\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}$. L'equazione del piano tangente a (x_0, y_0, z_0) è data da $(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot (\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v)(u_0, v_0) = 0$ dove $\underline{x}_0 = \underline{\varphi}(u_0, v_0)$.

I vettori tangenti in un qualsiasi punto $\underline{\varphi}(u_0, v_0)$ sono combinazione lineare dei due vettori $\underline{\varphi}_u(u_0, v_0)$ e $\underline{\varphi}_v(u_0, v_0)$. Infatti prendiamo una curva giacente su $\underline{\varphi}(D)$ ossia $\big(\alpha(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \beta(\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \gamma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\big) \doteq \underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t))$ dove $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ è una curva tale che $\underline{\gamma}(t_0) = (u_0, v_0)$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\underline{\varphi}(\underline{\gamma}(t)) &= \Big(\alpha_u\gamma_1' + \alpha_v\gamma_2', \beta_u\gamma_1' + \beta_v\gamma_2', \gamma_u\gamma_1' + \gamma_v\gamma_2'\Big) = \\ &= \gamma_1'(\alpha_u\underline{i} + \beta_u\underline{j} + \gamma_u\underline{k}) + \gamma_2'(\alpha_v\underline{i} + \beta_v\underline{j} + \gamma_v\underline{k}) \end{aligned}$$

••

Definizione *Si definisce area della superficie l'integrale doppio* $\displaystyle\iint_D dudv \underbrace{\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2}}_{\|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\|}$ ed a volte lo si indica con $\displaystyle\iint_S d\sigma$ dove S è il grafico della superficie in questione.

Si possono risolvere gli esercizi di Tauraso fino a pag.12.

• Nozione di *superficie cartesiana* ossia il grafico della superficie $z = f(x, y)$ $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$. In tal caso la parametrizzazione è del tutto ovvia, $x = \alpha(u, v) = u$, $y = \beta(u, v) = v$, $z = \gamma(u, v) = f(u, v)$. In forma vettoriale si ha $u\underline{i} + v\underline{j} + f(u, v)\underline{k}$; $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$; $\sqrt{I_1^2 + I_2^2 + I_3^2} = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$. Se $f(x, y) \in C^1(D)$ allora la superficie cartesiana soddisfa tutte le tre condizioni $i), ii)$ e $iii)$. Infatti la $i)$ è chiaramente verificata. Per la $ii)$ basta verificare ad esempio che la matrice $\begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inoltre la *iii*) è verificata sempre grazie al fatto che sia la prima che la seconda componente della superficie è data da funzioni iniettive. ••

Formula a pag.30 delle dispense di Tauraso sulll'area di una superficie cartesiana

Calcolo della superficie cartesiana di equazione $z = x^2 + y^2$ con la condizione $z \leq z_0$

Primo modo. Parametrizziando la superficie in coordinate cartesiane si ha

$$\iint_{x^2+y^2\leq z_0} dx\,dy\sqrt{1+4(x^2+y^2)} = \int_0^{\sqrt{z_0}} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta\rho\sqrt{1+4\rho^2} = \frac{\pi}{6}(1+4z_0)^{\frac{3}{2}}$$

Secondo modo. Parametrizziamo la superficie in coordinate cilindriche. Prima parametrizziamo il volume in $\mathbf{R}^3$: $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, $z = u$. $x^2+y^2 = z$ implica $u = \rho^2$ e $x^2+y^2 \leq z_0$ implica $\rho \leq z_0$. Quindi la superficie diventa $x = \rho\cos t$, $y = \rho\sin t$, $z = \rho^2$ da cui

$$\int_0^{2\pi} dt \int_0^{\sqrt{z_0}} d\rho\rho\sqrt{1+4\rho^2}$$

♠ Terzo modo. Coordinate polari sferiche. Il volume è parametrizzato da $x = \rho\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\vartheta$. $x^2+y^2 = z$ ci dà $\rho^2\sin^2\vartheta = \rho\cos\vartheta$ ossia $\rho = \dfrac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$ e quindi la supeficie diventa

$$x = \cot\vartheta\cos\varphi, \quad y = \cot\vartheta\sin\varphi, \quad z = \cot^2\vartheta$$

Inoltre $x^2+y^2 \leq r^2$ diventa $\tan^2\vartheta \geq 1/z_0$ ossia ($\vartheta \in [0,\pi/2)$) $\arctan 1/\sqrt{z_0} \leq \vartheta \leq \pi/2$

$J = \begin{pmatrix} -\frac{\cos\varphi}{\sin^2\vartheta} & -\frac{\sin\varphi}{\tan\vartheta} \\ -\frac{\sin\varphi}{\sin^2\vartheta} & -\frac{\cos\varphi}{\tan\vartheta} \\ -\frac{2\cos\varphi}{\sin^3\vartheta} & 0 \end{pmatrix}$ per cui l'integrale da calcolare è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arctan\frac{1}{\sqrt{z_0}}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}\sqrt{1+4\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}}$$

Poniamo $\dfrac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} = u$ da cui

$$2\pi\int_{\sqrt{z_0}}^0 (-u)\sqrt{1+4u^2}du$$

♠♠

♠ Usando la formula sui volumi di rotazione, calcolare il volume definito dalla relazione $(x^2+y^2+z^2+8)^2 \leq 36(x^2+y^2)$ ♠♠

Solo DOPO aver risolto l'esercizio si consulti
http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/analisi-II-frontale-2015-2016-ing-informatica/Sloluzioni-minicompito-per-casa.pdf

105 min. Lezione del 08/10/2019

• Calcolo dell'area della superficie della sfera di raggio r. Usiamo coordinate polari sferiche. $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\varphi$

$$\iint_S d\sigma = \iint_D \|\underline{\varphi}_\varphi \wedge \underline{\varphi}_\vartheta\| d\vartheta\,d\varphi \underbrace{=}_{D=[0,\pi]\times[0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi d\vartheta r^2\sin\vartheta = 4\pi r^2$$

••

• Calcolo del potenziale elettrico generato da una sfera in un punto interno ed esterno alla sfera.

Sia S la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=r^2$ (vuota all'interno). $\underline{y}_0 \equiv (\xi,\eta,\zeta)$ un punto dello spazio. Il potenziale nel punto $\underline{y}_0$ generato da un "pezzettino" della sfera intorno al punto della sfera $\underline{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ è dato da (δ è la densità di carica elettrica o gravitazionale ossia densità di massa che assumiamo costante)

$$\frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)} = \frac{\delta \|\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v\| dudv}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)} =$$

Il potenziale generato dalla sfera in $\underline{y}_0$ è $I = \displaystyle\iint_S \frac{\delta d\sigma}{dist(\underline{x}_0,\underline{y}_0)}$. Con la parametrizzazione in coordinate polari *avente l'asse z posto lungo la retta congiungente il centro di V con il punto* $\underline{y}_0$, l'integrale diventa

$$r^2\delta\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{r^2-2r\zeta\cos\vartheta+\zeta^2}} = \frac{2\pi r\delta}{\zeta}(|r+\zeta|-|r-\zeta|)$$

Se $\zeta > r$ abbiamo $I=\frac{4\pi r^2\delta}{\zeta}=\frac{Q}{\zeta}$ dove $Q=4\pi r^2$ è la carica della superficie sferica. Se $\zeta < -r$ la formula è la stessa $I=\frac{Q}{-\zeta}$. Se $|\zeta|<r$ abbiamo $I=4\pi\delta r$. Come si vede, in ambedue i casi le dimensioni del risultato sono pari a una massa fratto una distanza. Inoltre all'interno della sfera non vi è campo elettrico ossia un corpo materiale non sarebbe soggetto ad alcuna forza. ••

♠ **Una soluzione alternativa dell'esercizio 12 a pag.8 dell'eserciziario di Tauraso**
Poniamo $x=0$. Le equazione dei due cilindri diventano $y^2\le r^2$, $z^2\le r^2$. Ne segue che l'insieme il cui volume stiamo cercando, si proietta ad $x=0$ nell'insieme $|y|\le r$ e $|z|\le r$ che è un quadrato di lato $2r$ (chiaramente nel piano $x=0$). Se $0\le x_0\le r$ si proietta nel quadrato di lato $2\sqrt{r^2-x_0^2}$ Integrando per strati il volume è quindi $\displaystyle\int_{-r}^{r} 4(r^2-x_0^2)dx_0=\frac{16}{3}r^3$. ♠♠

♠ Si calcoli l'area della superficie che contorna l'insieme $x^2+z^2\le r^2$, $x^2+y^2\le r^2$.

Soluzione

Parametrizziamo la superficie $x^2+y^2=r^2$ nella parte $y\ge 0$ come

$$\begin{cases} x=t, \ -r\le t\le r \\ z=s, \ -\sqrt{r^2-t^2}\le s\le \sqrt{r^2-t^2} \quad [\text{viene da } \mathrm{x}^2+\mathrm{z}^2\le \mathrm{r}^2] \\ y=\sqrt{r^2-t^2}, \end{cases}$$

Nella parte $y\le 0$ abbiamo

$$\begin{cases} x=t, \ -r\le t\le r \\ z=s, \ -\sqrt{r^2-t^2}\le s\le \sqrt{r^2-t^2} \quad [\text{viene da } \mathrm{x}^2+\mathrm{z}^2\le \mathrm{r}^2] \\ y=-\sqrt{r^2-t^2}, \end{cases}$$

e la somma degli integrali dà $\displaystyle\iint_{t^2+s^2\le r^2} d\sigma = 2\int_{-r}^{r} dt \int_{-\sqrt{r^2-t^2}}^{\sqrt{r^2-t^2}} ds \frac{r}{\sqrt{r^2-t^2}} = 8r^2.$

Poi bisogna parametrizzare quella parte di superficie che giace sul cilindro $x^2+z^2=r^2$ e quindi

$$\begin{cases} x=t, \ -r\le t\le r \\ y=s, \ -\sqrt{r^2-t^2}\le s\le \sqrt{r^2-t^2} \quad [\text{viene da } \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2\le \mathrm{r}^2] \\ z=\sqrt{r^2-t^2}, \end{cases}$$

Nella parte $y \le 0$ abbiamo

$$\begin{cases} x = t, \ -r \le t \le r \\ y = s, \ -\sqrt{r^2 - t^2} \le s \le \sqrt{r^2 - t^2} \quad [\text{viene da } \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 \le \mathrm{r}^2] \\ z = -\sqrt{r^2 - t^2}, \end{cases}$$

La somma degli integrali dà lo stesso contributo per cui il risultato finale è $16r^2$.

Un secondo modo di calcolare la superficie è il seguente. Parametrizziamo il cilindro $x^2+y^2 = r^2$ come $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = u$ la cui normale esterna è diretta parallelamente al piano (x, y) ed ha modulo r. $x^2+z^2 \le r^2$ ci dà $u^2 \le r^2 \sin^2 t$. L'area che cerchiamo è $2 \cdot r \cdot \int_0^\pi dt \int_{-r\sin t}^{r \sin t} du = 8r^2$. Cosiderando anche l'altra superficie, quella appartenente al cilindro di equazione $x^2+z^2 = r^2$ si ha il risultato. ♠♠

Curve, Integrali curvilinei Pag.1, esempio 2) pag.2, esempio 3 pag.3, Pag.4

A ricevimento, alcuni studenti volevano risolvere l'esercizio 13 a pag.9 usando coordinate polari sferiche. Gli interessati cerchino di capire perché in tal caso si ottiene

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\cos\vartheta} d\rho \rho^2 \cos^2\vartheta \rho^2 \sin\vartheta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho\rho^2 \cos^2\vartheta\rho^2 \sin\vartheta = \frac{59}{480}\pi$$

105 min. Lezione del 10/10/2019 (Integrali curvilinei)

Dimostrazione della formula

$$\int_a^b f(\underline{r}(t))\|\underline{r}'(t)\|dt$$

come area della superficie parametrizzata da $x = r_1(t)$, $y = r_2(t)$, $z = v$, $a \le t \le b$, $0 \le v \le f(\underline{r}(t))$ e applicando la formula degli integrali di superficie

$$\iint_D f(x, y)d\sigma$$

Nozione di vettore tangente di una curva $\underline{\gamma}(t)$ $\underline{T} = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))/\|\underline{\gamma}'\|$ e vettore normale $\underline{N} = (\gamma_2(t), -\gamma_1(t))/\|\underline{\gamma}'\|$

Ultime due righe di pag.3 (nozione di curva tangente)

Esempi 1) e 2) pag.5

• Data la curva seguente curva $y = \gamma_1(t)$, $z = \gamma_2(t)$, $a \le t \le b$, si calcoli l'area della superficie ottenuta ruotando la curva intorno all'asse z. La superficie ottenuta si parametrizza come

$$x = \gamma_1(t)\cos\vartheta, \quad y = \gamma_1(t)\sin\vartheta, \quad z = \gamma_2(t), \quad a \le t \le b, \quad 0 \le \vartheta \le 2\pi$$

La superficie è

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_a^b \sqrt{\gamma_1^2((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2)}dt = 2\pi \int_a^b |\gamma_1| \cdot \|\underline{\gamma}'\|dt \doteq 2\pi \int_{\underline{\gamma}} |\gamma_1|ds$$

e come si vede abbiamo ottenuto l'integrale lungo la curva della lunghezza della circonferenza di raggio $\gamma_1(t)$. Il risultato può anche desumersi applicando la formula dell'area di una superficie. Sia $\underline{\varphi}(t, \vartheta) = (x, y, z) = (\gamma_1(t)\cos\vartheta, \gamma_1(t)\sin\vartheta, \gamma_2(t))$

$J = \begin{pmatrix} \gamma_1' \cos t & -\gamma_1 \sin t \\ \gamma_1' \sin t & \gamma_1 \cos t \\ \gamma_2' & 0 \end{pmatrix}$ La radice quadrata della somma dei quadrati dei minori (altri non è che $\|\underline{\varphi}_t \wedge \underline{\varphi}_\vartheta\|$) è $\sqrt{(\gamma_1\gamma_1')^2 + \gamma_1^2(\gamma_2')^2 \sin^2 t + \gamma_1^2(\gamma_2')^2 \cos^2 t} = |\gamma_1| \sqrt{(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2}$

Se ruotiamo intorno all'asse z abbiamo

$$x = \gamma_2(t) \cos\varphi, \quad y = \gamma_1(t), \quad z = \gamma_2(t) \sin\varphi, \quad a \le t \le b, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

e la superficie è La superficie è

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \sqrt{\gamma_2^2((\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2)} dt = 2\pi \int_a^b |\gamma_2| \cdot \|\underline{\gamma}'\| dt \doteq 2\pi \int_{\underline{\gamma}} |\gamma_2| ds$$

Applicazione della precedente formula all'area della semisuperficie superiore sferica di raggio r. ••

Pag.7,

• Dimostrare che $\int_{\underline{\gamma}} |xy| ds$ non cambia valore se l'integrale viene eseguito sulla curva $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, e sulla curva $\underline{\sigma}(t) = \underline{\gamma}(-t)$, $-2\pi, \le t \le 0$. ••

105 min. Lezione del 14/10/2019 (Integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali)

Pag.11,

Dimostrazione che $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ per $\underline{\gamma}(t)$, $a \le t \le b$, allora l'integrale sulla curva $\underline{\gamma}(-t)$, $-b \le t \le -a$ è uguale a $-\int_{\underline{\gamma}} \omega$.

Date le due forme $\omega = xdx \pm ydy$ calcolare $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ sulle tre curve $\underline{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le \pi/2$, $\underline{\gamma}_2(t) = (-t, 1+t)$, $-1 \le t \le 0$, e $\underline{\gamma}_3(t)$ con $\underline{\gamma}_3(t)$ unione delle due curve date da $(1, t)$ $0 \le t \le 1$ e $(-t, 1)$ $-1 \le t \le 0$.

Data la forma $\omega = xdx + 2ydy$, calcolare $\int_{\underline{\gamma}} \omega$ sulle curve $\underline{\gamma}_1$ e $\underline{\gamma}_3$ precedenti.

Nozione di forma differenziale esatta. Pag.17 e Teorema 2 pag.15.

105 min. Lezione del 15/10/2019 (Integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali)

Da pag.16, paragrafo 4 a pag.25 compresa

A intergrazione delle dispense di Tauraso, si esaminino le quattro righe prima dell'esempio 15 di pag.24. Prendiamo l'insieme *semplicemente connesso* $\mathbf{R}^2 \backslash \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : x = 0, y < 0\}$ (tutto il piano tranne il semiasse non positivo delle ordinate). Anche in tale insieme deve esistere il potenziale della forma differenziale $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ ma, evidentemente, *non può essere* $U(x, y) = \arctan(y/x)$

Il potenziale è $U(x, y) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \pi/2, & x = 0, y \ge 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & x < 0 \end{cases}$

Gli studenti scrivano le derivate parziali della funzione $U(x,y)$, verifichino che le derivate sono esse stesse funzioni continue e verifichino che in ogni punto del dominio $U_x(x,y) = -y/(x^2+y^2)$, $U_y(x,y) = x/(x^2+y^2)$ Evidentemente il dominio non può essere esteso fino a togliere il semiasse di cui sopra. Se così fosse, la forma sarebbe esatta in tutto il suo dominio $\mathbf{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ ma sappiamo ciò impossibile.

105 min. Lezione del 17/10/2019 (Integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali)

Data una forma differenziale esatta in $D \subseteq \mathbf{R}^2$, $\omega = a(\underline{x})dx + b(\underline{x})dy$, per trovare il potenziale si può risolvere $U_x = a(\underline{x})$, $U_y = B(\underline{x})$ oppure scrivere

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t,y_0)dt + \int_{y_0}^{y} b(x,t)dt$$

Chiaramente si ha $U_y = b(x,y)$ e

$$U_x = a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} b_x(x,t)dt = a(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} a_y(x,t)dt = a(x,y_0) + a(x,y) - a(x,y_0) = a(x,y)$$

Lemma di Gauss-Green a pag.26–27. Bisogna solo memorizzare le formule: 1) e 2) a pag.27. Pag.32 da “Osservazione” fino alla fine e applicazione alla curva data da $(x^2+y^2)^{3/2} + 2y^2 = x^2+y^2$.

105 min. Lezione del 21/10/2019 (Integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali, numeri complessi)

Problema 5) del compito A del 22/06/2019. Problema 6) del compito del 18/06/2019.

Generalità sui numeri complessi. Soluzioni della equazione $z^n = w$ con $w, z \in \mathbf{C}$

105 min. Lezione del 22/10/2019 (Integrali curvilinei di seconda specie, forme differenziali, numeri complessi)

Pag.1–9

105 min. Lezione del 24/10/2019 (funzioni complesse)

Pag.10–11. Secondo esempio (funzione z^2) della pagina 12. Pag.13-14 fino a osservazione.Pag.15–19 fino a esempio 15 escluso.

105 min. Lezione del 28/10/2019 (serie)

Generalità sulle serie. Pag.23–25

Teoremi del confronto: 1) $0 \le a_k \le c_k$ e $\sum c_k$ convergente, implica $\sum a_k$ convergente, 2) $0 \le d_k \le a_k$ e $\sum d_k$ divergente, implica $\sum a_k$ divergente.

105 min. Lezione del 29/10/2019

Pag.26, 27, 28

In aula è stato dimostrato che $\lim\limits_{k\to+\infty} (1/k!)^{-1/k} = +\infty$ quindi $\lim\limits_{k\to+\infty} (k!)^{1/k} = +\infty$ (senza usare la formula di Stirling).

Prima dimostrazione

$$(k!)^{1/k} = \exp\Big\{\frac{1}{k}\ln k!\Big\} = \exp\Big\{\frac{1}{k}\sum_{p=1}^{k}\ln p\Big\}$$

$(p-(p-1))\cdot\ln p \ge \displaystyle\int_{p-1}^{p}\frac{dx}{x}$. Basta osservare: 1) il grafico della funzione $\ln x$, 2) $(p-(p-1))\cdot\ln p$ è l'area del rettangolo di altezza $\ln p$ e per base il segmento $[p-1,p]$)

$$\ln 2+\ldots+\ln k > \int_1^2\frac{dx}{x}+\ldots+\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}=\int_1^k\frac{dx}{x}=(x\ln x-x)\Big|_1^k = k\ln k-k+1$$

quindi

$$(k!)^{1/k} > \frac{k\ln k-k+1}{k}\to+\infty$$

Seconda dimostrazione Sia k pari.

$$k! = k(1\cdot(k-1))(2\cdot(k-2))(3\cdot(k-3))\cdots(\frac{k}{2}-1)(\frac{k}{2}+1)\ge\prod_{j=\frac{k}{4}}^{\frac{k}{2}} j(k-j)$$

Ora $f(p)=p(k-p)$ è una parabola concava e quindi $f(p)\ge\frac{k}{4}\frac{3}{4}k$ per ogni $p\ge k/4$ da cui

$$\prod_{j=\frac{k}{4}}^{\frac{k}{2}} j(k-j)\ge\Big(\frac{3}{16}k^2\Big)^{\frac{k}{2}+1}\implies\Big(\prod_{j=\frac{k}{4}}^{\frac{k}{2}} j(k-j)\Big)^{\frac{1}{k}}\ge\Big(\frac{3}{16}k^2\Big)^{\frac{k}{2k}+\frac{1}{k}}\to+\infty$$

Se k è dispari allora $k! = k(k-1)!$ e $k-1$ è pari.

105 min. Lezione del 31/10/2019 pag.29, 30, 31

105 min. Lezione del 04/11/2019 pag.33 paragrafo 6. Pag.34 dal Teorema 9, pag.35, pag.37, pag.38 osservazione in fondo. Pag.41 e 42 fino al paragrafo 2) escluso

• Data la funzione $\dfrac{z}{(z+i)(3+z)}$ si calcoli lo sviluppo di Taylor centrato nell'origine

$$=\sum_{k=0}^{+\infty} z^k\frac{(-)^k}{3+i}\Big(\frac{i}{(-i)^{k+1}}+\frac{3}{3^{k+1}}\Big)\quad |z-i|<1$$

Si calcoli lo sviluppo di Laurent centrato nell'origine e con $1<|z|<3$

$$f(z)=A\sum_{k=0}^{+\infty}(-)^k\frac{(-i)^k}{z^{k+1}}+B\sum_{q=0}^{+\infty}(-)^q\frac{z^q}{3^{q+1}}\ \text{con } A=i/(3+i),\ B=3/(3+i).$$

Scrivere la serie di Laurent sentrata in $z=i$ e convergente in $|z-i|<|i-3|$

$$=\frac{i}{i+3}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{i+3}\sum_{k=0}^{+\infty}(z-i)^k a_k\ \text{dove}\ a_k=\frac{(-)^k}{(3+i)^k}+\frac{i(-)^{k+1}}{(3+i)^{k+1}}=\frac{3(-)^k}{(3+i)^k}\ \bullet\bullet$$

• Scomposizione in fattori primi irriducibili della espressione $x^{12}+1$ senza passare attraverso i numeri complessi.

Si parte con $x^2+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$ per scrivere $(x^4)^3+1=(x^4+1)(x^8-x^4+1)$. Poi $x^4+1=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$

$x^8-x^4+1=(x^8+2x^4+1)-3x^4=(x^4+1)^2-3x^4=(x^4-\sqrt{3}x^2+1)(x^4+\sqrt{3}x^2+1)$ ossia $\Big((x^2+1)^2-(2+\sqrt{3})x^2\Big)\Big((x^2+1)^2-(2-\sqrt{3})x^2\Big)=(x^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}x+1)(x^2+\sqrt{2+\sqrt{3}}x+1)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{3}}x+1)(x^2+\sqrt{2-\sqrt{3}}x+1)$. Dunque alla fine abbiamo ottenuto

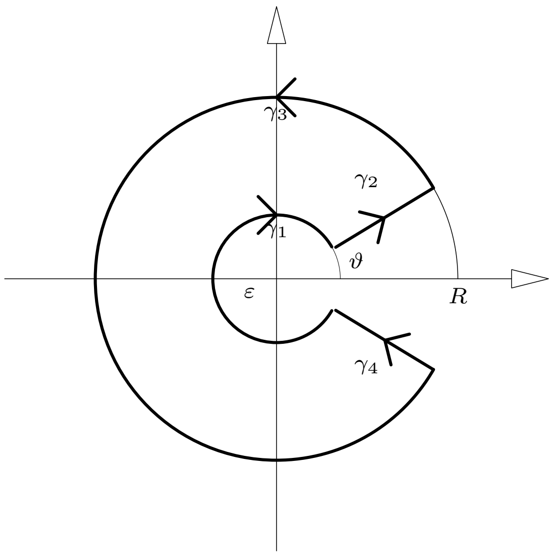
$$\frac{1}{x^{12}+1}=\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{(x^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}x+1)(x^2+\sqrt{2+\sqrt{3}}x+1)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{3}}x+1)(x^2+\sqrt{2-\sqrt{3}}x+1)}$$

Ai fini dell'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^{12}+1}$ bisogna poi scomporre in fratti semplici e quindi trovare le dodici costanti tali che $\displaystyle\frac{1}{x^{12}+1}=\sum_{k=1}^{6}\frac{A_k+xB_k}{(x^2+a_kx+1)}$ dove le costanti a_k compaiono nei denominatori. ••

105 min. Lezione del 05/11/2019 Pag.42 par.2, pag.43 paragrafo 3). Esempio 19 pag.44. Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2\cos(ax)}{x^4+b^4}dx$

• Calcolo di $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$ (a lezione si è calcolato $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$, ma la procedura è la stessa, vedi dopo)



$$
\begin{aligned}
&\gamma_2(t)=te^{i\vartheta}\quad \varepsilon\le t\le R\\
&\gamma_3(t)=Re^{it}\quad \vartheta\le t\le 2\pi-\vartheta\\
&\gamma_4(t)=-te^{i(2\pi-\vartheta)}\quad -R\le t\le -\varepsilon\\
&\gamma_1(t)=\varepsilon e^{-it}\quad \vartheta-2\pi\le t\le -\vartheta
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}\to\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}$ con $z=|z|e^{i\vartheta}$ $0\le\vartheta<2\pi$.

Si esegua $\displaystyle\lim_{\vartheta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\oint_\gamma\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dx$ con $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3\cup\gamma_4$ e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_1}\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz=\lim_{\vartheta\to0}\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{R\to+\infty}\oint_{\gamma_3}\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz=0$$

Ad esempio

$$\left|\int_{\gamma_1}\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz\right|=\left|\int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta}\underbrace{(-i\varepsilon e^{-it})dt}_{dz}\frac{\varepsilon^{1/2}e^{-it/2}}{(1+\varepsilon^2e^{-i2t})^2}\right|\le\int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta}|(-i\varepsilon e^{-it})|dt\frac{|\varepsilon^{1/2}|\cdot|e^{-it/2}|}{|1+\varepsilon^2e^{-i2t}|^2}\le$$

$$\underbrace{\le}_{\varepsilon\le1/2}\int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta}\frac{\varepsilon^{3/2}}{1/2}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}0$$

$$\left|\int_{\gamma_3}\frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2}dz\right|=\left|\int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\underbrace{(iRe^{it})dt}_{dz}\frac{R^{1/2}e^{it/2}}{(1+R^2e^{i2t})^2}\right|\le\int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta}\frac{R^{\frac32}dt}{(|R|^2-1)^2}=\frac{R^{3/2}}{(|R|^2-1)^2}(2\pi-2\vartheta)$$

e tende a zero per $R \to +\infty$. Si è usato il fatto che $|z + z'| \geq \big|\, |z| - |z'| \,\big|$

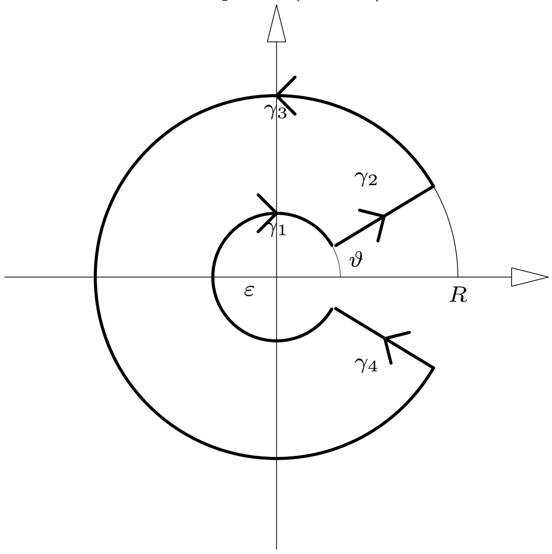
$$\oint_{\gamma_4} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \underbrace{-e^{i(2\pi-\vartheta)}dt}_{dz} \frac{(-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^{1/2}}{(1-t^2e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} \underbrace{=}_{\tau=-t} \int_{\varepsilon}^{R} e^{-i(2\pi-\vartheta)}(-d\tau)\frac{\sqrt{\tau}e^{-i(\pi-\vartheta/2)}}{(1+\tau^2e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{R} e^{-i(2\pi-\vartheta)} d\tau \frac{\sqrt{\tau}e^{-i\vartheta/2}}{(1+\tau^2 e^{-i(4\pi-2\vartheta)})^2} \xrightarrow[\varepsilon,\vartheta\to 0,\ R\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx$$

Quindi $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z^2)^2} dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i \left(\mathrm{Res}_{z=-i} f(z) + \mathrm{Res}_{z=i} f(z)\right)$

Otteniamo $2\pi i \lim\limits_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{z}}{(z+i)^2} + 2\pi i \lim\limits_{z\to -i} \frac{d}{dz} \frac{\sqrt{z}}{(z-i)^2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$ ••

♠ Calcolo di $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} dx,$



$$\gamma_2(t) = te^{i\vartheta} \quad \varepsilon \leq t \leq R$$
$$\gamma_3(t) = Re^{it} \quad \vartheta \leq t \leq 2\pi - \vartheta$$
$$\gamma_4(t) = -te^{i(2\pi-\vartheta)} \quad -R \leq t \leq -\varepsilon$$
$$\gamma_1(t) = \varepsilon e^{-it} \quad \vartheta - 2\pi \leq t \leq -\vartheta$$

$\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} \to \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2}$ con $z = |z|e^{i\vartheta}$ $0 \leq \vartheta < 2\pi$.

Si esegua $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \lim\limits_{R\to+\infty} \oint_{\gamma} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dx$ con $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ e si dimostri che

$$\lim_{\vartheta\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = \lim_{\vartheta\to 0} \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{R\to+\infty} \oint_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = 0$$

Ad esempio

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz \right| = \left| \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \underbrace{(-i\varepsilon e^{-it})dt}_{dz} \frac{\varepsilon^{1/2} e^{-it/2}}{(1+\varepsilon e^{-it})^2} \right| \leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} |(-i\varepsilon e^{-it})| dt \frac{|\varepsilon^{1/2}| \cdot |e^{-it/2}|}{|1+\varepsilon e^{-it}|^2} \leq$$

$$\underbrace{\leq}_{\varepsilon\leq 1/2} \leq \int_{\vartheta-2\pi}^{-\vartheta} \frac{\varepsilon^{3/2}}{1/2} dt \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$$

$$\left| \int_{\gamma_3} \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz \right| = \left| \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \underbrace{(iRe^{it})dt}_{dz} \frac{R^{1/2} e^{it/2}}{(1+Re^{it})^2} \right| \leq \int_{\vartheta}^{2\pi-\vartheta} \frac{R^{\frac{3}{2}} dt}{(|R|-1)^2} = \frac{R^{3/2}}{(|R|-1)^2}(2\pi - 2\vartheta)$$

e tende a zero per $R\to+\infty$. Si è usato il fatto che $|z+z'|\geq\big||z|-|z'|\big|$

$$\oint_{\gamma_4}\frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2}dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\underbrace{-e^{i(2\pi-\vartheta)}dt}_{dz}\frac{(-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^{1/2}}{(1-te^{-i(2\pi-\vartheta)})^2}\underbrace{=}_{\tau=-t}\int_{\varepsilon}^{R}e^{-i(2\pi-\vartheta)}(-d\tau)\frac{\sqrt{\tau}e^{-i(\pi-\vartheta/2)}}{(1+\tau e^{-i(2\pi-\vartheta)})^2}=$$

$$=\int_{\varepsilon}^{R}e^{-i(2\pi-\vartheta)}d\tau\frac{\sqrt{\tau}e^{-i\vartheta/2}}{(1+\tau e^{-i(2\pi-\vartheta)})^2}\xrightarrow[\varepsilon,\vartheta\to0,\ R\to+\infty]{}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx$$

Quindi $\lim\limits_{\vartheta\to0}\lim\limits_{\varepsilon\to0}\lim\limits_{R\to+\infty}\oint_{\gamma}\frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2}dx=2\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2}dx=2\pi i\mathrm{Res}_{z=-1}f(z)=2\pi i\frac{d}{dz}\sqrt{z}\Big|_{z=e^{i\pi}}=$ $2\pi i\frac{1}{2}\frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}}=\pi$

Si badi bene: se si fosse scritto $2\pi i\mathrm{Res}_{z=-1}f(z)=2\pi i\frac{d}{dz}\sqrt{z}\Big|_{z=e^{-i\pi}}=2\pi i\frac{1}{2}\frac{1}{e^{i\frac{-\pi}{2}}}=-\pi$ ed è chiaramente sbagliato. Il motivo per cui bisogna prendere $-1=e^{i\pi}$ è dovuto al fatto che gli angoli sono maggiori di zero e minori di 2π. ♠♠

♠ Calcolare $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x\sqrt{x}}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac13}(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac15}(1+x^2)}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac14}}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(x+1)(1+x^2)}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}}{(x+1)(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^3}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{(1+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{-2}{3}}}{1+x^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{(1+x+x^2)^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x+x^2}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^4}dx$, $\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}}{1+x^6}dx$, ♠♠

Per gli esponenti diversi da $1/2$, vedere i compiti del precedente anno accademico

Calcoliamo $I\doteq\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x^4}dx$. Procedendo come sopra otteniamo

$$2I=2\pi i\sum\mathrm{Res}\frac{\sqrt{z}}{1+z^4}$$

La funzione $\frac{\sqrt{z}}{1+z^4}$ ha quattro poli di ordine 1 nei punti $z_k=e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{2\pi k}{4}}$ $k=0,1,2,3$. In z_0 il residuo

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\sqrt{z}(z-z_0)}{z^4}\underbrace{=}_{l'Hopital}\lim_{z\to z_0}\frac{\sqrt{z}}{4z^3}=\lim_{z\to z_0}\frac{-z^{3/2}}{4}=\frac{-z_0^{3/2}}{4}=-\frac{e^{3i\pi/8}}{4}$$

Poi otteniamo $-\frac{e^{9i\pi/8}}{4}=\frac{e^{i\pi/8}}{4}$, $-\frac{e^{15i\pi/8}}{4}=-\frac{e^{-i\pi/8}}{4}$, $-\frac{e^{21i\pi/8}}{4}=-\frac{e^{5i\pi/8}}{4}=\frac{e^{-3i\pi/8}}{4}$. Quindi

$$2I=\frac{2\pi i}{4}\left[e^{i\pi/8}-e^{-i\pi/8}-e^{3i\pi/8}+e^{-3i\pi/8}\right]=\frac{i\pi}{2}\left[2i\mathrm{Im}(e^{i\pi/8})-2i\mathrm{Im}(e^{3i\pi/8})\right]=$$

$$=\pi\left[\sin\frac{3\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}\right]=2\pi\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}=2\pi\frac{\sqrt{2-\sqrt2}}{2}\frac{\sqrt2}{2}$$

In questo caso sarebbe possibile anche usare il cammino di pag.41. Sul semiasse positivo la parametrizzazione è la stessa. Sul semicerchio l'integrale tende a zero. Sul semiasse negativo la parametrizzazione è $\gamma(t) = -te^{i\pi}$ $-R \le t \le 0$ e

$$\int_{-R}^{0} (-dte^{i\pi}) \frac{\sqrt{-te^{i\pi}}}{1 + (-te^{i\pi})^4} \underbrace{=}_{\tau=-t} \int_{R}^{0} (-d\tau) \frac{\sqrt{\tau} e^{i\pi/2}}{1+\tau^4} = i \int_0^R d\tau \frac{\sqrt{\tau}}{1+\tau^4}$$

Quindi

$$(1+i)I = 2\pi i \left[\mathrm{Res} \frac{\sqrt{z}}{1+z^4}\Big|_{z=z_0} + \mathrm{Res} \frac{\sqrt{z}}{1+z^4}\Big|_{z=z_1} \right] = 2\pi i \left[-\frac{e^{3i\pi/8}}{4} + \frac{e^{i\pi/8}}{4} \right] =$$
$$= 2\pi i \left[\frac{e^{i\pi/8}}{4} - \frac{e^{i\pi/2 - i\pi/8}}{4} \right] = 2\pi i \left[\frac{e^{i\pi/8}}{4} - i \frac{e^{-i\pi/8}}{4} \right] = \frac{\pi i}{2} \left[\cos\frac{\pi}{8} + i \sin\frac{\pi}{8} - i\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} \right] =$$
$$= \frac{\pi}{2} \left[\cos\frac{\pi}{8}(i+1) - \sin\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8} \right] = \frac{\pi}{2} \left[\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8} \right] (1+i)$$

$$I = \frac{\pi}{2} \left[\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}) - \cos\frac{\pi}{8} \right] = \frac{\pi}{2} \left[\sin\frac{3\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} \right]$$

♠ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+b^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^2+bx+b^2} dx$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(ax)}{x^4+b^4} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^4+b^4} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+b^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+ax+a^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2+ax+a^2} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)} dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{(x^2+ax+a^2)(x^2+bx+b^2)} dx$,
♠♠

105 min. Lezione del 07/11/2019

• Calcolo dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^3+a^3}$ $(a > 0)$ Si adotti lo stesso cammino "a pacman" della lezione precedente e si integri la funzione $\dfrac{z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3}$. Si ottiene

$$-2\pi i \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+a^3} = 2\pi i \sum Res \frac{z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3}$$

$z^3 = -a^3$ per $z_0 = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ $z_1 = ae^{i\pi}$, $z_2 = ae^{i\frac{5}{3}\pi}$. Si ottiene

$$-I = \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3} + \lim_{z\to z_1} \frac{(z-z_1)z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3} + \lim_{z\to z_2} \frac{(z-z_2)z\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3} = \sum_{i=0}^{2} \frac{\mathrm{Ln}(z_i)}{3z_i} =$$
$$= \frac{1}{3} \left[\frac{\ln a + i\frac{\pi}{3}}{a} e^{-i\frac{\pi}{3}} + \frac{\ln a + i\pi}{a} e^{-i\pi} + \frac{\ln a + i\frac{5\pi}{3}}{a} e^{-i\frac{5\pi}{3}} \right] =$$
$$= \frac{\ln a}{3a} \cdot 0 + \frac{1}{3a} \left[\frac{i\pi}{3}(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) - i\pi + \frac{i5\pi}{3}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) \right] \implies I = \frac{2}{9a}\pi\sqrt{3}$$

Osservazione Si sarebbe sbagliato prendendo $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

In tale classe di integrali rientrano quelli della forma $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, P, Q polinomi, $Q(x) \neq 0$, e $P(x)/Q(x)$ funzione non pari. Se fosse pari opereremmo $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ e useremmo il cammino di pagina 41 delle dispense di Tauraso.••

♠ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(x^3+1)},\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(x+1)},\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x^2-x+1)},$
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)(x^2+x+1)}.\ \int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(x^2+x+1)}.$
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3+a^3}dx\ a>0\ \int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^2+a^2}dx\ \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\ln x}{x^3+a^3}dx\ a>0$
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}\ln x}{x^2+a^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}\ln x}{x^2+a^2}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}\ln x}{(x^2+a^2)^2}dx\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}\ln x}{(x^2+a^2)^2}dx,$
$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}\ln x}{x^3+a^3}dx\ a>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}\ln x}{x^3+a^3}dx\ a>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac23}\ln x}{x^4+a^4}dx,\ \int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac13}\ln x}{x^4+a^4}dx$
♠♠

• Valor principale di un integrale (V.P.) (non presente sulle dispense di Tauraso e non so se è presente nelle videolezioni; ne dubito).

La nozione di V.P. viene da Cauchy ed infatti sono anche detti integrali secondo Cauchy. Conviene partire con l'esempio ($a<0$, $b>0$) $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x}=\lim_{r\to0^-}\int_a^r\frac{dx}{x}+\lim_{s\to0^+}\int_s^b\frac{dx}{x}$ **Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma** e nessuno dei due esiste.

Cambiamo ora prescrizione

$$\lim_{r\to0^+}\left(\int_a^{-r}\frac{dx}{x}+\int_r^b\frac{dx}{x}\right)=\lim_{r\to0^+}(\ln(r)-\ln(-a)+\ln(b)-\ln r)=\ln\frac{b}{|a|}$$

Si pone $s=-r$, si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite e come si vede, risulta un ben preciso valore.

Se invece di $1/x$ si fosse preso $1/|x|$, anche l'integrale con il V.P. non avrebbe dato un risultato finito. Infatti avremmo ottenuto

$$\lim_{r\to0^+}\left(\int_a^{-r}\frac{dx}{-x}+\int_r^b\frac{dx}{x}\right)=\lim_{r\to0^+}(-\ln(r)+\ln(-a)+\ln(b)-\ln r)\xrightarrow[r\to0^+]{}+\infty$$

La nozione di V.P. si estende anche ad integrali impropri su tutto l'asse reale. Si voglia calcolare ad esempio l'integrale

$I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+x+1}dx$. La sua definizione è la seguente

$$I=\lim_{B\to-\infty}\int_B^0 f(x)dx+\lim_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)dx$$

Si eseguono gli integrali, poi si eseguono i due limiti e poi si somma .

È facile verificare che sia il primo che il secondo limite tendono a $+\infty$ per cui l'integrale improprio non esiste. Infatti ad esempio il secondo dà

$$\frac12\ln(A^2+A+1)-\frac{1}{\sqrt3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow[A\to+\infty]{}+\infty$$

È inessenziale calcolare il secondo integrale ai fini della verifica dell'esitenza dell'integrale improprio.

Cambiamo prescrizione ed eseguiamo

$$\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{-A}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{A} f(x)dx\right)$$

Si pone $B=-A$, si eseguono gli integrali, si somma e poi si esegue il limite

In tal caso si ottiene

$$-\frac{1}{2}\ln(A^2-A+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}\ln(A^2+A+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow[A\to+\infty]{}-\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

Esercizio

$$\begin{aligned}J &\doteq \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=\\ &=\int_{-\infty}^{-1}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx+\int_{-1}^{1}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx+\int_{1}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx\doteq I_1+I_2+I_3\end{aligned}$$

I_2 non è in realtà un intgrale improprio in quanto $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$ ed inoltre

$$\left|\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}\right|\le\frac{1}{x^3}$$

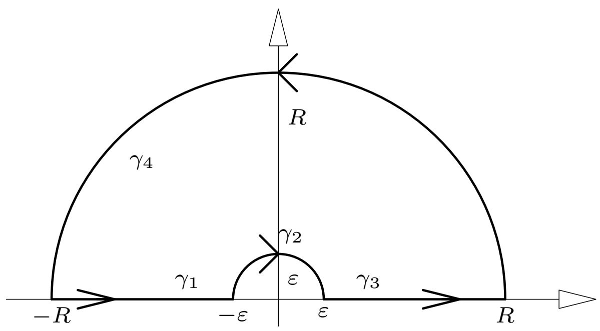
per cui anche I_1 ed I_3 convergono. L'integrale improprio J dunque esiste ma per poterlo calcolare dobbiamo scrivere la formula

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx=\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

ed a questo punto l'origine diventa un punto di singolarità per la funzione da cui la necessità di definire l'integrale solo come valor principale ossia

$$VP\ \mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$$

Il cammino su cui integrare è il seguente se $a>0$ e quello opposto (che gira in senso orario) se $a<0$.



Eseguendo gli integrali e prendendo i limiti $\varepsilon\to 0$ $R\to+\infty$, si ottiene

$$\oint_\gamma\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}dz\xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)-i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0}$$

e quindi

$$\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)-i\pi\frac{e^{iaz}}{z^2+b^2}\Big|_{z=0}=2\pi i Res\left(\frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}\right)=2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib}$$

da cui

$$\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)=2\pi i\frac{e^{iaib}}{ib2ib}+i\frac{\pi}{b^2}=i\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$$

La parte immaginaria è $\frac{\pi}{b^2}\left(1-e^{-ab}\right)$ ed è il valore dell'integrale cercato. Notare che per $a\to 0$, il risultato tende a zero come ci aspettiamo che sia ponendo $a=0$ nell'integrale originale. Se invece $b\to 0$, il risultato è illimitato come ci si aspetta dal fatto che l'integrale originario diventa un integrale improprio non convergente.

Sulla base di alcune domande rivolte a ricevimento da alcuni studenti, esplicito gli integrali

$$\Big|\int_{\gamma_4}f(z)dz\Big|=\Big|\int_0^{\pi}\frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}(R^2e^{2it}+b^2)}Rie^{it}dt\Big|=\Big|\int_0^{\pi}\frac{e^{iaR(\cos t+i\sin t)}}{Re^{it}(R^2e^{2it}+b^2)}Rie^{it}dt\Big|=$$

$$=\Big|\int_0^{\pi}\frac{e^{iaR\cos t}e^{-aR\sin t}}{(R^2e^{2it}+b^2)}dt\Big|\le\int_0^{\pi}\frac{|e^{iaR\cos t}e^{-aR\sin t}|}{|R^2e^{2it}+b^2|}dt=\int_0^{\pi}\frac{|e^{-aR\sin t}|}{|R^2e^{2it}+b^2|}dt\underbrace{\le}_{0\le t\le\pi}$$

$$\le\int_0^{\pi}\frac{1}{|(R^2e^{2it}+b^2)|}dt\underbrace{\le}_{R>b}\int_0^{\pi}\frac{1}{|(R^2-b^2)|}dt=\frac{\pi}{R^2-b^2}\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$\int_{\gamma_1}f(z)dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iat}}{t(t^2+a^2)}dt,\qquad\int_{\gamma_3}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iat}}{t(t^2+a^2)}dt$$

$$\int_{\gamma_2}f(z)dz=\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it}(\varepsilon^2e^{i2t}+b^2)}(-i)\varepsilon e^{-it}dt=\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{(\varepsilon^2e^{i2t}+b^2)}(-i)dt\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\frac{-i\pi}{b^2}$$

Ove non fosse chiaro, siamo passati da $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)}dx$ **a** $\displaystyle\mathrm{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+b^2)}dx\right)$ **in quanto** $\sin z$, **è illimitata sia nel semipiano superiore che nel semipiano inferiore e quindi ci sarebbe impossibile usare la variabile complessa ••**

♠ Esercizi sul valor principale. $\displaystyle VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x(ax^2+bx+c)}dx$ con $b^2-4ac<0$.

$az^2+bz+c=0$ se e solo se $z_{1,2}=\dfrac{-b\pm i\sqrt{4ac-b^2}}{2a}\doteq\dfrac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ e $z_1-z_2=i\sqrt{-\Delta}/a$.

$$I=\frac{i\pi}{c}+2\pi i Res(\frac{1}{z(az^2+bz+c)})\Big|_{z=z_1}=\frac{i\pi}{c}+2\pi i\lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z_1(z-z_1)(z-z_2)}=$$

$$=\frac{i\pi}{c}+\frac{2\pi i}{a\frac{i\sqrt{-\Delta}}{a}\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}}=\frac{i\pi}{c}+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi}{-b+i\sqrt{-\Delta}}=\frac{i\pi}{c}+\frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\frac{4a\pi(-b-i\sqrt{-\Delta})}{4ac}=$$

$$=\frac{-\pi b}{\sqrt{4ac-b^2c}}$$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\mathrm{Im}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx\right)=\pi\frac{a}{|a|},$$

Svolgimento Sia $a>0$. Il cammino è uguale ai precedenti con gli stessi nomi dati alle stesse curve.

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx=\mathrm{Im}\left(VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x}dx\right)$$

$$\Big|\int_{\gamma_4}f(z)dz\Big|=\Big|\int_0^{\pi}\frac{e^{iaRe^{it}}}{Re^{it}}Rie^{it}dt\Big|=\Big|\int_0^{\pi}e^{iaR(\cos t+i\sin t)}idt\Big|\le\int_0^{\pi}e^{-aR\sin t}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt$$

Ora osserviamo che $\sin t\ge(2t)/\pi$ con $0\le t\le\pi/2$ La minorazione segue dalla concavità di $\sin t$ per $0\le t\le\pi/2$ e quindi giace sopra la secante che collega i punti $(0,0)$ con $(\pi/2,1)$. Ne segue

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-aR\sin t}dt\le 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\frac{-aR2t}{\pi}}dt=\frac{\pi}{aR}(1-e^{-aR})\to 0\ per\ R\to+\infty$$

A lezione ho semplicemente detto: dato il segno di a, (ad esmpio positivo) per stabilire se chiudere sopra o sotto prendiamo $z=iR$ (chiudiamo sopra) e scriviamo $e^{iaz}=e^{-aR}\to 0$. Non ho però eseguito l'integrale lungo γ_4.

$$\int_{\gamma_1}f(z)dz+\int_{\gamma_3}f(z)dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{e^{iat}}{t}dt+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{e^{iat}}{t}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0,R\to+\infty]{}VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iat}}{t}dt$$

$$\int_{\gamma_2}f(z)dz=\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{ia\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon e^{-it}}\varepsilon(-i)e^{-it}dt\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}-i\pi$$

Riunendo i contributi abbiamo

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iat}}{t}dt-i\pi=2\pi i\sum\mathrm{Res}f(z)=0$$

da cui il risultato prendendo la parte immaginaria.

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{iax}-e^{ix}}{x^2(x^2+b^2)}dx=\pi\frac{1-a}{b^2}+\frac{\pi}{b^2}(e^{-b}-e^{-ab})$$
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2-x+1)}dx=\pi+\frac{2\pi}{\sqrt3}e^{\frac{-a\sqrt3}{2}}\sin\left(\frac a2-\frac\pi3\right)$$
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}(|b|-|a|),\qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x(x^2+bx+b^2)}dx,$$
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos ax}{x(x^2-x+1)}dx=\frac{2\pi}{\sqrt3}e^{\frac{-a\sqrt3}{2}}\cos\left(\frac a2-\frac\pi3\right),\quad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x(4a^2x^2-\pi^2)}dx$$
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-1)(x^2+1)}dx\qquad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(\pi x)-\sin(2\pi x)}{x^2(x^3+a^3)}dx$$
$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(ax)}{x(4a^2x^2+\pi^2)}dx\quad VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi x/a)-\sin^2(2\pi x/a)}{x^2(x^3+a^3)}dx$$

Svolgiamo $VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi x}{a}-\sin^2\frac{2\pi x}{a}}{x^2(x^3+a^3)}dx=VP\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos\frac{2\pi x}{a}-1+\cos\frac{4\pi x}{a}}{x^2(x^3+a^3)}dx$

$$VP\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\frac{1}{x(x^3+a^3)}dx=i\pi\left[\lim_{x\to0}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3+a^3}\right]+$$
$$+i\pi\left[\lim_{x\to-a}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\lim_{x\to-a}\frac{1}{x^2+ax+a^2}\right]+2\pi i\mathrm{Res}\frac{-e^{\frac{2\pi ix}{a}}+e^{\frac{4\pi ix}{a}}}{x}\frac{1}{x(x^3+a^3)}\Big|_{z=ae^{i\pi/3}}=$$
$$=i\pi\frac{2\pi i}{a^4}+2\pi i\left(\frac{1}{6a^4}(i\sqrt3-1)\cosh\frac{\sqrt3}{2}\right)=\frac{-2\pi^2}{a^4}+\frac{\pi}{3a^4}(-\sqrt3-i)\cosh\frac{\sqrt3}{2}$$

e l'integrale è $\dfrac{-\pi^2}{a^4}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{3a^4}\cosh\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

Svolgimento (prima maniera) L'integrale improprio converge in quanto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1$, e $|\dfrac{\sin^2 x}{x^2}|\leq 1/x^2$

Integriamo per parti

$$\frac{-\sin^2 x}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(2x)}{x}dx=\pi$$

Seconda maniera Scriviamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}dx=VP\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1-\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\cos(2x)}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{x^2}dx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\right)-\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx+\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{Re}(e^{i2x})}{x^2}dx\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{2i\varepsilon e^{-it}}(-i)\varepsilon e^{-it}}{\varepsilon^2 e^{-2it}}dt+\underbrace{\int_0^{+\pi}\frac{e^{2iRe^{it}}}{R^2e^{2it}}Rie^{it}dt}_{\to 0\ per\ R\to+\infty}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{2}{\varepsilon}+\mathrm{Re}\int_{-\pi}^{0}\frac{-ie^{it}}{\varepsilon}(1+2i\varepsilon e^{-it}+O(\varepsilon^2))\right]=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{2}{\varepsilon}-\frac{2}{\varepsilon}+2\pi+O(\varepsilon^2)\right)=\pi$$

Nel passaggio dal quinto al sesto uguale si è applicato il teorema dei residui. ♠♠

♠ Calcolare $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$

Svolgimento (prima maniera) Sappiamo che $\sin^3 x=(3\sin x-\sin(3x))/4$ e l'integrale improprio converge per le stesse motivazioni di prima.

$$VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin(3x)}{x^3}dx=\mathrm{Im}\left(VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{ix}-e^{i3x}}{x^3}dx\right)$$

Passiamo alla funzione complessa $f(z)=\dfrac{3e^{iz}-e^{i3z}}{z^3}$ e integriamo secondo il cammino di pag.24

$$\int_{\gamma_1}f(z)dz=\int_{-R}^{-\varepsilon}f(t)dt\xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$$

$$\int_{\gamma_3}f(z)dz=\int_{\varepsilon}^{R}f(t)dt\xrightarrow[R\to+\infty]{\varepsilon\to 0}\int_{0}^{\infty}f(x)dx$$

$$\int_{\gamma_4}f(z)dz=\int_0^{\pi}\frac{3e^{iRe^{it}}-e^{3iRe^{it}}}{R^3e^{3it}}Rie^{it}dt\xrightarrow[R\to+\infty]{}0$$

$$\int_{\gamma_2}f(z)dz=\int_{-\pi}^{0}(-i)\varepsilon e^{-it}\frac{3e^{i\varepsilon e^{-it}}-e^{3i\varepsilon e^{-it}}}{\varepsilon^3e^{-3it}}dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{0}(-i)e^{2it}\frac{3+3i\varepsilon e^{-it}-\frac{3\varepsilon^2}{2}e^{-i2t}-1-i3\varepsilon e^{-it}+\frac{9}{2}\varepsilon^2e^{-2it}+O(\varepsilon^3)}{\varepsilon^2}=-3i\pi+O(\varepsilon)$$

Sappiamo che $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i\sum \text{Res} f(z) = 0$ e quindi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{R\to+\infty}\sum_{i=1}^{3}\int_{\gamma_i} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx - 3i = 0 \implies \text{Im}\left(VP\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3e^{ix}-e^{i3x}}{x^3}dx\right) = \frac{3\pi}{4}$$

seconda maniera

Integrando per parti si ha $\displaystyle I = -\frac{1}{2}\frac{\sin^3 x}{x^2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin^2 x\cos x}{x^2}dx$. L'integrale è uguale a $\displaystyle\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}dx$ ed integrando di nuovo per parti si ottiene $\displaystyle -\frac{3}{2}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-\sin x+3\sin x\cos^2}{x}dx = -\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x} + \frac{9}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x-\sin^3 x}{x}dx =$ $\displaystyle = 3\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx - \frac{9}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{4x}dx = (3-\frac{27}{8}+\frac{9}{8})\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx =$ $\displaystyle\frac{3}{4}\pi$

♠♠

• Calcolare gli integrali $\displaystyle\oint\frac{Imz}{1+z^2}dz$ e $\displaystyle\oint\frac{Rez}{1+z^2}dz$ estesi al segmento di estremi $-2-2i$ e $2+2i$ ed alla semicirconferenza di raggio $2\sqrt{2}$ che collega i precedenti punti. Il cammino è percorso in senso antiorario.

Soluzione solo del primo

Il segmento è parametrizzato da $z(t) = 2(1+i)t$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{2t}{1+4(2i)t^2}2(1+i)dt = \int_{-1}^{1}\frac{4(1+i)t}{1+8it^2}dt = \frac{1+i}{4i}\text{Ln}(1+8it^2)\Big|_{-1}^{1} = 0$ in quanto l'argomento del logaritmo assume lo stesso valore agli estremi. La parte di semicerchio è data da $z(t) = 2\sqrt{2}e^{it}$ e l'integrale diventa $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{2\sqrt{2}\sin t}{1+8e^{2it}}2\sqrt{2}ie^{it}dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{e^{it}-e^{-it}}{1+8e^{2it}}4e^{it}dt$. Cambiamo variabile $2t = u$ per cui $\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}du\frac{e^{iu}-1}{1+8e^{iu}}$. Ora poniamo $e^{iu} = w$ ed otteniamo

$$2\oint_{|w|=1}\frac{w-1}{1+8w}\frac{dw}{iw} = \frac{2}{i}\left[\lim_{w\to 0}\frac{w-1}{1+8w} + \lim_{w\to -1/8}\frac{(w+1/8)(w-1)}{w(1+8w)}\right] = \frac{2}{i}\left(-1+1+\frac{1}{8}\right)$$

e moltiplicando per $2\pi i$ si ottiene $\pi/2$

Arrivati a $\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}du\frac{e^{iu}-1}{1+8e^{iu}}$ si potrebbe pure procedere

$\displaystyle 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}du\frac{e^{iu}-1}{1+8e^{iu}} = \frac{1}{4i}\text{Ln}(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}du\frac{e^{-iu}}{e^{-iu}+8} = \frac{1}{4i}\text{Ln}(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} + \frac{2}{i}\text{Ln}(e^{-iu}+$ $\displaystyle 8)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{2\pi i}{4i} - 0 = \frac{\pi}{2}$

Con $\displaystyle\oint\frac{Re(z)}{1+z^2}dz$ si ha $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} i\frac{e^{it}+e^{-it}}{1+8e^{2it}}4e^{it}dt = i\frac{\pi}{2}+0.$

Come conseguenza otteniamo $\oint \frac{Re(z)+iIm(z)}{1+z^2}dz = \oint \frac{z}{1+z^2}dz = i\pi$. L'ultimo integrale si può risolvere anche attraverso il teorema di Cauchy scrivendo $\oint \frac{z}{1+z^2}dz = \oint \frac{dz}{2(z-i)} + \frac{dz}{2(z+i)}$. Il secondo integrale è zero lasciando la curva fuori il punto $z=-i$. Il primo integrale è pari a $2\pi i\frac{1}{2}$.

Osservazione È importante notare come sarebbe un errore scrivere $\frac{1}{4i}\mathrm{Ln}(1+8e^{iu})\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} = \frac{1}{4i}\mathrm{Ln}(1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}) - \frac{1}{4i}\mathrm{Ln}(1+8e^{i\frac{\pi}{2}}) = 0$ in quanto non si tiene conto del fatto che la curva $1+8e^{i\frac{5}{2}\pi}$ gira intorno all'origine al contario della curva $e^{-iu}+8$ ••

Nella parte finale del Giornale delle lezioni dell'A.A.2015/2016 c'è la soluzione di un certo numero d'esercizi d'esame di Tauraso

105 min. Lezione del 11/11/2019

Pag.39 (Osservazione riguardante il punto all'infinito); esempi 16 e 17.

• Utilizzare il terorema 11 a pag.39 per risolvere il seguente esercizio: trovare i primi quattro valori interi p per cui è diverso da zero l'integrale $\oint_{|z|=4} \frac{z^p}{z(z-1)(z^2-4)(z^3-27)}dz$ ••

Trasformata di Laplace Pag.1,2,3 fino a esempio 3). Dimostrazione che $\lim\limits_{\mathrm{Re}p\to+\infty} F(p)=0$ dove $F(p)$ è la trasformata di Laplace di $f(t)$.

105 min. Lezione del 12/11/2019 Proprietà 3) pag.4, Proprietà 5),7) pag.5, Paragrafo 2) pag.8, Pag.9, Pag.11 e 12 fino a Esempio 6 escluso.

Si risolva l'equazione differenziale $x''(t)+\alpha^2 x(t) = \sin(\omega t)$ $x(0)=a$, $x'(0)=b$ al variare di α nei reali con ω reale $(\alpha,\omega>0)$.

$\mathcal{L}\big(x''(t)+\alpha^2x(t)-\sin(\omega t)\big)=0$ da cui, detta $F(p)=\mathcal{L}(f(t))$
$\alpha\neq\omega$.

$$p^2F(p)-ap-b+\alpha^2F(p) = \frac{\omega}{\omega^2+p^2} \implies F(p) = \frac{ap+b}{p^2+\alpha^2} + \frac{\omega}{(\omega^2+p^2)(\alpha^2+p^2)}$$

$$F(p) = \frac{ap+b}{p^2+\alpha^2} + \frac{\omega}{\omega^2-p^2}\left(\frac{1}{\alpha^2+p^2} - \frac{1}{\omega^2+p^2}\right)$$

$$x(t) \doteq \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = a\cos\alpha t + \frac{b}{\alpha}\sin\alpha t + \frac{\omega}{\omega^2-\alpha^2}(\sin\alpha t - \sin\omega t)$$

Se $\alpha=\omega$ si ha

$$F(p) = \frac{ap+b}{p^2+\omega^2} + \frac{\omega}{(\omega^2+p^2)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(\omega^2+p^2)^2}\right) = \left(\mathrm{Res}\frac{e^{pt}}{(\omega^2+p^2)^2}\Big|_{p=i\omega} + \mathrm{Res}\frac{\omega e^{pt}}{(\omega^2+p^2)^2}\Big|_{p=-i\omega}\right) =$$
$$= \frac{te^{i\omega t}}{-4\omega^2} - \frac{2e^{i\omega t}}{-i8\omega^3} + \frac{te^{-i\omega t}}{-4\omega^2} - \frac{2e^{-i\omega t}}{i8\omega^3} = -\frac{t\cos\omega t}{2\omega^2} + \frac{1}{2\omega^3}\sin\omega t$$

e quindi

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}F(p) = a\cos\omega t + \frac{b}{\omega}\sin\omega t + -\frac{t\cos\omega t}{2\omega} + \frac{1}{2\omega^2}\sin\omega t$$

105 min. Lezione del 14/11/2019

• Equazione differenziale $mx''(t) = A\delta(t-t_0)$, $t_0 > 0$, e $x(0) = a$, $x'(0) = b$.

$\mathcal{L}(x')(p) = \mathcal{L}(x)(p) - a$, $\mathcal{L}(x'')(p) = p\mathcal{L}(x',)(p) - x'(0) = p^2\mathcal{L}(x)(p) - pa - b$, $\mathcal{L}(\delta(t-t_0)) = e^{-pt_0}$ per cui l'equazione diventa

$$mp^2\mathcal{L}(x)(p) - mpa - mb = Ae^{-pt_0} \implies \mathcal{L}(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{Ae^{-pt_0}}{mp^2}$$

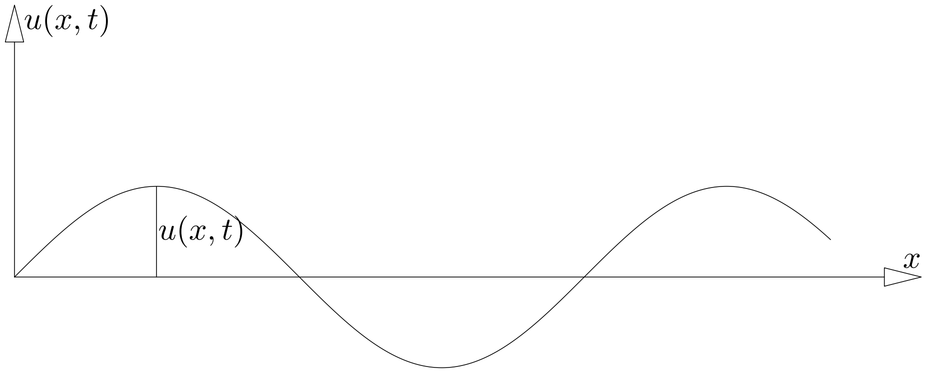
e quindi

$$x(t) = a + bt + \frac{A}{m}(t-t_0)u(t-t_0)$$

Sarebbe un grave errore, tale da invalidare l'esercizio in sede d'esame, scrivere $x(t) = a + bt + \frac{A}{m}(t-t_0)$

Risoluzione della seguente equazione alle derivate parziali

• $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad x > 0, t > 0, a > 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$



$v(x,p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt}u(x,t)dt \doteq \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - pu_t(x,0) = p^2 v(x,p)$.

$$\mathcal{L}(u_x(0,t)) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}u_x(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty} e^{-pt}u(x,t)dt\Big|_{x=0} \stackrel{\text{def}}{=} v_x(0,p) = Be^{-pT}$$

per cui nella variabile $v(x,p)$ il sistema diventa $\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} = \alpha e^{\frac{(\text{Re}p + i\text{Im}p)x}{a}} + \beta e^{-\frac{(\text{Re}p+i\text{Im}p)x}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \leq Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = -\dfrac{aB}{p}e^{-pT}$. Quindi otteniamo $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p) = -aBH(t - T - \dfrac{x}{a})$ che rappresenta uno scalino di ampiezza $-aB$ viaggiante verso destra con velocità a. Dato un punto di ascissa x, per un tempo $t < t_x \stackrel{\text{def}}{=} T + \dfrac{x}{a}$ si ha $u(x,t) = 0$. Passato t_x si ha $u(x,t) = -aB$. $H(t-t_0)$ è la funzione a scalino in t_0. ••

Esercizi

♠ a) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0, \ u_t(x,0) = 0, \ u(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x,t))$. La variabile x fa da “spettatore” e non viene coinvolta nella trasformata di Laplace.

$$\mathcal{L}(u_t(x,t)) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p),$$
$$\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - pu_t(x,0) = p^2 v(x,p)$$

$\mathcal{L}(u(0,t)) \overset{\text{def}}{=} v(0,p) = Be^{-pT}$ per cui rispetto a $v(x,p)$ l'equazione differenziale alle derivate parziali diventa l'equazione differenziale ordinaria

$$\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$$

e la soluzione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. La condizione iniziale ci dice che $\beta = Be^{-pT}$ e quindi la soluzione è $v(x,p) = Be^{-pT-\frac{xp}{a}}$. Quindi otteniamo $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = B\delta(t-T-\dfrac{x}{a})$ che rappresenta un impulso (è chiaramente una approssimazione) viaggiante verso destra con velocità a. Dopo il passaggio dell'impulso il punto torna nello stato di quiete.

La soluzione del sistema $\begin{cases} a^2 v'' - p^2 v = 0 \\ v(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ può ricercarsi anche attraverso l'uso della trasformata di Laplace. Va osservato però che l'equazione è del secondo ordine ma disponiamo solo della condizione iniziale su $v(0,p)$. La condizione su $v_x(0,p)$ la lasciamo indicata e ce la “giochiamo” al momento giusto. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p) \overset{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p “fa sempre da spettatore”). $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2 h(s,p) - sBe^{-pT} - v_x(0,p)$ per cui l'equazione ordinaria diventa

$$a^2 s^2 h(s,p) - sa^2 Be^{-pT} - a^2 v_x(0,p) - p^2 h(s,p) = 0 \implies h(s,p) = \frac{sa^2 Be^{-pT} + a^2 v_x(0,p)}{a^2 s^2 - p^2}$$

Facendo l'antitrasformata di Laplace si ottiene

$$v(x,p) = v.p.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} e^{sx} h(x,s) ds = \frac{B}{2} e^{-pT}(e^{\frac{p}{a}x} + e^{-\frac{p}{a}x}) + \frac{v_x(0,p)a}{2p}\left(e^{\frac{p}{a}x} - e^{-\frac{p}{a}x}\right)$$

Poiché vogliamo che la soluzione soddisfi la condizione $|u(x,t)| \le Me^{M't}$ per ogni $x > 0$, con costanti M ed M' positive si deve avere $\dfrac{B}{2} e^{-pT} e^{\frac{p}{a}x} + \dfrac{v_x(0,p)a}{2p} e^{\frac{p}{a}x} = 0$ da cui $v_x(0,p) = -\dfrac{Bp}{a} e^{-pT}$ e quindi $v(x,p) = Be^{-pT-\frac{p}{a}x}$

b) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u(0,t) = A\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2 v(x,p) - u_t(x,0) = p^2 v(x,p) - A\omega$. $\mathcal{L}(u(0,t)) \overset{\text{def}}{=} v(0,p) = \mathcal{L}(A\sin(\omega t)) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2 v(x,p) - A\omega = a^2 v'' \\ v(0,p) = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi

$\alpha = 0$. La condizione iniziale impone $\beta = \dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} - \dfrac{A\omega}{p^2}$. $v(x,p) = (\dfrac{A\omega}{p^2+\omega^2} - \dfrac{A\omega}{p^2})e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$.
$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = AH(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a}) - \omega(t-\frac{x}{a})\big] + A\omega t$
Controlliamo che le condizioni iniziali sono verificate dalla soluzione.
$u(x,0) = AH(-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(-\frac{x}{a}) - \omega(-\frac{x}{a})\big] = 0$ in quanto $H(-\frac{x}{a}) = 0$ essendo $x > 0$ e $a > 0$.
$u_t(x,0) = A\delta(t-\frac{x}{a})\big[\sin\omega(t-\frac{x}{a}) - \omega(t-\frac{x}{a})\big] + AH(-\frac{x}{a})\big[\omega\cos\omega(t-\frac{x}{a}) - \omega\big] + A\omega = A\omega$ in quanto il primo pezzo si annulla per ogni valore di t il secondo pezzo è nullo per le stesse ragioni di prima.
$u(0,t) = AH(t)\big[\sin\omega t - \omega t\big] + A\omega t = AH(t)\sin\omega t = A\sin(\omega t)$

c) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = A\omega,\ u_x(0,t) = B\sin(\omega t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\mathcal{L}(u_t(x,t)) = pv(x,p) - u(x,0) = pv(x,p)$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p^2v(x,p) - u_t(x,0) = p^2v(x,p) - A\omega$. $\mathcal{L}(u_x(0,t)) \stackrel{\text{def}}{=} v_x(0,p) = \mathcal{L}(B\sin(\omega t)) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}$. Il sistema per la funzione $v(x,p)$ è

$\begin{cases} p^2v(x,p) - A\omega = a^2v'' \\ v_x(0,p) = \dfrac{B\omega}{p^2+\omega^2}, \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{A\omega}{p^2}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. Di conseguenza si ha $v(x,p) = \dfrac{A\omega}{p^2} - \dfrac{B\omega a}{p(p^2+\omega^2)}e^{-x\frac{p}{a}}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = A\omega t - H(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})$
Verifichiamo le condizioni iniziali:
$u(x,0) = H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1+\cos\omega(-\frac{x}{a}) = 0$
$u_t(x,0) = A\omega - \delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a})) - H(-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}\sin\omega(-\frac{x}{a}) = 0$
$u_x(0,t) = \frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\frac{Ba}{\omega}(1-\cos\omega(t-\frac{x}{a}) + H(t)B\sin\omega t = B\sin(\omega t)$

d) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p) - a^2v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. $v_x(0,p) = 0$ impone $\frac{p}{a}(\alpha-\beta) = 0$ e quindi $\beta = 0$ da cui $v(x,p) = \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = \dfrac{1}{\omega^2}(t\omega - \sin\omega t)$

e) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = \sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = B\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{L}(u(x,t))$, $\mathcal{L}(u_t(x,t) = p\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0) = pv(x,p) - \sin x$, $\mathcal{L}(u_{tt}(x,t)) = p\mathcal{L}(u_t(x,t)) - u_t(x,0) = p(pv(x,p) - \sin x) = p^2v(x,p) - p\sin x$, $\mathcal{L}(u_{xx}(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_{xx} = v_{xx}(x,p)$ $\mathcal{L}(u_x(x,t)) = (\mathcal{L}(u(x,t)))_x = v_x(x,p) = \int_0^{+\infty} dte^{-pt}B\delta(t-T) = e^{-pT}$ per cui nella funzione $v(x,p)$ l'equazione diventa la equazione differenziale ordinaria $\begin{cases} p^2v - p\sin x = a^2 v_{xx} \\ v_x(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ che possiamo scrivere anche come

$\begin{cases} p^2v - p\sin x = a^2 v'' \\ v'(0,p) = Be^{-pT} \end{cases}$ L'equazione per $v(x,p)$ è del secondo ordine (come per $u(x,t)$) e la condizione iniziale è solo per $v_x(0,p)$. Se ne deduce che manca una condizione per poter trovare l'unica soluzione che cerchiamo. La seconda condizione apparentemente mancante deriva dal fatto che vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A'. Ciò vuol dire che deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$. Per risolvere la equazione ordinaria utilizziamo di nuovo la trasformata di Laplace. Definiamo quindi $\mathcal{L}(v(x,p)) \stackrel{\text{def}}{=} h(s,p)$ (la variabile p “fa sempre da spettatore.” $\mathcal{L}(v'(x,p)) = sh(s,p) - v(0,p)$, $\mathcal{L}(v''(x,p)) = s^2h(s,p) - sv(0,p) - Be^{-pT}$ per cui l'equazione ordinaria diventa $p^2h(s,p) - p\mathcal{L}(\sin x) = a^2s^2h(s,p) - a^2sv(0,p) - a^2Be^{-pT}$ ossia $h(s,p) = \dfrac{p}{(s^2+1)(p^2-a^2s^2)} + \dfrac{-a^2sv(0,p) - a^2Be^{-pT}}{p^2-a^2s^2}$. Antitrasformando si ha $v(s,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}(e^{-\frac{xp}{a}} - e^{\frac{px}{a}}) + \dfrac{v(0,p)}{2}(e^{\frac{px}{a}} + e^{-\frac{px}{a}}) + \dfrac{B}{2}(e^{\frac{px}{a}-pT} - e^{-\frac{px}{a}-pT})$. Il limite $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ impone $-\dfrac{a}{p^2+a^2} + v(0,p) + Be^{-pT} = 0$ e quindi $v(0,p) = \dfrac{a}{p^2+a^2} - Be^{-pT}$. Dunque si ottiene $v(x,p) = \dfrac{p}{p^2+a^2}\sin x + \dfrac{a}{2p^2+2a^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{a}{p^2+a^2}e^{-\frac{p}{a}x} - Be^{-\frac{p}{a}x-pT}$. Antitrasformando si ha la soluzione $u(x,t) = \sin x\cos at + H(t-\frac{x}{a})\sin(at-x) - aBH(t-\frac{x}{a}-T)$. Verifichiamo le condizioni iniziali. $u(x,0) = \sin x$ chiaramente. $u_t(x,t) = -a\sin x\sin at + \delta(t-\frac{x}{a})\sin(at-x) + aH(t-\frac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\frac{x}{a}-T) = -a\sin x\sin at + (\sin(at-x))\Big|_{t=x/a} + aH(t-\frac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\frac{x}{a}-T) = -a\sin x\sin at + aH(t-\frac{x}{a})\cos(at-x) - aB\delta(t-\frac{x}{a}-T)$ e per $t=0$ otteniamo zero. Ora analizziamo $u_x(x,t) = \cos x\cos(at) - \frac{1}{a}\delta(t-\frac{x}{a})\sin(at-x) - H(t-\frac{x}{a})\cos(at-x) + B\delta(t-\frac{x}{a}-T) = \cos x\cos(at) - H(t-\frac{x}{a})\cos(at-x) + B\delta(t-\frac{x}{a}-T)$ e per $x=0$ abbiamo $u_x(0,t) = \cos(at) - \cos(at) + B\delta(t-T)$

f) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2v(x,p) - a^2v'' = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{\lambda^2+p^2} \end{cases}$ La soluzione della equazione è $v(x,p) = \alpha e^{\frac{px}{a}} + \beta e^{-\frac{px}{a}} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$. Poiché vogliamo $|u(x,t)| \le Ae^{A't}$ per due costanti A e A', deve essere $\lim\limits_{Rep\to+\infty} |v(x,p)| = 0$ e quindi $\alpha = 0$. $v(0,p) = \dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2}$ impone $v(x,p) = \Big(\dfrac{A\lambda}{p^2+\lambda^2} - \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big)e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}(v(x,p)) = H(t-\frac{x}{a})\big(A\sin\lambda(t-\frac{x}{a}) + \frac{1}{\omega^2}\sin\omega(t-\frac{x}{a}) - \frac{t}{\omega}\big) - \frac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) + \frac{t}{\omega}$

g) $\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = x + \sin(\omega t) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{x}{p} + \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a}{p^4} e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{x}{p^3} + \dfrac{\omega}{p^2(\omega^2+p^2)}$ da cui $u(x,t) = \dfrac{a}{6}(t-\dfrac{x}{a})^3 H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{2} x t^2 H(t) - \dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) + \dfrac{t}{\omega}$

h) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2 - 2\dfrac{a}{\omega^3}\Big) H(t-\dfrac{x}{a}) + H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

i) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = A\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v_x(0,p) = Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} - \dfrac{aA}{p} e^{-pT-\frac{p}{a}x}$ da cui

$$u(x,t) = V.P. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt}\Big(\frac{a\omega e^{-px/a}}{p^3(p^2+\omega^2)} + \frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} - \frac{aA}{p}e^{-pT-\frac{p}{a}x}\Big).$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{a}{\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2 - 2\dfrac{a}{\omega^3}\Big) H(t-\dfrac{x}{a}) + H(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{a}{\omega^3}\cos\omega(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t) - aAH(t-T-\dfrac{x}{a})$

l) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P. \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dp e^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t)$

m) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = x\sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\delta(T-t) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\omega x}{(p^2+\omega^2)} \\ v(0,p) = Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} + Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt} v(x,p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt}\frac{\omega x}{p^2(p^2+\omega^2)} + Ae^{-p(T+\frac{x}{a},)}.$$

Quindi il risultato è $u(x,t) = \dfrac{tx}{\omega} - \dfrac{x}{\omega^2}\sin(\omega t) + A\delta(t - T - \dfrac{x}{a})$

n) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t + \sin(\omega x) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u(0,t) = A\delta(t-T) \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{1}{p^2} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p} \\ v(0,p) = Ae^{-pT} \end{cases}$ e la soluzione è

$v(x,p) = (\dfrac{1}{p^4} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p(p^2+a^2\omega^2)}) + e^{-\frac{p}{a}x}(Ae^{-pT} - \dfrac{1}{p^4})$ da cui

$$u(x,t) = V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt} v(x,p) =$$
$$= \frac{t^3}{3} + \frac{\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \frac{1}{2a^2\omega^2}\big(\sin\omega(x+at) + \sin\omega(x-at)\big) - \frac{1}{3}H(t-\frac{x}{a})(t-\frac{x}{a})^3 + A\delta(t-T-\frac{x}{a})$$

o) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = t\sin(\omega x) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

$v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ e quindi $\begin{cases} p^2 v(x,p) - a^2 v'' = \dfrac{\sin(\omega x)}{p^2} \\ v_x(0,p) = 0 \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{a\omega}{p^3(p^2+a^2\omega^2)}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{\sin(\omega x)}{p^2(p^2+a^2\omega^2)}$ da cui $u(x,t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt} v(x,p) = \dfrac{1}{2a\omega}(t-\dfrac{x}{a})^2 H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{1}{a^3\omega^3}\cos\omega(at-x)H(t-\dfrac{x}{a}) - \dfrac{1}{a^3\omega^3}H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{t\sin(\omega x)}{a^2\omega^2} - \dfrac{\sin(\omega x)}{a^3\omega^3}\sin(a\omega t)$

$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin(\omega t) \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0,\ u_x(0,t) = A\sin(\lambda t) \end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p) = \dfrac{\omega}{p^2(p^2+\omega^2)} - \dfrac{aA\lambda}{p(p^2+\lambda^2)}e^{-\frac{x}{a}p}$

da cui $u(x,t) = V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty} dpe^{pt} v(x,p) = \dfrac{t}{\omega} - \dfrac{1}{\omega^2}\sin(\omega t) - \dfrac{aA}{\lambda}H(t-\dfrac{x}{a}) + \dfrac{aA}{\lambda}\cos\lambda(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

p) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 1,\ u(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p) = \mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2 v(x,p) - 1 - a^2 v'' = 0 \\ v(0,p) = 0 \end{cases}$ ossia $v(x,p) = -\dfrac{1}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x} + \dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t) = t - (t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})$

q) $\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) \equiv 1,\ u_x(0,t) = 0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p^2}$ da cui $u(x,t)=t$

r) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=x,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-x-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{x}{p^2}-\dfrac{x}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=xt-xtH(t-\dfrac{x}{a})$

s) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0,\ u_x(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p}$ da cui $u(x,t)=H(t)$

t) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=0,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-a^2v''=0 \\ v(0,p)=0 \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{p}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=H(t)-H(t-\dfrac{x}{a})$

u) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \qquad t,x>0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=H(t-T) \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-x-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=\dfrac{e^{-pT}}{p} \end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x}-\dfrac{a}{p^2}e^{-\frac{p}{a}x-pT}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t)=\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2H(t-\dfrac{x}{a})-a(t-\dfrac{x}{a}-T)H(t-\dfrac{x}{a}-T)+(1+tx)H(t)$

Verifichiamo che la $u(x,t)$ trovata soddisfi effettivamente l'equazione data e le sue condizioni iniziali. $u_t(x,t)=a(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\delta(t-\dfrac{x}{a})-aH(t-\dfrac{x}{a}-T)-a(t-\dfrac{x}{a}-T)\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+tH(t)+(1+tx)\delta(t)=a(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})-aH(t-\dfrac{x}{a}-T)+xH(t)+1$

$u_{tt}(x,t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a(t-\dfrac{x}{a})\delta(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a(t-\dfrac{x}{a})\delta(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+x\delta(t)=aH(t-\dfrac{x}{a})+a\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$

$u_x(x,t)=-(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\delta(t-\dfrac{x}{a})+H(t-\dfrac{x}{a}-T)+(t-\dfrac{x}{a}-T)\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)+tH(t)=-(t-\dfrac{x}{a})H(t-\dfrac{x}{a})+H(t-\dfrac{x}{a}-T)+tH(t)$

$u_{xx}(x,t)=\dfrac{1}{a}H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{a}(t-\dfrac{x}{a})\delta(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{a}\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)=\dfrac{1}{a}H(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{a}\delta(t-\dfrac{x}{a}-T)$
ed appare evidente che $u_{tt}-a^2u_{xx}\equiv 0$. Per quanto riguarda le condizioni iniziali abbiamo $u(x,0)=H(0)=1$, $u_t(x,0)=xH(0)=x$, $u_x(0,t)=-tH(t)+H(t-T)+tH(t)=H(t-T)$

v) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=1 \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 1,\ u(0,t)=0 \end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-1-a^2v''=\dfrac{1}{p} \\ v(0,p)=0\end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^3}-(\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{1}{p^3})e^{-\frac{p}{a}x}$

da cui $u(x,t)=t-\dfrac{1}{2}t^2-\Big((t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2\Big)H(t-\dfrac{x}{a})$

w) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \\ u(x,0)=1,\ u_t(x,0)=x,\ u_x(0,t)=\delta(t-T)\end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-p-x-a^2v''=0 \\ v_x(0,p)=e^{-pT}\end{cases}$ ossia $v(x,p)=\dfrac{a}{p^3}e^{-\frac{p}{a}x}-\dfrac{a}{p}e^{-\frac{p}{a}x-pT}+$ $\dfrac{1}{p}+\dfrac{x}{p^2}$ da cui $u(x,t)=\dfrac{a}{2}(t-\dfrac{x}{a})^2H(t-\dfrac{x}{a})-aH(t-\dfrac{x}{a}-T)+(1+tx)H(t)$

x) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-rt} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0\end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{1}{p+r} \\ v(0,p)=0\end{cases}$ e e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{1}{p^2(p+r)}-$ $\dfrac{1}{p^2(p+r)}e^{-\frac{p}{a}x}$ da cui $u(x,t)=V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\dfrac{t}{r}-\dfrac{1}{r^2}+\dfrac{e^{-rt}}{r^2}-(t-\dfrac{x}{a})\dfrac{1}{r}H(t-$ $\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{r^2}H(t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{r^2}e^{-r(t-\frac{x}{a})}H(t-\dfrac{x}{a})$

y) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=e^{-rx} \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0\end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{e^{-rx}}{p} \\ v(0,p)=0\end{cases}$ e la soluzione è $v(x,p)=\dfrac{e^{-rx}}{p(p^2-a^2r^2)}-$ $\dfrac{e^{-px/a}}{p(p^2-a^2r^2)}$ da cui $u(x,t)=V.P.\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\dfrac{-e^{-rx}}{a^2r^2}+\dfrac{e^{-rx}}{a^2r^2}\cosh(art)H(t)-$ $\dfrac{1}{a^2r^2}\cosh(art-rx)H(t-\dfrac{x}{a})+\dfrac{1}{a^2r^2}H(t-\dfrac{x}{a})$

z) $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=\sin(\omega t-\dfrac{x}{x_0}) \\ u(x,0)=0,\ u_t(x,0)\equiv 0,\ u(0,t)=0\end{cases}$

Se $v(x,p)=\mathcal{L}(u(x,t))$ si ha $\begin{cases} p^2v(x,p)-a^2v''=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\cos\dfrac{x}{x_0}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\sin\dfrac{x}{x_0} \\ v(0,p)=0\end{cases}$ e la soluzione

è $v(x,p)=-\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}e^{-px/a}+\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\cos\dfrac{x}{x_0}-\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\dfrac{1}{p^2+\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\dfrac{x}{x_0}$

Si devono distinguere due casi: 1) $\omega\neq\dfrac{a}{x_0}$ e 2) $\omega=\dfrac{a}{x_0}$.

Cominciamo da 1).

$$u(x,t)=V.P.\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}dpe^{pt}v(x,p)=\Big(\frac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\frac{x_0}{a}\sin\frac{a}{x_0}t\Big)H(t-\frac{x}{a})+$$

$$+\frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\cos\frac{x}{x_0}\sin\omega t-\frac{1}{\frac{a^2}{x_0^2}-\omega^2}\sin\frac{x}{x_0}\cos(\omega t)+\frac{\omega}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\frac{x_0}{a}\cos\frac{x}{x_0}\sin\frac{a}{x_0}t-\frac{1}{\omega^2-\frac{a^2}{x_0^2}}\sin\frac{x}{x_0}\cos\frac{a}{x_0}t+$$

Ora esaminiamo il caso in cui $\omega=\dfrac{a}{x_0}$.

$v(x,p)=\dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}\cos x\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{p}{(p^2+\omega^2)^2}\sin x\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{\omega}{(p^2+\omega^2)^2}e^{-px/a}$

da cui $u(x,t)=\Big(-\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t)+\dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t)\Big)\cos x\dfrac{\omega}{a}-\dfrac{t}{2\omega}\sin x\dfrac{\omega}{a}\sin(t\omega)+\Big(\dfrac{t}{2\omega}\cos(\omega t-\dfrac{x}{a})-\dfrac{1}{2\omega^2}\sin(\omega t-\dfrac{x}{a})\Big)H(t-\dfrac{x}{a})$ ♠♠

105 min. Lezione del 18/11/2019 ultime nozioni di teoria e Esercizi vari

Proprità della δ di Dirac.

$\delta(x)=\delta(-x),\quad H'(t-t_0)=\delta(t-t_0)$

$\delta(F(x))=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta(x-x_k)}{|F'(x_k)|}$ se $F(x)=0$ ammette le radici $x_1,\ldots,x_n$ e $F'(x_k)\neq 0$.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-y)\delta(y-z)dx=\delta(y-z)$

$(x-x_0)^{2l}\delta(a(x-x_0)^{2l+1})=\delta(x-x_0)(|a|(2l+1))^{-1}\ l=0,1,2\ldots$

$(x-x_0)^{2l}\delta(F(x))=(2l)!\delta(x-x_0)/F^{(2l+1)}(x_0)$, $l=0,1,2,\ldots$ se $F(x)=0$ solo per $x=x_0$ e $F^{(k)}(x_0)=0$ per $1\le k\le 2l$.

Esercizi 1) e 2) del compito del 2/7/2019. Per quanto riguarda l'esercizio 1) si usa il cammino "a pacman" e quindi, dopo avere operato i limiti $\varepsilon,\vartheta\to 0$, $R\to+\infty$ si ottiene

$$I(1-e^{i\frac{8\pi}{3}})=2\pi i\sum\mathrm{Res}\frac{z^{4/3}}{z^4+1}=2\pi i\sum\mathrm{Res}\lim_{x\to z_k}\frac{z^{4/3}(z-z_k)}{z^4+1}\underbrace{=}_{l'Hopital}2\pi i\sum\mathrm{Res}\frac{z_k^{4/3}}{4z_k^3}$$

dove $z_k=e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{k\pi}{2}}$, $k=0,1,2,3$. Usiamo $z_k\cdot z_k^3=-1$ da cui $z_k^3=-1/z_k$ ed otteniamo

$$I(1-e^{i\frac{8\pi}{3}})=\frac{-\pi i}{2}\sum_{k=0}^{3}z_k^{7/3}=\frac{-2\pi i}{4}\sum_{k=0}^{3}e^{i\frac{7\pi}{12}+i\frac{7k\pi}{6}}=e^{i\frac{7\pi}{12}}\frac{-2\pi i}{4}\sum_{k=0}^{3}\Big(e^{i\frac{7\pi}{6}}\Big)^k=$$

$$=e^{i\frac{7\pi}{12}}\frac{-2\pi i}{4}\frac{1-e^{i\frac{4\cdot 7\pi}{6}}}{1-e^{i\frac{7\pi}{6}}}\implies I(1-e^{i\frac{2\pi}{3}})=e^{i\frac{7\pi}{12}}\frac{-2\pi i}{4}\frac{1-e^{i\frac{2\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{7\pi}{6}}}\implies I=\frac{-\pi i}{2}\frac{1}{-2i\sin\frac{7\pi}{12}}$$

e quindi $I=\dfrac{\pi}{4}\Big(\sin\Big(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{12}\Big)\Big)^{-1}=\dfrac{\pi}{4}\Big(\cos\dfrac{\pi}{12}\Big)^{-1}$. Per sapere quanto vale $\cos\pi/12$ basta usare $\cos^2 x=(1+\cos 2x)/2$ da cui

$$\cos^2\frac{\pi}{12}=\frac12+\frac12\cos\frac{\pi}{6}\implies\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}=\frac12\sqrt{\frac{(1+\sqrt3)^2}{2}}\implies\cos\frac{\pi}{12}=\frac{1+\sqrt3}{2\sqrt2}$$

e finalmente $I=\dfrac{\pi}{2\sqrt2}(\sqrt3-1)$

Si sarebbe potuto scrivere $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^{4/3}}{1+x^4}dx=\frac12\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{4/3}}{1+x^4}dx$ **e "chiudere il cammino nella parte superiore (o inferiore)" dopo essere passati a** $f(z)=z^{4/3}/(1+z^4)$ ma la parte di integrale sul semiasse negativo delle ascisse va scritta attraverso la parametrizzazione $\gamma(t)=-te^{i\pi}$, $-R\le t\le-\varepsilon$. Gli studenti possono verificare che si giunge allo stesso risultato. Ad ogni modo si ottiene

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{4/3}}{1+x^4}dx(1+e^{i\frac{4\pi}{3}})=\frac{-2\pi i}{4}(e^{i\frac{7\pi}{12}}+e^{\frac{7\pi}{4}})\implies I=\frac{-\pi i}{2}\frac{e^{i\frac{2\pi}{3}}\Big(e^{i\frac{-\pi}{12}}+e^{i\frac{13\pi}{12}}\Big)}{e^{i\frac{2\pi}{3}}\Big(e^{i\frac{-2\pi}{3}}+e^{i\frac{2\pi}{3}}\Big)}$$

e quindi $I=\dfrac{-\pi i}{2}\dfrac{e^{i\frac{-\pi}{12}}+e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{12}})}{2\cos\frac{2\pi}{3}}=\dfrac{-\pi i}{2}\dfrac{-2i\sin\frac{\pi}{12}}{-1}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$

105 min. Lezione del 19/11/2019 Esercizi vari – ultimo giorno di lezione per Informatica

$\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln x}{a^3+x^3}$. Passiamo a $\dfrac{\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3}$ e il cammino “a pacman”, dopo avere eseguito i soliti limiti $\varepsilon,\vartheta\to 0$, $R\to+\infty$, ci consegna

$$\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln x}{a^3+x^3}+\int_{+\infty}^0\frac{\mathrm{Ln}(ze^{2i\pi})}{z^3+a^3}=2\pi i\sum\mathrm{Res}\frac{\mathrm{Ln}(z)}{z^3+a^3}.$$

Abbiamo $-4\pi i\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\frac{\ln x}{a^3+x^3}+4\pi\int_0^{+\infty}dx\frac{1}{a^3+x^3}=2\pi i\Big(Res(\frac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i\pi/3}}+$

$+Res(\dfrac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i\pi}}+Res(\dfrac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i5\pi/3}}\Big)$.

$Res(\dfrac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i\pi/3}}=\displaystyle\lim_{z\to ae^{i\pi/3}}\frac{(z-z_0)\frac{2}{z}\ln z+\ln^2 z}{3z^2}=\frac{\ln^2 z_0}{3z_0^2}=-\frac{z_0\ln^2 z_0}{3a^3}$.

$z_0\ln^2 z_0+z_1\ln^2 z_1+z_2\ln^2 z_2=ae^{i\pi/3}\ln^2(ae^{i\frac{\pi}{3}})+ae^{i\pi}\ln^2(ae^{i\pi})+ae^{i\frac{5}{3}\pi}\ln^2(ae^{i\frac{5}{3}\pi})=ae^{i\frac{\pi}{3}}(\ln^2 a+2i\frac{\pi}{3}\ln a-\frac{\pi^2}{9})+ae^{i\pi}(\ln^2 a+2\ln a i\pi-\pi^2)+ae^{i\frac{4}{3}\pi}(\ln^2 a+2i\frac{5}{3}\pi\ln a-\frac{25}{9}\pi^2)$. La parte contenente $\ln^2 a$ ha coefficiente nullo in quanto esso è proporzionale a $z_0+z_1+z_2=0$. La parte contenente $\ln a$ è uguale a $2a\ln a\, i\pi\big(\frac{1}{3}(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})-1+\frac{5}{3}(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})\big)=\frac{4}{3}\sqrt{3}i\pi a\ln a$. La parte proporzionale solo a a è pari a $a(-e^{i\frac{\pi}{3}}\frac{\pi^2}{9}+e^{i\pi}-e^{i\frac{5}{3}\pi}\frac{25}{9}\pi^2)=a\pi^2\frac{4}{9}+i\frac{4\sqrt{3}}{3}a\pi^2$. Moltiplicando per $-\frac{1}{3a^3}$ si ottiene $\Big(Res(\frac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i\pi/3}}+Res(\frac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i\pi}}+$

$+Res(\dfrac{\ln^2 z}{a^3+z^3})\big|_{z=ae^{i5\pi/3}}\Big)=-\dfrac{4}{9}\pi\sqrt{3}\dfrac{\ln a}{a^2}+\pi^2\dfrac{4}{27a^2}-\dfrac{4\sqrt{3}}{9a^2}i\pi^2$.

$\displaystyle\int_0^{+\infty}dx\frac{1}{a^3+x^3}=-\frac{2\pi^2}{3\sqrt{3}a^2}$ per cui mettendo tutto assieme si ha $-4\pi iI=-\dfrac{8\pi^3}{3\sqrt{3}a^2}+2\pi i(-\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}\frac{\ln a}{a^2}+\pi^2\frac{4}{27a^2}-\frac{4\sqrt{3}}{9a^2}i\pi^2)$ da cui discende $I=-\dfrac{2\pi^2}{27a^2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{9}\pi\dfrac{\ln a}{a^2}$

Problema n.2 del compito del 17/02/2007 A.A.2006/2007 (compito A)

Avvertenza Si immagini che la trasformata di Laplace di una funzione incognita $x(t)$ è $F(p)=\dfrac{p-2p^2e^{-p}+p^2-e^{-2p}+1}{p^2(p^2+1)}$ **Sarebbe un errore grave ritenere che $p=0$ è un polo di ordine 2 della funzione**. Scrivendo lo sviluppo di MacLaurin del numeratore ci si convince facilmente che è un polo di ordine 1.

105 min. Lezione del 21/11/2019 Funzioni di più variabili – polinomi di Taylor dal Marcellini-Sbordone

Paragrafo 15, 17, 18 fino a pag.76 inclusa

105 min. Lezione del 25/11/2019 Punti critici e caratterizzazioni relative per funzioni di più variabili

Pag.77–81 fino al paragrafo 19

105 min. Lezione del 26/11/2019 Punti critici e caratterizzazioni relative per funzioni di più variabili

Pag.77–81 fino al paragrafo 19 ed alcuni esercizi. Studiare i punti critici della funzione $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ definito in $\mathbf{R}^2$.

Trovare massimo e minimo della funzione $f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$ definito per $|x| \le 2$ e $|y| \le 2$

Trovare i punti critici della funzione $f(x,y) = x^4+y^4-(x-y)^2$ e caratterizzarne la natura

Uno studente chiedeva di scomporre $8x^4+5x^3+11x^2+5x+3 = 8x^4+5x^3+3x^2+8x^2+5x+3 = x^2(8x^2+5x+3)+8x^2+5x+3 = (8x^2+5x+3)(x^2+1)$

105 min. Lezione del 28/11/2019, Teorema delle funzioni implicite

Da pag.265 a pag.278

105 min. Lezione del 02/12/2019, Estremi vincolati–moltiplicatori di Lagrange

Introduzione

La funzione $z = x+y$, $x,y \in \mathbf{R}^2$ non ammette punti critici e quindi non ammette né massimo né minimo (fatto peraltro intuibile osservando che $z = x+y$ definisce un piano inclinato).

Ora prendiamo la funzione $z = x+y$ e imponiamo che $x^2+y^2 = 1$ (chiamiamo C la circonferenza unitaria). A differenza di $\mathbf{R}^2$ che è chiuso ma non limitato, C è compatto e quindi la funzione $f(x,y) = x+y$, essendo continua, ammette sia massimo che minimo (teorema di Weierstrass).

Il gradiente della funzione $z = x+y$ non si può fare in quanto se (x_0,y_0) è tale che $x_0^2+y_0^2 = 1$, non altrettanto di può dire di (x_0+h,x_0) oppure (x_0,y_0+h).

Poniamo allora $(x,y) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ e deriviamo.

Si ha che il punto $(1,1)/\sqrt{2}$ è un massimo mentre $(-1,-1)/\sqrt{2}$ è un minimo e in tali punti si ha ∂f è parallelo al gradiente della funzione $x^2+y^2-1 = 0$.

Paragrafo 58, 59 fino a pag.294 ("Per completezza" escluso)

• Trovare massimi e minimi della funzione $z = f(x,y) = y(x^2+5/4)$ con (x,y) soggetti alla condizione $x^2+y^2 = 1$.

Prima soluzione Sia $C = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$. Un modo di procedere consiste nel parametrizzare la curva $x^2+y^2 = 1$ con $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ e quindi $f\Big|_C = \sin t(\frac{5}{4}+\cos^2 t)$, $0 \le t \le 2\pi$. Derivando rispetto a t si può notare che $(1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$ e $(0,-1)$ sono massimi mentre $(0,1)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ e $(1/\sqrt{2}, -\sqrt{3}/2)$ sono minimi.

Inoltre $f(\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}$, $f(0,-1) = -5/4$, $f(0,1) = 5/4$. I punti $(1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ sono massimi assoluti mentre $(-1/2, \pm\sqrt{3}/2)$ minimi assoluti. Gli altri sono estremi relativi.

Si può notare pure, fatto assai importante, che in ciascuno dei punti indicati si ha $\underline{\partial} f(\underline{\gamma}) \cdot \underline{\gamma}' = 0$ *e* $\underline{\gamma} \cdot \underline{\gamma}' = 0$ *(fatto quest'ultimo vero per ogni* t *ma riguardante la circonferenza in modo specifico).*

Il gradiente di $g(x,y) = x^2+y^2-1$ è $(2x,2y) = 2(\gamma_1,\gamma_2)$ e quindi nei punti di massimo e minimo locali vincolati si ha $\underline{\partial} f(\underline{x}_0)$ parallelo al gradiente del vincolo $g(x,y)$ purché $\underline{\gamma}'(t) \ne 0$ in quel punto.

Seconda soluzione Si estrae $x^2 = 1-y^2$ dal vincolo e si ottiene $f(x,y) = y(1-y^2+5/4) = -y^3+9y/4 \doteq h(y)$ con $|y| \le 1$.

$$h'(y) = -3y^2+9/4 \ge 0 \iff |y| \le 3/4$$

e quindi per $y=-\sqrt{3}/2$ abbiamo un minimo ed un massimo a $y=\sqrt{3}/2$. I punti $(\pm 1/2, -\sqrt{3}/2)$ sono minimi mentre $(\pm 1/2, \sqrt{3}/2)$ sono massimi. Agli estremi abbiamo $h(-1,0)=-5/4$ mentre $h(1,0)=5/4$

$\boxed{\text{Notare che la funzione non vincolata } f(x,y)=y(x^2+5/4) \text{ non ammette punti critici.}}$ ••

Il problema appena studiato è molto particolare in quanto consente o di parametrizzare completamente il vincolo (prima soluzione) o di estrarre una delle due variabili ed inserirla nella seconda (seconda soluzione). In generale non è possibile né l'una né l'altra ma è necessario passare attraverso il teorema delle funzioni implicite.

Supponiamo di voler trovare gli estremi della funzione $f(x,y,z)$ vincolata a $g(x,y,z)=0$. Supponiamo che $\underline{\partial} g(\underline{x}^0) \neq \underline{0}$ e quindi $g_z(\underline{x}^0) \neq 0$ (ad esempio). Allora dal teorema delle funzioni implicite si ha $g(x,y,h(x,y)) \equiv 0$ per $\|(x,y)-(x^0,y^0)\| < \delta$. La funzione ristretta al vincolo diventa $f(x,y,h(x,y))$ e in questo caso (x,y) non sono vincolate. Ne segue che se cerchiamo i punti di estremo dobbiamo eseguire il gradiente

$$f_x + f_z h_x = 0, \quad f_y + f_z h_y = 0, \quad h_x = -\frac{g_x(x,h)}{g_z(x,y)} \quad h_y = -\frac{g_y(x,h)}{g_z(x,y)}$$

e quindi

$$f_x - \frac{f_z(x,h)}{g_z(x,y)} h_x(x,h) = 0, \qquad f_y - \frac{f_z(x,h)}{g_z(x,y)} h_y(x,h) = 0$$

Se chiamiamo $\lambda = f_z(x,h)/g_z(x,y)$ possimo dire che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \lambda \underline{\partial} g(\underline{x})$.

Se ne ricava l'ipotesi che in generale, nei punti critici vincolati, si ha $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \lambda \underline{\partial} g(\underline{x})$. Costruiamo quindi la funzione $F(\underline{x},\lambda) = f(\underline{x}) - \lambda g(\underline{x})$ e cerchiamo di risolvere il sistema

$$F_{x_i}(\underline{x}) = f_{x_i}(\underline{x}) - \lambda g_{x_i}(\underline{x}) = 0 \quad F_\lambda(\underline{x}) = -g(\underline{x}) = 0$$

Una volta trovato un punto $\underline{x}_0$ $\boxed{\text{bisogna verificare che } \underline{\partial} g(\underline{x}_0) \neq \underline{0}}$. Tali punti sono detti *regolari.* Si tenga presente che il massimo o il minimo (vincolati), possono presentarsi anche in punti irregolari dove i moltiplicatori di Lagrange non sono applicabili. Si veda a tal punto l'esempio 3 a pag.292 del libro di testo

Il seguente teorema dà condizioni sufficienti, non necessarie, perché un punto critico vincolato si di massimo, di minimo oppure una sella.

Teorema *Siano* $f, g \colon X \to$, $\overset{o}{X} \subset \mathbf{R}^n$ *di classe* C^2. *Se la forma quadratica* $\sum_{i,j=1}^n [f_{x_i x_j}(\underline{x}_0) - \lambda^o g_{x_i x_j}(\underline{x}_0)] h_i h_j = (\underline{h}, H(\underline{x}_0)\underline{h})$, *ristretta all'insieme dei vettori* $\underline{h}$ *tangenziali al vincolo in* $\underline{x}_0$ *ossia* $(\underline{\partial} g(\underline{x}_0), \underline{h}) = 0$, *è definita negativa (positiva) allora* $\underline{x}_0$ *è punto di massimo (minimo) forte vincolato della funzione* $f(\underline{x})$ *alla condizione* $g(\underline{x}) = 0$. *Se esistono* $\underline{h}_1$, *e* $\underline{h}_2$ *tali che* $(\underline{h}_1, H(\underline{x}_0)\underline{h}_1) > 0$, *e* $(\underline{h}_2, H(\underline{x}_0)\underline{h}_2) < 0$, *allora* $\underline{x}_0$ *è di sella*

• Trovare massimi e minimi della funzione $z = f(x,y) = x + y$ con $x^2 + y^2 - x - y - 1 = 0$. ••

♠ Esercizi

Data la funzione $f(x,y) = x^2 y + x y^2 + xy$, si trovino i valori di massimo e di minimo soggetti alla condizione $\{xy \geq \frac{1}{16},\ y \geq -x-1,\ x \leq 0,\ y \leq 0\}$.

Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x,y) = xy$ soggetti alla condizione $x^2 + y^2 = 1$

Si trovino i punti di estremo della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ soggetti alla condizione $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

Sia data la funzione $f(x,y) = y^2$. Trovare massimi e minimi locali di $f(x,y)$ con (x,y) soggette alla condizione $x^4 + yx^2 - y^2 + 243 = 0$ e stabilirne la natura Si veda qui, compito del primo luglio http://www.mat.uniroma2.it/ perfetti/didattica/gestionale-analisiII-14-15.html

Si stabilisca la natura dei punti critici della funzione $f(z,y,z)=x^2+y^2+z^2$ soggetta alla condizione $xy+xz+yz=1$.

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z=f(x,y)=x$ soggetta al vincolo $x^3+xy+y^2=0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto (1/4,−1/8) è di massimo assoluto]

Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z=f(x,y)=x+y$ soggetta al vincolo $x^3+xy+y^2=0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura. [Il punto (2/9,−2/27) è di minimo locale]

Si trovino i punti critici e loro caratterizzazione della funzione $u=f(x,y,z)=z$ soggetta al vincolo $(x+3y^2)e^{xz}-1=0$. Risultato. Il punto $(e,0,-e^{-1})$ è una sella.

Si dimostri che $(e,1,1)$ è un punto critico della funzione $u=f(x,y,z)=x$ soggetta al vincolo $x+y+z-\ln x-\ln y-\ln z=e+1$. Si verifichi che è un massimo locale (non globale) ♠♠

105 min. Lezione del 3/12/2019 Estremi vincolati, esercizi

• Siano $x,y,z\geq 0$ e $x+y+z=1$. Trovare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y,z)=x^ay^bz^c$, $a,b,c>0$. ••

Esercizio num.4 dell'appello del 23/11/2019

Nozione di curva in $\mathbf{R}^3$, forme differenziali in $\mathbf{R}^3$, nozione di rotore di un campo vettoriale, forme chiuse, esatte, chiuse su un semplicemente connesso.

Teorema *Sia $A\subseteq\mathbf{R}^3$ aperto e connesso e sia $\omega(\underline{x})=a(\underline{x})dx+b(\underline{x})dy+c(\underline{x})dz$ una forma tale che $a,b,c\in C^1(A)$. Allora la forma è esatta se e solo se l'integrale su ogni curva chiusa regolare, semplice è nullo.*

Il Teorema 3 a pag.17 delle dispense di Tauraso sugli integrali curvilinei dimostra lo stesso risultato per forme differenziali sul piano. La esattezza vuol dire che esiste una funzione $f\in C^1(A)$ tale che $\underline{\partial} f=(a,b,c)$.

105 min. Lezione del 5/12/2019 Estremi vincolati (esercizi), Forme differenziali in $\mathbf{R}^3$

• Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in caso di più vincoli

Teorema *Sia data la funzione reale $f\in C^1(E)$ $E=\overset{\circ}{E}\subseteq\mathbf{R}^n$. Siano dati m vincoli differenziabili $g_k(x_1,\ldots,x_n)=0$ $k=1,\ldots,m<n$, $g_k\colon U=\overset{\circ}{U}\to\mathbf{R}$ e $U_0=\{\underline{x}\in U\colon \underline{g}(\underline{x})=0\}$. $\underline{y}\in U_0$ è un punto regolare ossia supponiamo che la matrice $\underline{\partial}\underline{g}=\begin{pmatrix}(g_1)_{x_1} & (g_1)_{x_2} & \cdots & (g_1)_{x_n}\\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots\\ (g_m)_{x_1} & (g_m)_{x_2} & \cdots & (g_m)_{x_n}\end{pmatrix}$ abbia rango massimo m. Allora $\underline{y}$ è un punto critico di $f(\underline{x})$ ristretta agli m vincoli se esiste una m–pla di numeri reali $\underline{\lambda}_0\in\mathbf{R}^m$ tale che $f_{\underline{x}}=\underline{\lambda}_0\underline{g}_{\underline{x}}$*(6.2) ossia $f_{\underline{x}}-\lambda_1(g_1)_{\underline{x}}-\lambda_2(g_2)_{\underline{x}}-\ldots-\lambda_m(g_m)_{\underline{x}}=\underline{0}$ ••

• **Esercizio** Sull'insieme $S=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x=z^2,\ y=z^2\}$ trovare il punto $\underline{x}^0=(x^0,y^0,z^0)$ più vicino al punto $(0,0,1)$.

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0,0,1)$ e quindi la funzione $f(x,y,z)=x^2+y^2+(z-1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x})=x-z^2=0$,

(6.2) Nella relazione $f_{\underline{x}}=\underline{\lambda}_0\underline{g}_{\underline{x}}$ i due vettori $f_{\underline{x}}$ e $\underline{\lambda}_0$ sono vettori riga.

$\phi_2(\underline{x}) = x - z^2 = 0$. La funzione da estremizzare è

$$L(\underline{x}, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \lambda_1(x - z^2) - \lambda_2(x - z^2)$$

Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2z \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due e quindi non esistono punti critici **non regolari.** A questo punto risolviamo il sistema
$\begin{cases} \underline{\partial}(f(\underline{x}) - \lambda_1\phi_1(\underline{x}) - \lambda_2\phi_2(\underline{x}) = 0 \\ \phi_1(\underline{x}) = 0, \quad \phi_2(\underline{x}) = 0 \end{cases}$
ossia
$\begin{cases} 2x - \lambda_1 = 0, \qquad 2y - \lambda_2 = 0, \quad 2(z-1) + 2z\lambda_1 + 2z\lambda_2 = 0 \\ x = z^2, \quad y = z^2 \end{cases}$

$$x = \frac{\lambda_1}{2}, \quad y = \frac{\lambda_2}{2}, \quad z = \frac{1}{1 + \lambda_1 + \lambda_2} \qquad x = y = z^2, \quad \Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2, \quad \frac{\lambda_1}{2} = \frac{1}{(1 + 2\lambda_1)^2}$$

Ne segue $\lambda_1 = 1/2$ da cui $(x, y, z) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$.
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2z \\ 0 & 1 & -2z \end{pmatrix}\Big|_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow a = b = c$
La matrice hessiana da studiare è

$$\big(L_{\underline{xx}} - \lambda_1(\varphi_1)_{\underline{xx}} - \lambda_2(\varphi_2)_{\underline{xx}}\big)_{(\lambda_1=\lambda_2=1/2,\,(1/4,1/4,1/2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \doteq M$$

e $(a, a, a) \cdot M(a, a, a) = 8a^2 > 0$ quindi un minimo che è assoluto••

Soluzione alternativa Scrivere

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 2z^4+(z-1)^2 \doteq f(z), \qquad f'(z) = 8z^3+2(z-1) = (z-\frac{1}{2})(8z^2+4z+4) \geq 0 \iff z \geq 1/2$$

e quindi $z = 1/2$ è un minimo da cui $f(1/2) = 3/4$. Inoltre $\lim\limits_{z\to\pm\infty} f(z) = +\infty$ per cui $z = 1/2$ corrisponde a un minimo assoluto.

♠ **Esercizio** Sull'insieme $S = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon y = x^2,\ z = x^2\}$ trovare il punto $\underline{x}^0 = (x^0, y^0, z^0)$ più vicino al punto $(0, 0, 1)$.

La funzione da minimizzare è la distanza del punto generico di $\mathbf{R}^3$ dal punto $(0, 0, 1)$ e quindi la funzione $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z-1)^2$ mentre l'equazione del vincolo è $\phi_1(\underline{x}) = y - x^2 = 0$, $\phi_2(\underline{x}) = z - x^2 = 0$. La funzione da estremizzare è

$$L(\underline{x}, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 + (z-1)^2 - \lambda_1(y - x^2) - \lambda_2(z - x^2)$$

Cerchiamo eventuali punti non regolari ossia quei punti per i quali è minore di due il rango della matrice $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il minore $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è sempre diverso da zero per cui il rango è due e quindi non esistono punti critici **non regolari.** A questo punto risolviamo il sistema
$\begin{cases} \underline{\partial}(f(\underline{x}) - \lambda_1\phi_1(\underline{x}) - \lambda_2\phi_2(\underline{x}) = 0 \\ \phi_1(\underline{x}) = 0, \quad \phi_2(\underline{x}) = 0 \end{cases}$
ossia

$$\begin{cases} 2x(1+\lambda_1+\lambda_2)=0, \quad 2y-\lambda_1=0, \quad 2(z-1)-\lambda_2=0 \\ y=x^2, \quad z=x^2 \end{cases}$$

Si ottengono tre punti $P_1 = (0,0,0)$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$; $P_\pm = (\pm\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Stabiliamo la natura dei punti critici. La tangenzialità dello spostamento è data da $\begin{pmatrix} -2x & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dunque si ha $\begin{cases} -2ax+b=0 \\ -2ax+c=0 \end{cases}$ che per ogni x implica $b=c$; inoltre calcolata per $x=0$ dà $b=c=0$ e $a\neq 0$.

La matrice hessiana da studiare è $\begin{pmatrix} 2+2\lambda_1+2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e nel caso del punto $(0,0,0)$ bisogna individuare il segno della forma quadratica

$(a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2(2b^2 - a^2) = -2a^2 < 0$ per cui è un massimo relativo.

Nel caso dei punti $P_\pm$ abbiamo che la relazione di tangenzialità implica che $b = c \neq 0$ per cui $(a \quad b \quad c) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = b^2 > 0$ da cui un minimo relativo.

Il massimo trovato non è certamente assoluto in quanto in S esistono chiaramente infiniti punti che distano da $(0,0,1)$ più di quanto disti $(0,0,0)$ ossia 1. Per dimostrare che i due punti di minimo sono assoluti, poniamo $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq r$ con $r > 2$ e indichiamo $S_r = \{\underline{x} \in \mathbf{R}^3 \colon y = x^2, z = x^2, \|\underline{x}\| \leq r\}$ per compattezza e grazie al teorema di Weierstrass, massimo e minimo assoluti esistono esistono e i due punti $P_\pm$ sono certamente di minimo relativo. Dobbiamo analizzare la distanza fra $(0,0,1)$ e il bordo di S_r. Essendo tale distanza superiore a quella fra $(0,0,1)$ e $P_\pm$ possiamo dire che $P_\pm$ sono punti di minimo assoluti e rimangono tali se si passa all'insieme S

Anche qui si poteva agire nel seguente modo

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = x^2+x^4+(x^2-1)^2 = 2x^4-x^2+1 \doteq f(x), \qquad f'(x) = 8x^3-2x \geq 0$$
$$\iff \quad -1/2 \leq x \leq 0, x \geq 1/2$$

Inoltre $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ e quindi i minimi sono assoluti ma il massimo no ♠♠

♠ Trovare gli estremi relativi ed assoluti, se esistono, della funzione $z = f(x,y) = y$ soggetta al vincolo $x^3 + xy + y^2 = 0$. Dopo avere trovato i punti critici della funzione vincolata, usare il Teorema sopra per dedurne la natura.

Svolgimento Innanzitutto ossrviamo che per ogni $y_0 \in \mathbf{R}$, l'equazione $x^3 + xy_0 + y_0^2 = 0$ ha soluzione in x. Ciò accade in quanto $h(x) = x^3 + ax + a^2$ va da $-\infty$ a $+\infty$ ed è continua per cui interseca l'asse delle ordinate. Ciò implica che la funzione $f(x,y) = y$ non ammette né massimo né minimo assoluto. Per cercare i massimi e minimi locali formiamo la funzione $F(x,y,\lambda) = y - \lambda(x^3 + xy + y^2)$ e risolviamo il sistema

$$F_x = 0, \qquad F_y = 0, \qquad F_\lambda = 0$$

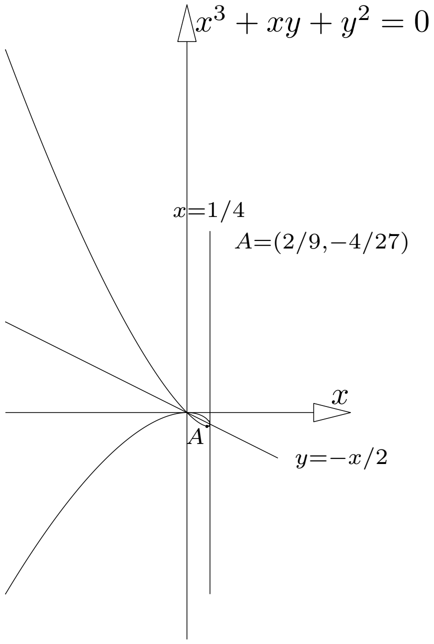
e viene fuori che $x_0 = 2/9$, $y_0 = -4/27$, $\lambda_0 = -27/2$. Per saperne di più usiamo il teorema sopra e costruiamo la matrice

$$\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{yx} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Big|_{\underline{x}_0, \lambda_0} = \frac{27}{2} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \doteq A$$

Il gradiente di x^3+xy+y^2 è $(3x^2+y, x+2y)$ e calcolato in $\underline{x}_0$ dà $(0,-2/27)$. La relazione $(0,-2/27)\cdot(a,b)=0$ comporta $b=0$ per cui dobbiamo studiare la forma quadratica $(\underline{v}, A\underline{v})$ dove $\underline{v}$ è un vettore del tipo $(a,0)$ con $a\in\mathbf{R}$. Si ottiene $(\underline{v}, A\underline{v})=54a^2/3>0$ per ogni a non nulla. Ne segue che il punto $\underline{x}_0$ è di minimo vincolato.

Si poteva pure rispondere tracciando il grafico della funzione di y definita da $x^3+xy+y^2=0$ e ritrovare le conclusioni del primio esercizio. Si scrive

$$y=\frac{-x\pm|x|\sqrt{1-4x}}{2}$$



♠♠

Nozione di rotore di un campo vettoriale e di forma chiusa in $\mathbf{R}^3$.

• Funzione potenziale per forme chiuse definite in $\mathbf{R}^3$ oppure parallelepipedi

Quindi data una forma ω chiusa in $\mathbf{R}^2$ oppure $\mathbf{R}^3$ definita su di un semplicemente connesso possiamo trovare una funzione (detta anche *funzione potenziale*) $f(\underline{x})$ tale che $\omega=df$. Procedendo come nel Teorema 8.2 sia $\underline{\gamma}(t)$ una curva tale che $\underline{\gamma}(a)=\underline{x}_o$ e $\underline{\gamma}(b)=\underline{x}$. $\underline{\gamma}(t)\in E$ per ogni t. Come funzione $f(\underline{x})$ basta prendere $\displaystyle\int_{\underline{\gamma}}\omega$. Ai fini del calcolo però conviene prendere la curva che rende l'integrale il più semplice possibile e ciò dipende dalla struttura di E. Se ad esempio $E=\mathbf{R}^3$ e $\omega=\displaystyle\sum_{i=1}^3 a_i(\underline{x})dx_i$ allora una possibile curva regolare a tratti è : $\underline{\gamma}_1(t)=(t,y_o,z_o)$ $x_o\le t\le x$, $\underline{\gamma}_2(t)=(x,t,z_o)$ $y_o\le t\le y$, $\underline{\gamma}_3(t)=(x,y,t)$ $z_o\le t\le z$.

$$f(\underline{x})\overset{\text{def}}{=}\int_{\underline{\gamma}}\omega=\int_{\underline{\gamma}_1}\omega+\int_{\underline{\gamma}_2}\omega+\int_{\underline{\gamma}_3}\omega=\int_{x_o}^x dta_1(t,y_o,z_o)+\int_{y_o}^y dta_2(x,t,z_o)+\int_{z_o}^z dta_3(x,y,t).$$

Esercizio Si verifichi che $\underline{\partial} f(\underline{x})=\omega(\underline{x})$.

$$f_x=a_1(x,y_o,z_o)+\int_{y_o}^y\frac{\partial a_2}{\partial x}(x,t,z_o)dt+\int_{z_o}^z\frac{\partial a_3}{\partial x}(x,y,t)dt\quad\underbrace{=}_{\text{usando la chiusura}}$$
$$=a_1(x,y_o,z_o)+\int_{y_o}^y\frac{\partial a_1}{\partial t}(x,t,z_o)dt+\int_{z_o}^z\frac{\partial a_1}{\partial t}(x,y,t)dt$$
$$=a_1(x,y_o,z_o)+a_1(x,y,z_o)-a_1(x,y_o,z_o)+a_1(x,y,z)-a_1(x,y,z_o)=a_1(x,y,z)$$

$$f_y = a_2(x,y,z_0) + \int_{z_0}^{z} dt \frac{\partial a_3}{\partial y}(x,y,t) = a_2(x,y,z_0) + \int_{z_0}^{z} dt \frac{\partial a_2}{\partial z}(x,y,t) =$$
$$= a_2(x,y,z_0) + a_2(x,y,z) - a_2(x,y,z_0) = a_2(x,y,z)$$

Si può trovare la funzione potenziale anche nel seguente modo. Indichiamo con $g(\underline{x})$ la funzione potenziale.

Si risolve la equazione $g_x(\underline{x}) = a_1(\underline{x})$ e quindi $g(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} dt a_1(t,y,z) + q(y,z)$. Si ottiene

$$g_y(\underline{x}) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_1}{\partial y}(t,y,z) + q_y(y,z) \underbrace{=}_{\text{usando la chiusura}} \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_2}{\partial x}(t,y,z)dt + q_y(y,z) \underbrace{=}_{\text{integrando}}$$
$$= a_2(x,y,z) - a_2(x_0,y,z,) + q_y(y,z) = a_2(x,y,x)$$

e quindi $q_y(y,z) = a_2(x_0,y,z)$. Una ulteriore integrazione dà $q(y,z) = \int_{y_0}^{y} ds a_2(x_0,s,z) + p(z)$. A questo punto la funzione potenziale è

$$g(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} dt a_1(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} ds a_2(x_0,s,z) + p(z).$$

L'ultima derivazione dà

$$g_z(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} dt \frac{\partial a_1}{\partial z}(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} ds \frac{\partial a_2}{\partial z}(x_0,s,z) + p_z(z).$$

ed usando sempre la chiusura si perviene a

$$g_z(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial a_3}{\partial x}(t,y,z)dt + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial a_3}{\partial y}(x_0,s,z)ds + p_z = a_3(x,y,z).$$

ossia

$$g_z(x,y,z) = a_3(x,y,z) - a_3(x_o,y,z) + a_3(x_o,y,z) - a_3(x_o,y_o,z) + p_z = a_3(x,y,z)$$

Integrando si ha $p_z(z) = a_3(x_0,y_0,z)$ e quindi $p(z) = c + \int_{z_0}^{z} du a_3(x_0,y_0,u)$ e quindi la funzione potenziale è $g(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} dt a_1(t,y,z) + \int_{y_0}^{y} ds a_2(x_0,s,z) + \int_{z_0}^{z} du a_3(x_0,y_0,u) + c$

Ogni altra funzione potenziale differisce dalla precedente per una costante. Infatti

Esercizio Si dimostri che la funzione appena scritta è uguale alla precedente a meno di una costante.

Ci basta far vedere che $\underline{\partial} f(\underline{x}) = \underline{\partial} g(\underline{x})$ e ciò è chiaramente vero. ••

• **Esercizio** Sia C l'insieme dato dall'intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ e il piano $x+y+z=0$. Sia data la forma differenziale $\omega = ydx + zdy + xdz$. ∂C è percorso in modo tale che la sua proiezione sul piano (x,y) sia percorsa in senso antiorario. Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$.

Prima soluzione Risolvendo il sistema delle due superfici ed eliminando z si ha $2x^2+2y^2+2xy = a^2$ ossia la proiezione sul piano (x,y) della curva che sta in $\mathbf{R}^3$.

$$\omega = d(xy) - xdy + zdy + x(-dx-dy) = d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - 2xdy + dy(-x-y) =$$
$$= -3xdy + d(xy) - \frac{1}{2}d(x^2) - \frac{1}{2}d(y^2)$$

$d(f(\underline{x})) = \dfrac{\partial f}{\partial x} f(\underline{x}) + \dfrac{\partial f}{\partial y} f(\underline{x}) + \dfrac{\partial f}{\partial z} f(\underline{x})$ ed è chiaramente una forma differenziale esatta. Quindi $\displaystyle\int_{\partial^+ C} \omega = -3 \int_{\partial^+ C} xdy$ e dal Lemma di Gauss-Green, $\displaystyle\int_{\partial^+ C} xdy$ è l'area della proiezione sul piano (x,y) del disco contenuto all'interno della circonferenza equatoriale. L'area ha il segno + se la proiezione della circonferenza è percorsa in senso antiorario. La proiezione di tale circonferenza è l'ellisse $2x^2+2y^2+2xy = a^2$. Con la trasformazione di coordinate $\begin{cases} x = (-\xi+\eta)/\sqrt{2} \\ y = (\xi+\eta)/\sqrt{2} \end{cases}$ l'ellisse diventa $\xi^2+3\eta^2 = a^2$ ossia $\dfrac{\xi^2}{a^2} + \dfrac{\eta^2}{(\frac{a}{\sqrt{3}})^2} = 1$ che può essere parametrizzata come $\xi = a\sin t,\ \eta = \dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t$ mentre la curva $\partial^+ C \in \mathbf{R}^3$ è $(\xi,\eta,z) = (\xi,\eta,-\sqrt{2}\xi) = (a\sin t, \dfrac{a}{\sqrt{3}}\cos t, -\sqrt{2}a\sin t)$ $(z=-x-y)$. L'area della proiezione è $\pi\dfrac{a^2}{\sqrt{3}}$ e quindi $\displaystyle\int_{\partial^+ C} \omega = -\sqrt{3}\pi a^2$. Più dettagliatamente $\displaystyle\iint_{2x^2+2y^2+2xy\le a^2} dxdy = \iint_{\xi^2+3\eta^2\le a^2} |J| d\xi d\eta = \iint_{\xi^2+3\eta^2\le a^2} d\xi d\eta$ che è l'area dell'ellisse data nelle variabili (ξ,η). ●●

Seconda soluzione Eseguiamo l'integrale curvilineo sempre tenendo conto dei contributi alla forma differenziale che possono essere ricondotti a forme esatte. Con il cambio di coordinate $((\xi,\eta)\to(x,y))$ scritto sopra abbiamo

$$\omega = \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\frac{d\eta-d\xi}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{-\xi+\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}\right)\frac{d\xi+d\eta}{\sqrt{2}} + \frac{\eta-\xi}{\sqrt{2}} d\Bigg(\underbrace{-\frac{-\xi+\eta}{\sqrt{2}} - \frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}}_{z=-x-y}\Bigg) + =$$

Osserviamo che $\xi d(\xi) = d(\xi^2)/2$ (così per η) e quindi l'integrale su una curva chiusa è zero. Rimaniamo con

$$\frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{2} + (-\sqrt{2}\eta)\frac{d\xi}{\sqrt{2}} + \frac{-\xi}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}d\eta) = \frac{3}{2}(\xi d\eta - \eta d\xi),$$

$$\xi = a\sin t,\ \eta = \frac{a}{\sqrt{3}}\cos t,\ 0\le t\le 2\pi,\ \Longrightarrow\ \int \frac{3}{2}(\xi d\eta - \eta d\xi) = -\sqrt{3}\pi a^2$$

●●

♠ *Terza soluzione* Come la prima solo che per calcolare $\displaystyle\int_{\partial^+ C} xdy$ usiamo coordinate polari. Dunque dobbiamo calcolare l'integrale $\displaystyle\iint_{2x^2+2y^2+2xy\le a^2} dxdy$. Usiamo le coordinate polari $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$, ed otteniamo che $2x^2+2y^2+2xy = a^2$ è equivalente a $2\rho^2+2\rho^2\sin\vartheta\cos\vartheta = a^2$ ossia $\rho^2 = \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$ e quindi $\displaystyle\iint_{\tilde{D}} dxdy = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}}} \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2}\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} + \int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$. Con la sostituzione $\vartheta' = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ si ha $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} d\vartheta \frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta} = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{a^2}{2-\sin 2\vartheta}$ e quindi l'integrale è $\displaystyle\int_0^{\pi/2} d\vartheta \frac{4a^2}{4-\sin^2 2\vartheta}$. Per risolvere l'integrale bisogna effettuare la sostituzione $\vartheta = \arctan x$ da cui si ottiene

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}\frac{4a^2}{4-4\frac{x^2}{(1+x^2)^2}} = a^2\int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{x^4+x^2+1} = a^2\int_0^{+\infty} dx \frac{1+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2-x+1} + \frac{a^2}{2}\int_0^{+\infty} dx \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{a^2}{2} 2\pi \frac{1}{\sqrt{3}}$$

e quindi il risultato è $-\sqrt{3}\pi a^2$.

Quarta soluzione Una volta arrivati a $\displaystyle\int_0^{2\pi} d\vartheta \frac{1}{2}\frac{a^2}{2+\sin 2\vartheta}$ usiamo i residui. $e^{it}=z$ da cui

$$\frac{a^2}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz}\frac{1}{2+\frac{z^2-z^{-2}}{2i}}=a^2\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4+4iz^2-1}$$

$z^4+4iz^2-1=0$ ossia $z^2=-2i\pm i\sqrt{3}$ e solo il segno + ci interessa.

$$2\pi i a^2\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4+4iz^2-1}=2\pi i a^2\left(\frac{z_0}{4z_0^3+8iz_0}+\frac{z_1}{4z_1^3+8iz_1}\right)=2\pi i a^2\left(\frac{1}{4z_0^2+8i}+\frac{1}{4z_1^2+8i}\right)=$$
$$=2\pi i a^2\frac{2}{4z_0^2+8i}=\frac{\pi a^2}{\sqrt{3}}$$

Una quinta e sesta soluzione vengono date dopo il Teorema di Stokes ♠♠

♠ Sia dato l'insieme $S=\{\underline{x}\in\mathbf{R}^3\colon x^2+y^2=1, y=\sqrt{x^2+z^2}\}$ e sia $\underline{\gamma}$ la curva con sostegno S e tale che la sua proiezione sul piano (x,z) è percorsa in senso antiorario. Calcolare $\displaystyle\oint\omega$ dove
$\omega=\left(\dfrac{x}{y}dx+\dfrac{x^2}{y}dy\right)+\left(\dfrac{z}{y}dy+\dfrac{z^2}{y^2}dz\right)+\dfrac{zdx-xdz}{x^2+z^2}$ ♠♠

♠ Si trovino i punti di estremo della funzione $u=f(x,y,z)=6-4x-3y$ soggetti alla condizione $x^2+y^2+z^2=9$

Svolgimento

$$(6-4x-3y)-\lambda(x^2+y^2+z^2-9)\implies -4-2\lambda x=0,\ -3-2\lambda y=0, -2\lambda z=0,\ x^2+y^2+z^2=9$$

Dalla terza: $\lambda=0$ oppure $z=0$. Se $\lambda=0$ allora la prima implica $-4=0$ assurdo. Dunque rimane $z=0$ mentre la prima e seconda danno $x=-2/\lambda$, $y=-3/(2\lambda)$. La terza ci dà $\dfrac{4}{\lambda^2}+\dfrac{9}{4\lambda^2}=9$ da cui $\lambda=\pm\dfrac{5}{6}$ Otteniamo i due punti $P_1\equiv(\dfrac{-12}{5},\dfrac{-9}{5},0)$, $\lambda_1=\frac{5}{6}$ $p_2\equiv(\dfrac{12}{5},\dfrac{9}{5},0)$, $\lambda_2=\dfrac{-5}{6}$

$$(6-4x-3y)|_{P_1}=21,\qquad (6-4x-3y)|_{P_2}=-9$$

La funzione $z=6-4x-37$ è continua sull'insieme $x^2+y^2+z^2=9$ che è compatto e quindi ammette massimo e minimo assoluti. Evidentemente P_1 è di massimo mentre P_2 di minimo.

Ad ogni modo possiamo applicare il Teorema con le condizioni sufficienti. Dobbiamo studiare la forma quadratica

$$(\, h_1\, h_2\, h_3\,)\begin{pmatrix}-2\lambda & 0 & 0\\ 0 & -2\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}=-2\lambda(h_1^2+h_2^2+h_3^2),$$

La tangenzialità al vincolo dello spostamento $\underline{h}$ e calcolato in P_1 impone

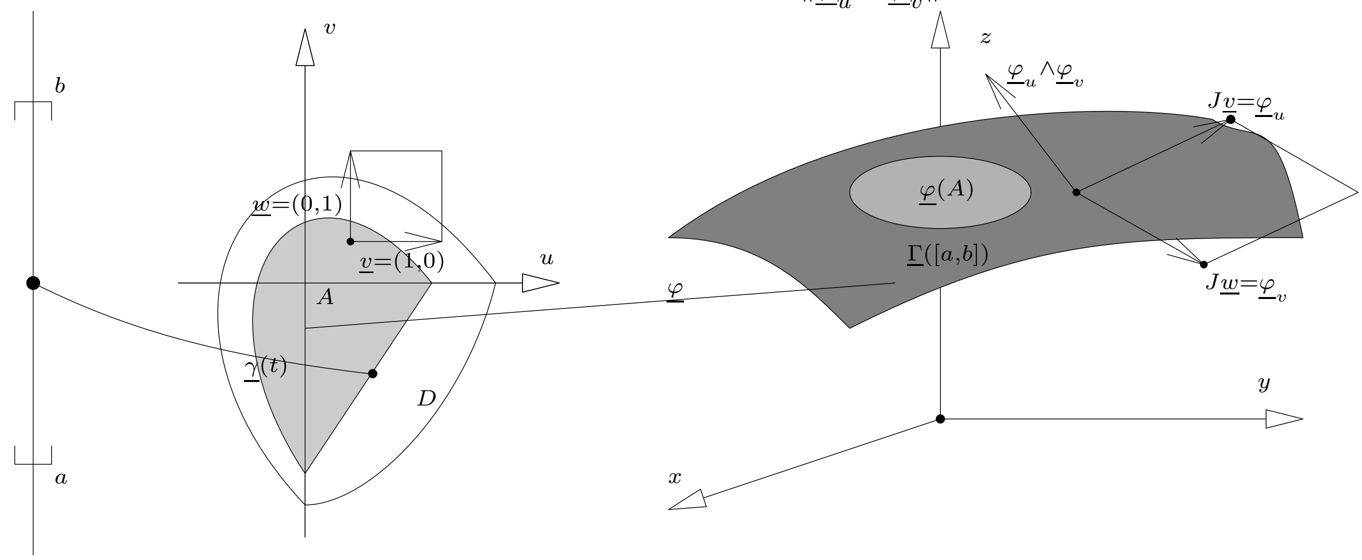
$$-2(\frac{-12}{5}h_1-\frac{9}{5}h_2)=0\implies h_1=-\frac{3}{4}h_2$$

e quindi abbiamo $-2\dfrac{5}{6}(\dfrac{25}{16}h_2^2+h_3^2)<0$ e quindi è un massimo. Lo stesso conto in P_2 dà $-2\dfrac{-5}{6}(\dfrac{25}{16}h_2^2+h_3^2)>0$ (minimo). ♠♠

♠ Trovare il minimo della funzione $f(x,y,z)=x+y+z$ con il vincolo $x^a y^b z^c = r$ con $x,y,z,a,b,c\geq 0$. ♠♠

105 min. Lezione del 9/12/2019 Teorema di Stokes o del rotore

Sia $D\subset \mathbf{R}^2$ compatto $D=\overline{B}$ con B aperto e connesso. $\underline{\varphi}\colon D\to\mathbf{R}^3$ è una superficie regolare di equazioni parametriche $\underline{\varphi}(u,v)=\begin{cases} x=\varphi^1(u,v)\\ y=\varphi^2(u,v)\\ z=\varphi^3(u,v)\end{cases}$ .Sia $A=\overset{\circ}{A}$ un aperto tale che $\overline{A}\subset\overset{\circ}{D}$ e ∂A è una curva regolare. Sia $S=\underline{\varphi}(A)$. Chiameremo *bordo di* S l'immagine secondo $\underline{\varphi}$ della frontiera di A ossia $\partial S=\underline{\varphi}(\partial A)$. Sia $\underline{\gamma}\colon[a,b]\to\mathbf{R}^2$ una curva il cui sostegno è ∂A e orienta ∂A positivamente. La curva $\underline{\Gamma}=\underline{\varphi}\circ\underline{\gamma}\colon[a,b]\to\mathbf{R}^3$ ha come sostegno ∂S. Si dice che Γ orienta positivamente ∂S e si indica con ∂^+S il cammino individuato da Γ. Se $\underline{\gamma}(t)=\begin{cases}u=u(t)\\ v=v(t)\end{cases}$ la curva Γ ha equazioni $\begin{cases}x=\varphi^1(u(t),v(t))\\ y=\varphi^2(u(t),v(t))\\ z=\varphi^3(u(t),v(t))\end{cases}$ I vettori $\underline{a}(t)\in\mathbf{R}^2$ e $\underline{b}(t)\in\mathbf{R}^2$ sono rispettivamente i vettori, normalizzati a uno, tangente e ortogonale a ∂A in modo tale che $\underline{\gamma}$ orienti positivamente ∂A. $\underline{a}(t)\overset{\rm def}{=}(a_1,a_2)=\dfrac{(u'(t),v'(t))}{\sqrt{(u')^2+(v')^2}}$ e $\underline{b}(t)=(b_1,b_2)=\dfrac{(v'(t),-u'(t))}{\sqrt{(u')^2+(v')^2}}$. La matrice $\begin{pmatrix}\varphi^1_u & \varphi^1_v\\ \varphi^2_u & \varphi^2_v\\ \varphi^3_u & \varphi^3_v\end{pmatrix}$ applicata ai vettori di $\mathbf{R}^2$ ci fornisce la loro immagine in $\mathbf{R}^3$ sotto la parametrizzazione della superficie ossia i due vettori $\begin{pmatrix}\varphi^1_u & \varphi^1_v\\ \varphi^2_u & \varphi^2_v\\ \varphi^3_u & \varphi^3_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\end{pmatrix}\overset{\rm def}{=}\underline{t}$ e $\begin{pmatrix}\varphi^1_u & \varphi^1_v\\ \varphi^2_u & \varphi^2_v\\ \varphi^3_u & \varphi^3_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\end{pmatrix}\overset{\rm def}{=}\underline{\tau}$. Sia $\underline{n}_e$ la normale esterna che è definita come quella normale (delle due possibili $\underline{n}\overset{\rm def}{=}\dfrac{\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v}{\|\underline{\varphi}_u\wedge\underline{\varphi}_v\|}$ e $-\underline{n}$) tale che $(\underline{\tau}\wedge\underline{t})\cdot\underline{n}_e>0$



Sia ora $\underline{V}(\underline{x})=P(\underline{x})\underline{i}+Q(\underline{x})\underline{j}+R(\underline{x})\underline{k}$ un campo vettoriale al quale è associata la forma differenziale $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$. Abbiamo il seguente importante teorema

Teorema 8.6 (di Stokes) *Sia S una superficie di classe C^2. Allora* $\displaystyle\iint_S(\underline{rotV},\underline{n})d\sigma=\int_{\partial^+S}\omega$

Esempi

Riprendiamo l'esercizio del 5/12/2019 risolvendolo con Stokes.

Quinta soluzione Applichiamo il Teorema di Stokes. La superficie è quella del piano $z+x+y=0$ ($\underline{\varphi}(A)$) nella figura. La curva è quella già scritta ($\underline{\Gamma}([a,b])$ nella figura). La parametrizzazione della superficie è $x=u$, $y=v$, $z=-u-v$ e quindi $\underline{\varphi}_u \wedge \underline{\varphi}_v = (1,1,1)$. $rot\underline{V} = -(1,1,1)$

$$\int_{\partial^+ C} \omega = \iint_D (\underline{rotV}, \underline{n}) d\sigma = \iint_{u^2+v^2+2uv \le a^2} -(1,1,1)\cdot(1,1,1)\frac{1}{\sqrt{3}} \underbrace{\sqrt{3} du\, dv}_{d\sigma} =$$

$$= -3 \iint_{u^2+v^2+2uv \le a^2} du\, dv = -\sqrt{3}\pi a^2$$

Sesta soluzione Come superficie $\underline{\varphi}(A)$ stavolta prendiamo $x^2+y^2+z^2=a^2$ e $z+y+x \ge 0$. Eseguiamo il cambio di coordinate

$$x = \frac{\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{-\xi}{\sqrt{2}} + \frac{\eta}{\sqrt{6}} + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}, \quad z = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\eta + \frac{\zeta}{\sqrt{3}}$$

È il cambio che porta il vettore $(1,1,1)$ nel vettore $(0,0,1)$ e quindi il piano $z+x+y=0$ diventa $\zeta=0$. Inoltre è una rotazione per cui $x^2+y^2+z^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$. Il sotegno $x^2+y^2+z^2=a^2$ $x+y+z=0$ diventa $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2$, $\zeta=0$ (il piano equatoriale nel sistema (ξ,η,ζ). La forma differenziale diventa

$$ydx+zdy+xdz = \frac{\sqrt{3}}{2}(\eta d\xi - \xi d\eta) - \frac{1}{2}\xi d\xi - \frac{1}{2}\eta d\eta + \zeta d\zeta$$

e a questo punto il calcolo diventa evidente.

♠ Si valuti $\displaystyle\int_{\underline{\varphi}} \omega$ dove $\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$ e $\underline{\varphi}$ è la curva il cui sostegno è costituito dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2=2y$ e dal piano $y=z$.

La curva $\underline{\varphi}$ è chiusa in quanto il piano è inclinato e il cilindro è infinito. Sostituendo $z=y$ nella forma differenziale vediamo che $\omega = 2d(xy)$ e quindi l'integrale è nullo.

Usando il Teorema di Stokes vediamo che $\underline{rotV} = \underline{0}$ dove $\underline{V} = (y+z)\underline{i} + (z+x)\underline{j} + (x+y)\underline{k}$ e quindi...

Sia C l'insieme dato dall'intersezione del cilindro $x^2+y^2=a^2$ e il piano $\frac{x}{a}+\frac{z}{b}=1$ $a,b>0$. Sia data la forma differenziale $\omega=(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$. Sia $\partial^+ C$ l'orientazione positiva su C. Si calcoli $\int_{\partial^+ C} \omega$.

L'intersezione (detta S) delle due superfici, una volta proiettata sul piano (x,y) è data dalla circonferenza $x^2+y^2=a^2$ e il disco da essa contenuto è detto D.

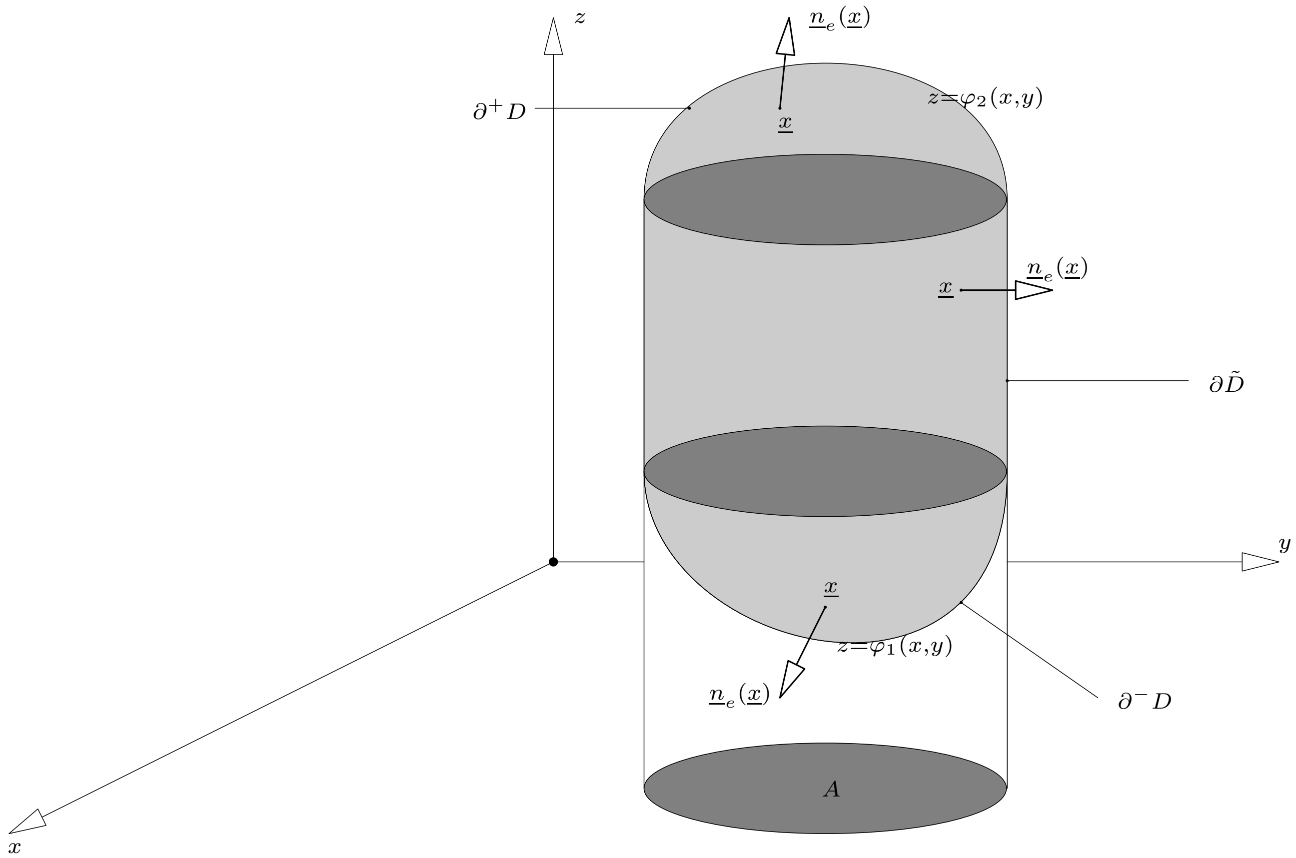
Usando l'espressione di z in funzione di x, l'integrale della forma è dato da $\displaystyle\int_{\underline{\varphi}} \left((ydx - xdy) - \frac{2b}{a} xdy \right) =$ $-2\pi a^2 - 2ab\pi = -2a\pi(a+b)$ e il bordo di S è percorso in senso antiorario. $\underline{\varphi}$ è la parametrizzazione del bordo di S ossia $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=b(1-\cos t)$ ma tale parametrizzazione non serve ai fini del calcolo.

Usando il Teorema di Stokes abbiamo $\underline{rotV} = -2(1,1,1)$ dove $\underline{V} = (y-z)\underline{i} + (z-x)\underline{j} + (x-y)\underline{k}$ e la normale esterna è il vettore $\underline{n}_e = \frac{1}{c}(\frac{b}{a},0,1)$ dove c è il modulo del vettore $(\frac{b}{a},0,1)$. $\displaystyle\iint_D (\underline{rotV}, \underline{n}_e) d\sigma = (-2\frac{b}{a} - 2)\pi a^2$. ♠♠

105 min. Lezione del 10/12/2019 Teorema della Divergenza

Teorema *In riferimento alla figura sottostante si ha*

$$\iint_{\partial^+ D} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e) d\sigma + \iint_{\partial^- D} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e) d\sigma + \iint_{\partial \tilde{D}} (\underline{V}(\underline{x}), \underline{n}_e) d\sigma = \iiint div \underline{V}(\underline{x}) dxdydz$$

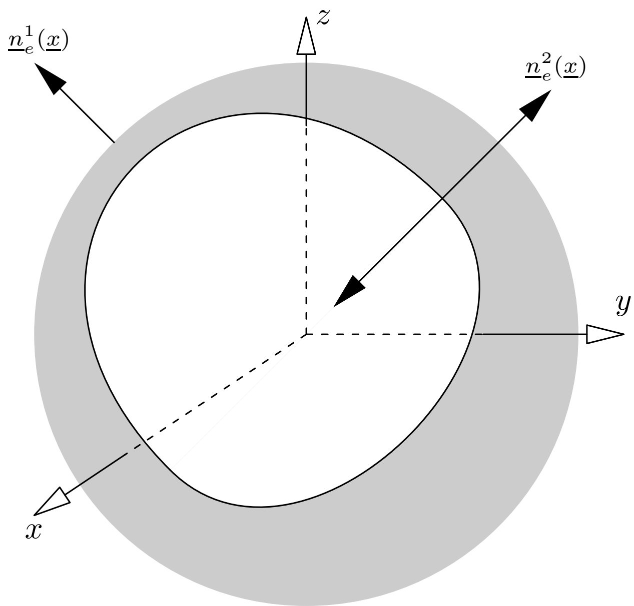


La superficie $\partial \tilde{D}$ è data da $x = \gamma_1(t)$, $y = \gamma_2(t)$, $z = u$, $a \leq t \leq b$ con $\underline{\gamma}(a) = \underline{\gamma}(b)$ e $\varphi_1(\underline{\gamma}) \leq u \leq \varphi_2(\underline{\gamma})$. Il bordo di A è dato dalla curva $\underline{\gamma}(t)$.

Corollario *Teorema a pag.222 del libro di testo*

Corollario *Siano dati due aperti regolari D_1 e D_2 tali che $\overline{D}_2 \subset D_1$. Sia dato il campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{3} V_i(\underline{x}) \underline{e}_i$, $\underline{V} \in C^1(\mathbf{R}^3)$ tale che $div \underline{V} \equiv 0$. Siano $\underline{n}_e^1$ e $\underline{n}_e^2$ le normali esterne delle regioni racchiuse da D_1 e D_2. Allora abbiamo $\iint_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma = \iint_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma$.*

Dimostrazione Sia $\underline{\nu}$ la normale esterna della regione compresa fra D_1 e D_2 che chiamiamo D_3. Dal Teorema di Gauss abbiamo $\iiint_{D_3} div \underline{V} dxdydz = 0 = \iint_{\partial D_3} (\underline{V}, \underline{\nu}) d\sigma$. $\iint_{\partial D_3} (\underline{V}, \underline{\nu}) d\sigma = \iint_{\partial D_1} (\underline{V}, \underline{n}_e^1) d\sigma - \iint_{\partial D_2} (\underline{V}, \underline{n}_e^2) d\sigma = 0$ da cui il risultato. ∎



Esempio 1 pag.259 del libro. La proiezione dell'intersezione fra la sfera e il cono è data da $x^2+y^2=2y-x^2-y^2$ ossia $x^2+(y-1/2)^2=1/4$. L'integrale è

$$\iint_{x^2+(y-1/2)^2\le 1/4} dxdy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2y-x^2-y^2}} zdz=\iint_{x^2+(y-1/2)^2\le 1/4} dxdy\frac{1}{2}(2y-2x^2-2y^2)$$

Usiamo coordinate polari $x=\frac{r}{2}C$ $y=\frac{1}{2}+\frac{r}{2}S$, $0\le t\le 2\pi$, $0\le r\le 1$ da cui

$$\int_0^{2\pi} dt\int_0^1 r\frac{r}{4}(\frac{1}{2}+\frac{rS}{2}-\frac{r^2}{4}-\frac{1}{4}-\frac{rS}{2})=\frac{\pi}{32}$$

• Calcolare il flusso del campo vettoriale $\underline{V}(\underline{x})=(z,y,-z)$ attraverso la superficie laterale della piramide che ha i vertici di base nei punti $(1,1,0)$, $(0,2,0)$, $(-1,-1,4)$, $(0,1,1)$ e vertice nel punto $(0,0,5)$.

Svolgimento Dette S_1,S_2,S_3,S_4 le quattro superfici laterali e B la base della piramide si ha

$$\sum_{i=1}^4\iint_{S_i}(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma+\iint_B(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma=\iiint div(\underline{V}(\underline{x}))dx\,dy\,dz=0$$

da cui

$$\sum_{i=1}^4\iint_{S_i}(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma=-\iint_B(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma$$

Sia T l'insieme interno all'insieme stellato determinato dai quattro punti $(1,1,0)$, $(0,2,0)$, $(-1,-1,0)$, $(0,1,0)$.

$$-\iint_B(\underline{V}(\underline{x}),\underline{n}_i)d\sigma=-\iint_T(z,y,-z)\cdot(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}})dx\,dy=\iint_T\frac{y}{\sqrt{3}}dx\,dy=$$
$$=\int_0^1 dx\int_1^{2-x} dyy+\int_{-1}^0 dx\int_{2x+1}^{3x+2} ydy=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1$$

••

Successioni di funzioni. Definizione di convergenza puntuale e uniforme, esempi.

Data la successione $\{x^n\}$, $0 \le x \le 1$, sappiamo che il limite per $n \to \infty$ è dato dalla funzione $L(x) = 0$ per $0 \le x < 1$ e $L(1) = 1$. La funzione $L(x)$ è quindi discontinua. In altre parole $\lim\limits_{x\to 1^-}\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$ mentre $\lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1^-} x^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$ e i due limiti non sono scambiabili.

Si prenda ora la successione di funzioni data da $f_n(x) = n^2 x$ per $0 \le x \le 1/n$, $f_n(x) = -n^2(x - 2/n)$ per $1/n \le x \le 2/n$ e $f_n(x) = 0$ per $2/n \le x \le 1$. È facile vedere che $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni x e quindi $L(x) = 0$ e quindi $\displaystyle\int_0^1 L(x)dx = 0$ ma $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1$ e quindi l'integrale del limite è diverso dal limite degli integrali. Tali fenomeni sono caratteristici di una convergenza della successione a $L(x)$ NON UNIFORME.

105 min. Lezione del 12/12/2019 Successioni e serie di funzioni Da pag.4 a pag.12 tranne il Teorema di pag.9. Notare che nel teorema di pag.8 è essenziale l'intervallo limitato ($a \ne -\infty$, $b \ne +\infty$). La definizione di uniforme convergenza per la successione $\{f_n(x)\}$ è anche data da $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon$: $n > n_\varepsilon \implies \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

• La convergenza uniforme può anche essere formulata come

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon\colon\ p, q > n_\varepsilon \implies \sup_{x\in I} |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon$$

Facciamo vedere che la successione $\{x^n\}$ non è uniformemente convergente in $[0, 1)$. $x^n < \varepsilon$ ossia $n \ln x < \ln \varepsilon$ e quindi $n > \dfrac{-\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln x}$. Se ne dedurrebbe $n_{\varepsilon,x} = 1 + \left[\dfrac{-\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln x}\right]$ ma è evidente che se $0 < \varepsilon < 1$, $n_{\varepsilon,x} \to +\infty$ se $x \to 1^-$ e quindi la successione non converge uniformemente.

Si può anche implementare la definizione di non uniforme convergenza ossia

$$\exists\, \varepsilon > 0\colon \forall\, m\ \exists\, n > m\ \exists\, \overline{x}_n \in [0, 1)\colon |f_n(\overline{x}_n) - f(\overline{x}_n)| \ge \varepsilon$$

Prendiamo $\varepsilon = 1/(2e)$ e $\overline{x} = (1 - 1/n)$ ottenendo così $\overline{x}^n = e^{n\ln(1-1/n)} \to 1/e > 1/(2e)$. Significa che $\boxed{1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to 1^-} x^n \ne 0 = \lim\limits_{x\to 1^-}\lim\limits_{n\to+\infty} x^n}$

Se $I = [0, a]$ con $a < 1$ la convergenza è uniforme. Infatti $\sup\limits_{0\le x\le a} n_{\varepsilon,x} = 1 + \left[\dfrac{-\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln x}\right] \ge 1 + \left[\dfrac{-\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln a}\right]$ e tale valore va bene quale n_ε **per ogni** $0 \le x \le a$. Notare tra l'altro che per $x \in [0, a]$ la funzione limite è identicamente nulla e quindi il teorema di pag.4 non previene la convergenza uniforme. In tal caso $\boxed{0 = \lim\limits_{n\to+\infty}\lim\limits_{x\to a^-} x^n = \lim\limits_{x\to a^-}\lim\limits_{n\to+\infty} x^n}$ ••

• Facciamo vedere che la successione di pag.7 è uniformemente convergente in $[a, +\infty)$ per $a > 0$. Il massimo della funzione xe^{-x^2k} cade in $x_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ e quindi per $k > 1/(2a^2)$ si ha $x_k < a$. Ciò vuol dire che $\max\limits_{x\ge a} f_k(x) = ae^{-a^2k}$ (si veda la figura a pag.7). Chiaramente esiste k_ε tale che $ake^{-a^2k} < \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$ e quindi $\sup\limits_{x\ge a} kxe^{-x^2k} < \varepsilon$ per ogni $k > k_\varepsilon$ ossia l'uniformre convergenza. ••

• Dimostriamo che la funzione $f_n(x) = n^2 x$ per $0 \le x \le 1/n$, $f_n(x) = -n^2(x - 2/n)$ per $1/n \le x \le 2/n$ e $f_n(x) = 0$ per $2/n \le x \le 1$ non è uniformemente convergente in $[0, 1]$; fatto questo certo da $\boxed{1 = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx \ne 0 = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx.}$

$f_n(\overline{x}_n) = f(1/n) = n$ da cui la non convergenza uniforme. Se invece considerassimo $x \in [a, 1]$ $0 < a < 1$, allora $\sup\limits_{[a,1]} f_n(x) = 0$ non appena $2/n < a$. ••

• L'esempio 1 a pag.5 non converge uniformemente in quanto la funzione limite è discontinua. Basta osservare che $f_k(\overline{x}_k) = f_k(k\frac{1}{k}) = \arctan(1) = \pi/4$ e non è piccolo a piacere. ••

• Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^2 e^{-x^2 k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

Svolgimento La serie converge puntualmente per ogni $x \in \mathbf{R}$. Se $x = 0$ vale identicamente zero. Se $x \neq 0$ possiamo osservare che $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{e^{-x^2 k}} = e^{-x^2} < 1$ da cui la convergenza. Possiamo anche osservare che $\lim\limits_{k\to+\infty} k^2 e^{-x^2 k} = 0$.

Convergenza uniforme. Siccome in questo caso specifico possiamo addirittura calcolare $S(x)$

$$S(x) \doteq x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x^2 k} = \begin{cases} x^2 \dfrac{1}{1 - e^{-x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

siamo in grado di dire che $\lim_{x\to 0} S(x) \neq 0$ ossia la funzione limite non è continua in $x = 0$; segno questo che la convergenza non è uniforme in nessun intervallo del tipo $(-a, a)$, $(-a, 0)$, $(a, 0)$.

Dimostrare che la converegnza è uniforme in ogni intervallo del tipo $[a, +\infty)$ con $a > 0$. ••

♠ Dimostrazione diretta che la convergenza non è uniforme in $(0, 1)$. Sia $x \in [1/\delta, 2/\delta] \subset (0, 1)$ e sia x tale che $x^2 k \leq 1$. Per questo è sufficiente $k \leq \delta^2/4$. Ne segue che

$$\sup_{(0,1)} x^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-x^2 k} \geq \sup_{[1/\delta,2/\delta]} x^2 \sum_{k=n+1}^{\delta^2/4} e^{-x^2 k} \geq \frac{1}{\delta^2} \sum_{k=n+1}^{\delta^2/4} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} \frac{\delta^2 - n}{4\delta^2} \geq \frac{1}{8e}$$

non appena $\delta^2 > n^2/4$ per cui, dato un qualsiasi intero n, trovo un δ che rende la precedente quantità maggiore di $1/(8e)$ ossia la non convergenza uniforme. ♠♠

♠ Stabilire l'insieme di convergenza puntuale della serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k}$. Dire se in tale insieme la convergenza è uniforme.

Svolgimento Per la convergenza puntuale si procede come sopra e si verifica che converge per ogni $x \in \mathbf{R}$. Poi verifichiamo che $S(x) \doteq \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} = \frac{x^3}{1 - e^{-x^2}}$ se $x \neq 0$ mentre vale zero se $x = 0$. Siccome $\lim\limits_{x\to 0} S(x) = 0$, ci sono gli indizi di una possibile uniforme convergenza ed infatti il massimo della funzione $x^3 e^{-x^2 k}$ si ha per $x_k = \left(\dfrac{3}{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \doteq \overline{x}_k$ da cui

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^3 e^{-x^2 k} |_{x_k = \overline{x}_k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{2k}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-3/2} < \varepsilon$$

da cui la convergenza totale e quindi uniforme. ♠♠

• Dimostrare che la serie geometrica $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z^k$ non converge uniformemente per $|z|<1$. Per essere uniformemente convergente deve accadere

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ n_\varepsilon\colon\ p,q>n_\varepsilon \implies \sup_{x\in I}|f_p(z)-f_q(z)|<\varepsilon$$

$$f_q(z)-f_p(z)=\sum_{k=0}^{q} z^k-\sum_{k=0}^{p} z^k=\sum_{k=p+1}^{q} z^k=\frac{z^{q+1}-z^{p+1}}{1-z}$$

Prendiamo $z=1-\delta$ con $\delta=\dfrac{1}{(p+q)^2}$ ed otteniamo

$$\frac{(1-\delta)^{q+1}-(1-\delta)^{p+1}}{\delta}=\frac{e^{(q+1)\ln(1-\delta)}-e^{(p+1)\ln(1-\delta)}}{\delta}=$$
$$=\frac{1+(q+1)(\delta)+O(\delta^2)-1-(p+1)(-\delta)+O(\delta^2)}{\delta}=q-p+O(\delta)$$

e non è una quantità piccola a piacere. Perché è necessario specificare $\delta=\dfrac{1}{(p+q)^2}$ e non lasciare semplicemente δ indipendente da p e q?

Si poteva pure scrivere $|f(z)-f_n(z)|=|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k|=\frac{z^{n+1}}{1-z}$. Ora prendiamo $z=1-1/n$ da cui $n\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\to+\infty$ e quindi niente uniforme convergenza. ••

♠ Dimostare che la serie di potenze $\sum a_kz^k$ converge uniformemente in $|z|\le c<1/R$ dove R è il raggio di convergenza della serie definito da $R=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}|a_k|^{-1/k}$

Svolgimento $R=\displaystyle\lim_{k\to+\infty}|a_k|^{-1/k} \iff \lim_{k\to+\infty}|R^ka_k|^{1/k}=1$ e quindi, definitivamente, $R^k|a_k|<(1+\varepsilon)^k$ ossia $R^k|a_k|<(1+\varepsilon)^k$ per ogni $k>k_\varepsilon$. Ora scriviamo $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|a_kz^k|=\sum_{k=0}^{k_\varepsilon}|a_kz^k|+\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty}|a_kz^k|$ e $\displaystyle\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty}R^k|a_k\frac{z^k}{R^k}|\le\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty}R^k|a_k|\frac{|z^k|}{R^k}\le\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty}(1+\varepsilon)^kc^k$ e scegliamo $\varepsilon<1/c-1$. In tal modo $(1+\varepsilon)c=\delta<1$ e abbiamo $\displaystyle\sum_{k=k_\varepsilon+1}^{+\infty}\delta^k$ evidentemente convergente essendo $\delta<1$. Ne segue la totale convergenza della serie. ♠♠

♠ Trovare gli insiemi di convergenza puntuale e uniforme della successione $f_k(x)=x/k$ ♠♠

♠ Trovare gli insiemi di convergenza puntuale della successione di funzioni $f_k(x)=\sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k}$. Dimostrare poi che converge uniformemente in ogni insieme $[-a,a]$ con $a>0$

1) Dimostrare che non converge uniformemente nell'insieme $[a,+\infty)$.

Svolgimento Convergenza puntuale. Sia $|x+1|\ge1$.

$$f_k(x)=\sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k}=|x+1|\left(1+e^{x^2}|x+1|^{-k}\right)^{\frac1k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}|x+1|$$

Sia $|x+1|<1$.

$$f_k(x)=\sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k}=e^{\frac{x^2}{k}}\left(1+e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac1k}\xrightarrow[k\to+\infty]{}1$$

Convergenza uniforme in $[-2,0]$ ossia $|x+1|<1$.

$$|f_k(x)-1| = \left|\sqrt[k]{e^{x^2}+|x+1|^k}-1\right| = \left|e^{\frac{x^2}{k}}\left(1+e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}}-1\right|$$

Ora usiamo:
1) $(1+x)^{\frac{1}{k}} \leq 1+x/k$ dimostrabile studiando il grafico della funzione $g(x)=(1+x)^{\frac{1}{k}}-1-x/k$ per $x\geq 0$ e
2) $e^x \leq 1+x(e-1)$, $0\leq x\leq 1$.
Quindi otteniamo per $k\geq 2$

$$0 \leq \left|e^{\frac{x^2}{k}}\left(1+e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}}-1\right| = e^{\frac{x^2}{k}}\left(1+e^{-x^2}|x+1|^k\right)^{\frac{1}{k}}-1 \leq$$
$$\leq \left(1+\frac{x^2}{k}(e-1)\right)\left(1+\frac{1}{k}e^{-x^2}|x+1|^k\right)-1 = (1+O(\frac{1}{k}))-1 = O(\frac{1}{k})$$

da cui la convergenza uniforme in $[-2,0]$.

Convergenza uniforme in $[0,A]$ con $A>0$. Dobbiamo stimare

$$|f_k(x)-|x+1|\,| = \left||x+1|\left(1+e^{x^2}|x+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}}-|x+1|\right| \leq |x+1|\left(1+\frac{1}{k}e^{x^2}|x+1|^{-k}-1\right) \leq$$
$$\leq \frac{1}{k}(A+1)e^{A^2}\cdot 1$$

e quindi la convergenza uniforme. Ho usato $(1+x)^{\frac{1}{k}} \leq 1+x/k$. Unendo con il punto precedente, otteniamo la convergenza uniforme nell'insieme $[-a,a]$.

1) Non convergenza uniforme in $[a,+\infty)$. Dobbiamo far vedere che

$$\exists\ \varepsilon>0\text{: } \forall\ m\ \exists\ k>m\text{: } \sup_{x\in[a,+\infty)} |f_k(x)-|x+1||\geq\varepsilon$$

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_k(x)-|x+1|\,| \geq |k+1|\cdot\left|\left(1+e^{k^2}|k+1|^{-k}\right)^{\frac{1}{k}}-1\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$$

È facile verificare che la convergenza è uniforme in tutti gli insiemi della forma $(-\infty,a]$, con $a<-2$, $[a,b]$, $0<a<b<2$, $[a,+\infty)$, $a>0$. Invece la convergenza non è uniforme nell'insieme $[a,b]$ con $a<-2$, e $b>-2$ e $a<0$, $b>0$. In quest'ultimo caso è facile applicare il teorema a pag.9 del libro.

Si espliciti la non convergenza uniforme nell'intervallo $[-1,1]$. ♠♠

♠ Studiare al convergenza puntuale ed uniforme della successione $f_k(x)=\dfrac{x}{1+(kx)^2}$. Puntualmente converge a zero per ogni x. Per la convergenza uniforme si possono usare due strade. La prima consiste nel fare la derivata prima

$$f_k'(x) = \frac{1-k^2x^2}{1+(kx)^2} \geq 0 \iff |x|\leq 1/k$$

Quindi il massimo di $f_k(x)$ lo si ha per $x=1/k$ e vale $1/k$. Abbiamo quindi $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_k(x)| \leq \dfrac{1}{k} < \varepsilon$ per ogni $k>[1/\varepsilon]$ da cui la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$. ♠♠

♠ Sia data la successioni di funzioni $f_k(x) = \dfrac{x}{1+|(kx)^p|}$. Si dica per quali valori di $0<p\le 1$ converge uniformemente in $\mathbf{R}$.

Risposta Se $0<p<1$ la successione converge ma non uniformemente. Infatti certamente violo la relazione da soddisfare $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} |f_k(x)|<\varepsilon$ se prendo $x_k = k^{\frac{1}{1-p}}$. Se invece $p=1$, maggiorando $|f_k(x)| \le \dfrac{|x|}{|x|k} = \dfrac{1}{k}$ si ha la convergenza uniforme.♠♠

♠ Si dimostri che la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k}$ converge uniformemente per $x\ge 0$ ma non converge totalmente.

Dimostrazione Certamente la serie converge puntualmente essendo una serie di Leibnitz. Sia quindi $\displaystyle S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{x+k} \doteq \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k(x)$ ed inoltre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k(x) \doteq S_n(x)$

$$S - S_{2n} = -a_{2n+1}(x) + \underbrace{(a_{2n+2}(x) - a_{2n+3}(x))}_{\ge 0} + \underbrace{(a_{2n+4}(x) - a_{2n+5}(x))}_{\ge 0} + \ldots +$$

$$+ (a_{2n+6}(x) - a_{2n+7}(x)) + \ldots \ge -a_{2n+1}(x)$$

$$S - S_{2n-1} = a_{2n}(x) + \underbrace{(-a_{2n+1}(x) + a_{2n+2}(x))}_{\le 0} + (-a_{2n+3}(x) + a_{2n+4}(x)) + \ldots +$$

$$+ (-a_{2n+5}(x) + a_{2n+6}(x)) + \ldots \le a_{2n}(x)$$

Quindi

$$|S(x) - S_k(x)| \le |a_{k+1}| = \frac{1}{x+k} \le \frac{1}{k}$$

e quindi la convergenza uniforme. La serie non può convergere totalmente in quanto

$$\frac{1}{x+k} \ge \frac{1}{2k}\ \forall\ k > x,\ \Longrightarrow\ \sum_{\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{x+k} \ge \sum_{\lfloor x\rfloor+1}^{+\infty}\frac{1}{2k} = +\infty$$

Ricordo che dalla convergenza totale segue sia la convergenza assoluta che la convergenza uniforme ma la convergenza assoluta è esclusa in questo caso. ♠♠

♠ Sia data la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(\pi k + \arctan\frac{x}{k})$. Si studi 1) la convergenza puntuale, 2) la convergenza uniforme sugli insiemi $[-a,a]$, 3) la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$.

Svolgimento 1) La serie è in realtà $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})$. Usiamo Le maggiorazioni $|\arctan x| \le |x|$ e $|\sin x| \le |x|$ ed abbiamo

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right| \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|}{k\sqrt{k}}$$

da cui l'assoluta convergenza e quindi la convergenza semplice.

2) Se $x\in[-a,a]$ abbiamo $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{|x|}{k\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a}{k\sqrt{k}}$ da cui la totale convergenza e quindi uniforme, in $[-a,a]$

3) Per la convergenza uniforme in $\mathbf{R}$, dobbiamo mostrare che, detta $S(x)$ la somma sella serie per ogni x, si ha

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|S(x)-\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right| = \sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right| < \varepsilon$$

Dall'esercizio precedente, dopo aver notato che $\sin x$ e $\arctan x$ sono entrambe crescenti, possiamo dire che

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\sin(\arctan\frac{x}{k})\right| \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sin(\arctan\frac{x}{n+1}) \le \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \varepsilon$$

se n è grande abbastanza. Oppure usare $\sin(\arctan x/k) = x/\sqrt{x^2+k^2}$ Naturalmente si poteva risolvere direttamente questa parte dell'esercizio che avrebbe compreso anche le prime due. ♠♠

♠ $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{1+k^4x^4}$ diverge a $+\infty$ per $x=0$ e converge per ogni altro valore di x in quanto il termine generale tende a zero come $1/k^4$. Chiaramente la convergenza non è uniforme su tutto $\mathbf{R}$ ma è uniforme in ogni sottoinsieme del tipo $[a,+\infty)$, $a>0$. ♠♠

♠ Si dica se converge e per quali valori di x, la serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+|x|)^{2k}}$. Si dica se nell'insieme trovato la convergenza è uniforme.

Svolgimento Basta osservare che $1+x^2\ge 2\sqrt{|x|}$ per cui $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{(1+|x|)^{2k}} \le \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{2k}}$. ♠♠

♠ Trovare il raggio di convergenza della serie $\sum z^k\sin(\pi\sqrt{k^2+\sqrt{k}})$ e verificare se converge per $z=\pm1$.

♠ Trovare il raggio di convergenza della serie $\sum z^k\sin(\pi(k+1)\sqrt{k^2+\sqrt{k}})$ e verificare se converge per $z=\pm1$.

♠ Esercizio 3 nel compito del 21/2/2015 ♠♠

105 min. Lezione del 16/12/2019

Se le ipotesi del Teorema di pag.8 non sono verificate, le conclusioni possono aver luogo oppure no. A pag.50 abbiamo dato un esempio in cui il limite degli integrali è uguale all'integrale del limite

♠ Si prenda ora la successione di funzioni data da $f_n(x)=n^{\frac{3}{2}}x$ per $0\le x\le 1/n$, $f_n(x)=-n^{\frac{3}{2}}(x-2/n)$ per $1/n\le x\le 2/n$ e $f_n(x)=0$ per $2/n\le x\le 1$. È facile vedere che $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=0$ per ogni x e la convergenza non è uniforme; fatto questo evidente da $f_k(1/k)=\sqrt{k}\to+\infty$. Quindi si ha $L(x)=0$ e $\displaystyle\int_0^1 L(x)dx=0$. Inoltre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=0$ e quindi l'integrale del limite è uguale al limite degli integrali anche se in questo caso la convergenza non è uniforme ♠♠

Se l'intervallo è infinito, $[0,+\infty)$ ad esempio, quandanche si avesse la convergenza uniforme, non è detto si avrebbe $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_k(x)dx=\int_0^{+\infty}\lim_{k\to+\infty}f_k(x)dx$.

• Sia data la successione $f_k(x) = \dfrac{k}{x^2+k^2}$. Da $f_k(x) \le 1/k^2$, la successione converge **uniformemente** in $[0,+\infty)$ alla funzione nulla ma

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{k}{x^2+k^2}dx = \frac{\pi}{2} \neq 0$$

Tale risultato non è in contraddizione con il teorema di pag.8 in quanto l'intervallo è illimitato. Se invece si prendesse $[0,A)$ si avrebbe

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{k}{x^2+k^2}dx = \lim_{k\to+\infty}\arctan\frac{A}{k} = 0 = \int_0^{+\infty}\lim_{k\to+\infty} f_k(x)dx.$$

come deve essere.

Se invece avessimo $x\in[0,a]$ allora

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{a}\frac{k}{x^2+k^2}dx = \lim_{k\to+\infty}\arctan\frac{a}{k} = 0$$

come deve essere

Viceversa la successione $f_k(x) = \dfrac{1}{k(x^2+1)}$ converge uniformemente alla funzione nulla e $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{k(x^2+1)} = \frac{\pi}{2k} \to 0$ ••

Teorema pag.9–10.

Applicazione. Si prenda la funzione $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k^2x\pi)}{k^4}$. Le condizioni del teorema sono verificate e quindi $f'(x) = \pi\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos(k^2x\pi)}{k^2}$ sebbene $f(x)$ non è esprimibile in forma chiusa tramite funzioni elementari.

La funzione $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(k^2x\pi)}{k^2}$ è definita per ogni $\mathbf{R}$ e definisce una funzione continua grazie alla stima $\dfrac{|\sin(\pi k^2x)|}{k^2} \le \dfrac{1}{k^2}$ che garantisce l'uniforme convergenza. Inoltre si sa essere derivabile nei punti della forma $\dfrac{2p+1}{2q+1}$ (https://sites.math.washington.edu/ morrow/335_09/gerver.pdf; **da non leggere in vista dell'esame**) e non derivabile altrove ed è chiaro che non possiamo scrivere $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\pi\cos(k^2x\pi)$ dal momento che la serie diverge.

♠ La successione $f_k(x) = x\ln(x^2+k^2)$ diverge per ogni valore di $x\neq 0$ ma la successione delle derivate $f'_k(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+k^2}$ converge a zero. Il teorema non è applicabile in quanto la convergenza $f'_k(x)\to 0$ non è uniforme ($f'_k(k) = 1 \not\to 0$). La condizione $f_k(x_0)\to l$ è soddisfatta da $x_0 = 0$ e $l = 0$. ♠♠

Come al solito, se le ipotesi del teorema non sono soddisfatte, la conclusione del teorema può avverarsi oppure no. Prendiamo ad esempio $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-x^2k} = \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}$. La condizione di convergenza è $e^{-x^2}<1$ ossia $x>0$. La convergenza non è uniforme. Se lo fosse allora

$$\forall\,\varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon\colon \sup_{x\in(0,+\infty)}\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-x^2k}<\varepsilon \implies \frac{e^{-x^2n}}{e^{x^2}-1}<\varepsilon$$

ma per $x_n=1/\sqrt{n}$ otteniamo $\dfrac{1}{e}\dfrac{1}{e^{1/n}-1}\to+\infty$ per $n\to+\infty$. La convergenza non è uniforme e quindi non può esserlo neppure quella di $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}-2xke^{-x^2k}$. Il Teorema di pag.9,10 dunque non si applica. In ogni caso alla fine faccio vedere che la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}-2xke^{-x^2k}$ non è uniformemente convergente. Cionostante

$$f'(x)=\frac{-2xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}=\sum_{k=0}^{+\infty}-2xke^{-x^2k}.$$

La derivata del limite è il limite delle derivate. Dobbiamo mostrare che $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}-2xke^{-x^2k}=\dfrac{-2xe^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}$. A parte $-2x$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-x^2k}=e^{x^2}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)e^{-x^2(k+1)}-\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-x^2k}=e^{x^2}\sum_{k=1}^{+\infty}ke^{-x^2k}-\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-x^2k}$$

e quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-x^2k}(1-e^{x^2})=\sum_{k=0}^{+\infty}e^{-x^2k}=\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}-1}\implies\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-x^2k}=\frac{-e^{x^2}}{(e^{x^2}-1)^2}$$

In questo caso dunque le ipotesi del teorema non sono valide ma la tesi si. Nel prossimo esempio non sono valide né le ipotesi né le tesi.

• Sappiamo che la funzione $f_n(x)=n^2x$ per $0\le x\le 1/n$, $f_n(x)=-n^2(x-2/n)$ per $1/n\le x\le 2/n$ e $f_n(x)=0$ per $2/n\le x\le 1$ non è uniformemente convergente in $[0,1]$;. Prendiamo $\{F_k(x)\}$ con $F_k(x)=\displaystyle\int_0^1 f_k(x)dx$, $F_k(x)=k^2x/2$ per $0\le x\le 1/k$, $F_k(x)=1-\dfrac{k^2}{2}(x-\dfrac{2}{k})$ per $1/k\le x\le 2/k$, $F_k(x)=1$ per $x\ge 2/k$. $\lim\limits_{k\to+\infty}F_k(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$ per cui la convergenza non può essere uniforme né può esserlo quella di $F_k'(x)=f_k(x)$ come già sapevamo. Ora

$$\lim_{k\to+\infty}F_k'(x)=\lim_{k\to+\infty}f_k(x)=0$$

ma $\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{k\to+\infty}F_k(x)=0$ solo per $x>0$ e non per $x=0$.

• La serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}-2xke^{-x^2k}$ non converge uniformemente. Bisogna far vedere che

$$\forall\,\varepsilon\ \exists\, n_\varepsilon\colon\ n>n_\varepsilon \implies \sup_{x>0}|h(x)-h_n(x)|<\varepsilon$$

$$
\begin{aligned}
&h(x)-h_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} k e^{-x^2 k} \doteq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k a^k = \\
&=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(k+1)\frac{a^{k+1}}{a}-\sum_{k=n+1}^{+\infty} a^k=\sum_{p=n+2}^{+\infty} p\frac{a^p}{a}-\frac{a^{n+1}}{1-a}=\sum_{p=n+1}^{+\infty} p\frac{a^p}{a}-(n+1)a^n-\frac{a^{n+1}}{1-a}
\end{aligned}
$$

da cui

$$
\sum_{p=n+1}^{+\infty} p a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{(n+1)a^{n+1}}{1-a}+\frac{a^{n+2}}{(1-a)^2}
$$

e se $n=0$ si ha (il punto controverso a lezione)

$$
\sum_{p=1}^{+\infty} p a^p\left(1-\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{(1-a)^2}=\frac{a}{(1-a)^2}\Big|_{a=e^{-x^2}}=\frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2}, \qquad x\neq 0
$$

In ogni caso

$$
|h(x)-h_n(x)|=\Big|\frac{(n+1)e^{-x^2(n+1)}}{1-e^{-x^2}}+\frac{e^{x^2(n+2)}}{(1-e^{-x^2})^2}\Big|
$$

Prendiamo $x_n=1/n\to 0$ e teniamo presente che $x^2/(1-e^{-x^2})\to 1$.

$$
|h(x)-h_n(x)|=\Big|\frac{n+1}{x_n^2}\frac{x_n^2}{1-e^{-x_n^2}}e^{-x_n^2(n+1)}+\frac{1}{x_n^4}\frac{x_n^4}{(1-e^{-x_n^2})^2}e^{-x_n^2(n+2)}\Big|\to+\infty
$$

Pag.25 paragrafo 7, pag.26. (serie trigonometriche/di Fourier).

105 min. Lezione del 17/12/2019

Tutto il paragrafo sulle serie di Fourier/trigonometriche

Se una funzione $f(x)$ ha periodo T allora la funzione $g(x)\doteq f(x\frac{T}{2\pi})$ ha periodo 2π

$$
g(x+2\pi)=f(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi))=f(\frac{T}{2\pi}x+T)=f(\frac{T}{2\pi}x)
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
&g(x)=f(x\frac{T}{2\pi})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx+ \\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(kx)dx\right)\cos(kx)+\left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin(kx)dx\right)\sin(kx)\right)= \\
&\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x\frac{T}{2\pi})dx+ \\
&+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x\frac{T}{2\pi})\cos(kx)dx\right)\cos(kx)+\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x\frac{T}{2\pi})\sin(kx)dx\right)\sin(kx)\right)= \\
&\underbrace{=}_{2\pi y/T=x}\frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)dy+ \\
&+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{T}\left(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\cos\frac{2\pi ky}{T}dy\right)\cos(ky)+\frac{2}{T}\left(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\sin\frac{2\pi ky}{T}dy\right)\sin(ky)
\end{aligned}
$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)dy +$$
$$+\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{T}\left(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\cos\frac{2\pi ky}{T}dy\right)\cos\frac{2\pi kx}{T} + \frac{2}{T}\left(\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)\sin\frac{2\pi ky}{T}dy\right)\sin\frac{2\pi kx}{T}$$

90 min. Lezione del 19/12/2019 ultimo giorno di lezione.

Esercizi.