

CAN1: Metodi Numerici per l'approssimazione 2 Wavelets

note redatte da studenti basati sulle lezioni tenute da
Carla Manni
Università di Roma "Tor Vergata"
Dipartimento di Matematica
Via della Ricerca Scientifica
00133 Roma, ITALY
manni@mat.uniroma2.it

Indice

Capitolo 1	Introduzione alle wavelets	1
1.1	Richiami	1
1.2	Notizie storiche	5
1.3	Wavelet di Haar	6
Capitolo 2	Analisi Tempo-Frequenza	9
2.1	Richiami sulla Trasformata di Fourier	9
2.2	Tecniche di localizzazione (windowing)	12
2.3	Trasformata di Gabor	14
2.4	Trasformata Wavelet	15
Capitolo 3	Analisi di multirisoluzione (MRA)	21
3.1	Decomposizione e Ricostruzione	25
3.2	Descrizione degli algoritmi di decomposizione e ricostruzione	32
3.3	Caratterizzazione delle trasformate di ϕ e di ψ	34
3.4	Caratterizzazione di ϕ che genera una MRA	42
3.5	Mancanza di ortogonalità	48
3.6	Studio del supporto	49
3.7	Regolarità	49
Capitolo 4	Costruzione di ϕ, ψ Daubechies	51
4.1	Costruzione trasformata di ϕ come prodotto infinito	51
4.2	Costruzione sequenza $\{p_n\}$	54
4.3	Approssimazione dei valori di ϕ	59
	Bibliografia	63

Capitolo 1

Introduzione alle wavelets

In molti contesti dell'ingegneria e delle scienze applicate si ha a che fare con il seguente problema:

Data una funzione $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ (un segnale che descriva un fenomeno della vita reale, quindi realisticamente ha energia finita, $f \in L^2(\mathbb{R})$) si deve trasmettere e memorizzare tale funzione mediante un apparato finito.

Essendo f descritta di suoi valori su $\mathbb{R}$ è chiaro che lavorando con un dispositivo finito si potrà soltanto avere a che fare con una sua approssimazione. In ogni caso sarebbe auspicabile avere una rappresentazione di f del tipo

$$f(t) = \sum_n c_n g_n(t)$$

dove basterebbe memorizzare i soli coefficienti c_n .

La teoria delle Wavelets nasce dall'esigenza di decomporre i segnali in modo da localizzare l'informazione contenuta nel segnale stesso sia rispetto alla frequenza che al tempo (o allo spazio).

In un qualche senso, dato un segnale $f(x)$, si vorrebbe una rappresentazione di esso analoga alla notazione musicale in cui si indica quale nota (frequenza) deve essere suonata in un certo istante.

1.1 Richiami

Definizione 1.1 (Spazi L^p)

$$L^p_{[a,b]} = \left\{ f \text{ leb-integrabili t.c. } \int_b^a |f(x)|^p dx < +\infty \right\} \text{ t.c. } 1 \leq p < +\infty$$

Siamo particolarmente interessati a

$$p = 1, 2, \infty, \quad [a, b] = [0, 2\pi]$$

In particolare noi useremo $p = 2$ poichè in questo caso lo spazio $L^2_{[a,b]}$, oltre ad essere uno spazio di Banach, è anche uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare

$$\langle f, g \rangle = \int_b^a f(x) \overline{g(x)} dx \text{ t.c. } f, g \in L^2_{[a,b]}$$

Definizione 1.2 (Spazio l^2)

$$l^2 = \left\{ \{a_k\}, k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 < +\infty \right\}$$

Questo spazio è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$\langle a_k, b_k \rangle := \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \overline{b_k}$$

In particolare se ci mettiamo in $[0, 2\pi]$ ogni $f(x) \in L^2_{[0, 2\pi]}$ può essere scritta nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

dove:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

Questa è la rappresentazione trigonometrica dello spazio $L^2[0, 2\pi]$.

Tuttavia tale rappresentazione ci dà solo una risposta parziale al problema posto in quanto presenta aspetti positivi ma anche negativi.

Aspetti positivi:

- 1) Si ha una rappresentazione discreta delle $f(x)$ a cui si giunge con calcoli espliciti per la determinazione dei coefficienti c_k .
- 2) La rappresentazione di f è basata su una sola funzione, e^{ix} , su cui si operano successive dilatazioni.
- 3) Il sistema generato

$$\{e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$$

è ortonormale e quindi c_n hanno una rappresentazione semplice.

- 4) c_n rappresenta la media del segnale pesato con e^{inx} sul nostro intervallo, abbiamo quindi anche una interpretazione geometrica dei coefficienti.

Aspetti negativi:

- 1) Per costruire c_n ho bisogno delle informazioni su tutto il supporto.

- 2) tramite i coefficiente, non si riesce a cogliere informazioni “locali” mentre farebbe piacere una rappresentazione localizzata del segnale sia rispetto alla frequenza che al tempo.

Questa rappresentazione va bene per funzioni periodiche, ma potrebbe creare dei problemi se si ha a che fare con funzioni che non lo sono. L'idea è quindi cercare di rappresentare qualsiasi funzione in $L^2(\mathbb{R})$ utilizzando rappresentazioni diverse che abbiano le proprietà positive del sistema trigonometrico ma che forniscano allo stesso tempo una rappresentazione localizzata non solo rispetto alla frequenza ma anche al tempo/spazio.

Vogliamo quindi una rappresentazione del tipo:

$$f(x) = \sum_k c_k g_k(x)$$

dove il sistema delle $\{g_n\}$ sia ortormale in modo da ottenere facilmente l'espressione dei coefficienti

$$c_n := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g_n(x)} dx = \langle f, g_n \rangle.$$

Inoltre sarà richiesto che le g_n siano a supporto compatto, o al peggio con un forte decadimento, al fine di rendere possibile una rappresentazione locale.

Un'idea potrebbe essere quella di utilizzare, come funzioni g_n , le funzioni $\sin(\cdot)$ e $\cos(\cdot)$ troncadole ma questo approccio comporterebbe la perdita della localizzazione in frequenza.

Considereremo famiglie di funzioni definite a partire da una nuova funzione ψ :

$$\psi(x) \rightarrow \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

dove j permette di dilatare e k di traslare.

Ci resta solamente da introdurre un fattore di normalizzazione in modo che $\psi_{j,k}(x)$ abbia norma 1. Assumendo che $\|\psi\| = 1$, abbiamo

$$\begin{aligned} \|\psi(2^j x - k)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \psi(2^j x - k) \overline{\psi(2^j x - k)} dx = \\ &= 2^{-j} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi(x)} dx = 2^{-j} \|\psi(x)\|_2^2 = 2^{-j} \end{aligned}$$

vorremo allora

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

ψ prende il nome di *funzione madre*.

Definizione 1.3 (Wavelet) *Una wavelet è una funzione ψ t.c. con le sue traslate e dilatate*

$$\psi_{jk} := 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

fornisce una base di $L^2(\mathbb{R})$. Se tale base è ortonormale si parla di wavelet ortonormale

ossia

Definizione 1.4 (Wavelets Ortonormali) ψ è una wavelet ortonormale se

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$$

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

dove:

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$$

e

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{l,n} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,n}$$

con:

$$c_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx$$

1.2 Notizie storiche

- 1946 : GABOR : propone una localizzazione della trasformata di Fourier
- 1984 : GROSMANN (fisico teorico) - MORLET (geologo che lavora per una compagnia petrolifera francese) escogitano un metodo per l'analisi dei segnali sismici localizzati nel tempo basato su un'analogia con l'analisi di Gabor. L'analisi proposta si basa su traslate e dilatate di una stessa funzione ψ che gli autori chiamano *ondelette* (wavelet). La trasformazione è utilizzata nel continuo. $\psi(t) \Rightarrow \psi(\frac{t-b}{a})$
- 1985 : MEYER : scopre che considerando solo valori discreti opportuni per le traslazioni e le dilatazioni in questione si può in taluni casi ottenere una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$. La costruzione di ψ è estremamente difficile. $\psi(t) \Rightarrow \psi(2^j t - k)$
- 1987 : MEYER - MALLAT : inquadrano il problema della costruzione di ψ nell'ambito di un'interessante struttura matematica: l'analisi di multirisoluzione. Mettono in evidenza la stretta connessione con le tecniche usate nell'elaborazione dei segnali. Mallat, inoltre, mette a punto un algoritmo veloce per il calcolo dei coefficienti in base alla decomposizione da lui proposta.
- 1988 : I. DAUBECHIES : costruisce una famiglia di *wavelet ortonormali* a supporto compatto derivabili fino ad un prefissato ordine.
- 1990 : costruzione di wavelet basata su funzioni splines.

1.3 Wavelet di Haar

Forniamo un esempio di wavelet ortonormale. Definiamo

$$\phi_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\psi_H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Mostreremo che ψ_H è una wavelet ortonormale. A tale fine consideriamo i seguenti risultati.

Osservazione 1 *Le costanti a tratti sono dense in $L^2(\mathbb{R})$.*

Osservazione 2

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_H(x) dx = 0.$$

Applichiamo le operazioni di traslazione e dilatazione:

$$\psi_{H,jk}(x) := 2^{j/2} \psi_H(2^j x - k) \text{ supporto in } [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$$

$$\phi_{H,jk}(x) := 2^{j/2} \phi_H(2^j x - k) \text{ supporto in } [\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$$

Osservazione 3

$$\langle \psi_{H,jk}, \psi_{H,lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$$

Infatti $\psi_{H,jk}$ ha supporto in $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$ e $\psi_{H,lm}$ ha supporto in $[\frac{m}{2^l}, \frac{m+1}{2^l})$. Se i supporti sono disgiunti il prodotto è nullo.

Se i supporti non sono disgiunti ma $j \neq l$ il più piccolo dei due deve essere necessariamente incluso in una delle due metà in cui è diviso il più grande (ove la corrispondente funzione è costante) per cui, ricordando l'Osservazione 2 il prodotto è diverso da zero solo se $k = m$ e $j = l$.

Per dimostrare che ψ_H è una wavelet ortonormale consideriamo le due seguenti famiglie di spazi:

$$S_n = \text{span} \{ \psi_{H,jk}, j < n, k \in \mathbb{Z} \}$$

$$V_n = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.c. } f \text{ costante in } \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right) k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Allora

- $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots$
- $f \in V_n \Leftrightarrow f(2\cdot) \in V_{n+1}$
- $f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0$

Lo stesso vale anche per S_n .

Volendo mostrare che l'insieme

$$\{\psi_{H,jk}, \quad j, k \in \mathbb{Z}\}$$

è denso in $L^2(\mathbb{R})$ è sufficiente dimostrare che S_n coincide con V_n perchè l'insieme

$$\cup_{n \in \mathbb{Z}} V_n$$

è costituito da funzioni costanti a tratti su tratti diadici ed è quindi denso in $L^2(\mathbb{R})$. In particolare basterà dimostrarlo per $n = 0$ perchè il passaggio al caso generico è immediato. Mostriamo quindi il seguente

Teorema 1.1

$$S_0 = V_0$$

Dimostrazione L'inclusione $S_0 \subseteq V_0$ è ovvia. Per l'inclusione opposta notiamo che

$$V_0 \ni f(x) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r \chi_{[r, r+1)}(x)$$

quindi mi basta vedere che $\phi_H(x) \in S_0$. Risulta

$$\sum_{j < 0} 2^{j/2} \psi_{H,j0}(x) = \sum_{j < 0} 2^j \psi_H(2^j x) = \phi_H(x)$$

■

Abbiamo così dimostrato che le ψ_{jk} formano un sistema ortonormale che genera $L^2(\mathbb{R})$.

Le funzioni $\psi_{H,jk}$ sono a supporto compatto come volevamo ma la loro discontinuità non permette di approssimare “bene” e “velocemente” segnali regolari, quindi quello che vorremmo è trovare funzioni più regolari che abbiano le proprietà positive della ψ_H .

Capitolo 2

Analisi Tempo-Frequenza

2.1 Richiami sulla Trasformata di Fourier

Consideriamo lo spazio $L^2(\mathbb{R})$. Definiamo:

Definizione 2.1 (Trasformata di Fourier)

$$f \rightarrow \widehat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

Affinchè tale operazione abbia senso dobbiamo avere:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-i\omega x}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < +\infty$$

cioè $f \in L^1(\mathbb{R})$. Per poter definire la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$ si opera come segue

1. si definisce la trasformata in $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$
2. si estende la definizione precedente a tutto lo spazio $L^2(\mathbb{R})$ poichè $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$.

Ricordiamo alcune proprietà salienti della trasformata di Fourier.

Teorema 2.1 (Identità di Parseval)

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{f}\|_2^2$$

Teorema 2.2 (di inversione)

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}) \exists! f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ t.c. } g = \widehat{f}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

Teorema 2.3 *Se $f \in L^1(\mathbb{R})$ allora $\widehat{f}$ è limitata e continua ($\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$ allora f è limitata e continua)*

Dimostrazione. risulta

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1 < +\infty$$

quindi $\widehat{f}$ è limitata. Inoltre essa risulta continua perché $e^{-i\omega x}$ è uniformemente continua. $\square$

Integrando per parti si ha immediatamente il seguente

Teorema 2.4

$$\widehat{f^{(p)}}(\omega) = (i\omega)^p \widehat{f}(\omega)$$

Osservazione 4 *Se*

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\omega)| (1 + |\omega|)^p d\omega < +\infty \quad (2.1)$$

allora $(i\omega)^p \widehat{f}(\omega)$ è $L^1(\mathbb{R})$ e quindi per il teorema precedente $f^{(p)}$ è limitata e continua $\Rightarrow f \in C^p$.

In particolare (2.1) è verificata se esiste una costante C ed un valore $\epsilon > 0$ per cui

$$|\widehat{f}(\omega)| \leq \frac{C}{(1 + |\omega|)^{1+p+\epsilon}}. \quad (2.2)$$

Abbiamo così osservato che il decadimento della trasformata è collegato alla regolarità di f . In particolare, poichè una funzione a supporto compatto verifica la (2.2) per ogni $p > 0$, risulta

Osservazione 5

$$\widehat{f} \text{ a supporto compatto} \Rightarrow f \in C^\infty (f \text{ a supporto compatto} \Rightarrow \widehat{f} \in C^\infty)$$

Vale inoltre il seguente

Teorema 2.5 *Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ non nulla a supporto compatto, allora $\widehat{f}$ non può essere nulla su un intervallo e viceversa.*

La funzione f e la sua trasformata hanno un comportamento “complementare” rispetto alla località. Per rendere più precisa tale affermazione introduciamo le seguenti definizioni assumendo implicitamente che le funzioni siano tali da assicurare l'esistenza delle quantità considerate.

Definizione 2.2 sia $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$t_f^* := \int_{\mathbb{R}} \frac{t|f(t)|^2}{\|f(t)\|^2} dt$$

$$\Delta_f^2 := \int_{\mathbb{R}} \frac{(t - t_f^*)^2 |f(t)|^2}{\|f(t)\|^2} dt$$

Osservazione 6 t_f^* rappresenta la media di f , Δ_f^2 ne rappresenta invece la varianza. Quindi avremo “maggior concentrazione” di f nella regione

$$[t_f^* - \Delta_f, t_f^* + \Delta_f]$$

Analogamente possiamo definire (ed interpretare) le stesse quantità per la trasformata di f .

Definizione 2.3

$$\omega_{\widehat{f}}^* := \int_{\mathbb{R}} \frac{t|\widehat{f}(t)|^2}{\|\widehat{f}(t)\|^2} dt$$

$$\Delta_{\widehat{f}}^2 := \int_{\mathbb{R}} \frac{(t - \omega_{\widehat{f}}^*)^2 |\widehat{f}(t)|^2}{\|\widehat{f}(t)\|^2} dt$$

Teorema 2.6 (di indeterminazione)

$$\Delta_f^2 \Delta_{\widehat{f}}^2 \geq \frac{1}{4}. \quad \blacksquare$$

Non possiamo dunque sperare di trovare una funzione che sia arbitrariamente localizzata la cui trasformata sia arbitrariamente localizzata. Ovvero non possiamo ottenere una localizzazione arbitrariamente accurata sia nel tempo che nelle frequenze.

La disuguaglianza fornita nel teorema di indeterminazione è accurata in quanto diventa una uguaglianza se f è una gaussiana, si può infatti dimostrare (esercizio) che se $f(t) = e^{-t^2}$ allora $\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$.

2.2 Tecniche di localizzazione (windowing)

La trasformata di Fourier è uno strumento fondamentale ma risulta inadeguata in diverse applicazioni perchè:

- il valore $\hat{f}(\omega)$ dipende dai valori del segnale su tutto il suo dominio;
- la trasformata non fornisce informazioni sull'evolvere della frequenza rispetto al tempo;
- la trasformata non permette di evidenziare un dettaglio localizzato ad un certo istante;
- essendo la frequenza inversamente proporzionale al periodo, è ragionevole pensare di ottenere una buona accuratezza considerando, per alte frequenze, un breve intervallo di tempo e viceversa; ossia sarebbe importante avere uno strumento che automaticamente fornisce (nel piano tempo/frequenza) finestre di osservazione " strette" nel tempo per alte frequenze e "larghe" nel tempo per basse frequenze.

Nell'ambito dell'analisi dei segnali sono state introdotte varie strategie per cercare di "migliorare" la trasformata di Fourier nell'ottica delle osservazioni precedenti.

Definizione 2.4 *dicesi filtraggio analogico di un segnale f con un filtro h la convoluzione di un segnale con il filtro ossia*

$$g(t) := (f * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h(t-x)dx$$

Dalle proprietà della trasformata di Fourier segue immediatamente che

$$\hat{g} = \hat{f}\hat{h}.$$

Definizione 2.5 *Un segnale g si dice a banda limitata se $\hat{g}(\omega) = 0$, $|\omega| > \omega_0$. Il valore ω_0 si dice ampiezza di banda.*

Per ottenere un segnale con ampiezza di banda ω_0 a partire da un dato segnale f è quindi sufficiente filtrarlo con un filtro h_{ω_0} t.c.

$$\hat{h}_{\omega_0}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in [-\omega_0, \omega_0] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ossia si tratta di usare il filtro (detto SHANNON sampling function)

$$h_{\omega_0}(t) = \frac{\text{sen}(\omega_0 t)}{\pi t}.$$

Questo filtraggio quindi NON fornisce una buona localizzazione nel tempo.

I segnali a banda limitata risultano di rilevanza per il famoso Teorema di Shannon:

Teorema 2.7 Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ un segnale a banda limitata con ampiezza di banda Ω . Allora

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(\Omega x - k\pi)}{\Omega x - k\pi} \quad \blacksquare$$

Definizione 2.6 Si dice *WINDOWING* del segnale f tramite h in b il valore

$$\langle f, h(\cdot - b) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{h(x - b)} dx.$$

Si può osservare che, assumendo h reale, e ponendo $\tilde{h}(t) = h(-t)$

$$(f * \tilde{h})(b) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \tilde{h}(b - x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) h(x - b) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{h(x - b)} dx$$

quindi

$$\langle f, h(\cdot - b) \rangle = (f * \tilde{h})(b)$$

in particolare se h è pari e reale la tecnica di windowing è esattamente il filtraggio.

Poichè $\widehat{h(\cdot - b)}(\omega) = e^{-i\omega b} \hat{h}(\omega)$, risulta che se ω^* e $\Delta_{\hat{h}}^2$ sono valor medio e varianza di $\hat{h}$, considerando $\widehat{h(\cdot - b)}$ essi non variano (il fattore $e^{-i\omega b}$ non ha effetto). Dall'identità di Parseval

$$\langle f, h(\cdot - b) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \widehat{h(\cdot - b)} \rangle$$

quindi operando un windowing si “osserva” il segnale in frequenza con una finestra la cui localizzazione ed ampiezza rimane invariata al variare di b . Per ottenere “finestre di osservazione” che “tassellano” tutto il piano tempo/frequenza occorre quindi seguire una diversa strategia.

2.3 Trasformata di Gabor

Per localizzare la trasformata di Fourier nel 1946 Gabor propose di utilizzare la seguente trasformazione che prende appunto il nome di *trasformata di Gabor*

$$(G_{b,\alpha}f)(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} g_{\alpha}(x-b) dx$$

dove

$$g_{\alpha}(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}$$

Osservazione 7 Fissato ω , variando $b \in \mathbb{R}$ si riottiene $\hat{f}(\omega)$ infatti è immediato verificare che

$$\int_{\mathbb{R}} (G_{b,\alpha}f)(\omega) db = \hat{f}(\omega)$$

quindi si può ricostruire tutto il segnale f dai valori della trasformata di Gabor per $\omega, b \in \mathbb{R}$

Posto

$$\mathcal{G}_{\alpha,b,\omega}(x) := e^{i\omega x} g_{\alpha}(x-b)$$

risulta

$$t_{\mathcal{G}_{\alpha,b,\omega}}^* = b$$

$$\Delta_{\mathcal{G}_{\alpha,b,\omega}}^2 = \alpha$$

Quindi l'intervallo di in cui $\mathcal{G}_{\alpha,b,\omega}$ è maggiormente localizzata risulta

$$[b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha}]$$

ossia, essendo,

$$(G_{b,\alpha}f)(\omega) = \langle f, \mathcal{G}_{\alpha,b,\omega} \rangle$$

la trasformata di Gabor localizza il segnale f essenzialmente in $[b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha}]$. Per quanto riguarda le frequenze, dall'identità di Parseval risulta:

$$(G_{b,\alpha}f)(\omega) = \langle f, \mathcal{G}_{\alpha,b,\omega} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\mathcal{G}}_{\alpha,b,\omega} \rangle$$

inoltre con qualche calcolo abbiamo

$$\hat{\mathcal{G}}_{\alpha,b,\omega}(\eta) = e^{-\alpha(\omega-\eta)^2} e^{-ib(\eta-\omega)}$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\mathcal{G}}_{\alpha,b,\omega} \rangle = \frac{e^{-ib\omega}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} [\hat{f} e^{i\omega b}] g_{\frac{1}{4\alpha}}(\eta - \omega) 2\sqrt{\frac{\pi}{4\alpha}} d\eta$$

$$= \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} (G_{\frac{1}{4\alpha}, \omega} \hat{f})(-b)$$

Abbiamo quindi che

$$(G_{b,\alpha} f)(\omega) = \frac{e^{-ib\omega}}{2\sqrt{\pi\alpha}} (G_{\frac{1}{4\alpha}, \omega} \hat{f})(-b)$$

ossia la trasformata di Gabor localizza $\hat{f}$ essenzialmente nell'intervallo

$$[\omega - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}].$$

Quindi, nel piano (*tempo, frequenza*) avremo una “finestra” di localizzazione data dal rettangolo

$$[b - \sqrt{\alpha}, b + \sqrt{\alpha}] \times [\omega - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}, \omega + \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}]$$

la cui area è uguale a

$$2\sqrt{\alpha} \frac{2}{2\sqrt{\alpha}} = 2,$$

che, in base al teorema di indeterminazione, è proprio l'area minima che possiamo ottenere per una “finestra” di questo tipo.

Tuttavia modificando b e ω , fissato α , il rettangolo viene solo traslato, non vengono modificate le sue dimensioni.

Al contrario sarebbe auspicabile che la “finestra di osservazione” avesse una “piccola base nel tempo” per alte frequenze e una “grande base nel tempo” per basse frequenze in quanto periodo e frequenza sono reciproci. Ne segue che la trasformata di Gabor, pur fornendo una localizzazione del segnale sia nel tempo che nella frequenza, non fornisce uno strumento di osservazione che possa cambiare in modo automatico adattandosi opportunamente alle zone di frequenza diversa. Questo sarà ottenuto tramite la trasformata wavelet.

2.4 Trasformata Wavelet

Correva l'anno 1984. Grossmann e Morlet propongono una trasformata basata su dilatazioni e traslazioni di una opportuna funzione ψ nel continuo.

Definizione 2.7 (Wavelet ammissibile) Data $\psi \in L^2(\mathbb{R})$, ψ si dice wavelet ammissibile se

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (2.3)$$

Definizione 2.8 (trasformata Wavelet)

$$(W_\psi f)(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

si dice *trasformata wavelet relativa a ψ sui punti a, b*

Vediamo cosa implica la condizione di ammissibilità e successivamente perchè l'abbiamo imposta.

Osservazione 8 Supponiamo $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \widehat{\psi}$ limitata e continua. Inoltre essendo ψ ammissibile, dalla (2.3) segue necessariamente che deve risultare $\widehat{\psi}(0) = 0$ ossia

$$0 = \widehat{\psi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

ne segue che $\psi(x)$ deve **NECESSARIAMENTE OSCILLARE**. Ciò giustifica il nome di **wavelet**

Ora vediamo perchè la trasformata wavelet fa quello che ci interessa dal punto di vista delle finestre (rettangoli) di osservazione. Con facili passaggi risulta

$$\psi \rightarrow \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)$$

$$t_\psi^* \rightarrow at^* + b$$

$$\Delta_\psi^2 \rightarrow a^2 \Delta_\psi^2$$

Quindi la trasformata wavelet corrisponde ad un'osservazione di f localizzata nell'intervallo

$$[at^* + b - |a|\Delta_\psi, at^* + b + |a|\Delta_\psi].$$

Per quanto riguarda le frequenze, notiamo anzitutto che

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \rangle$$

quindi, dall'identità di Parseval, abbiamo

$$(W_\psi f)(a, b) = \langle f, \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \frac{1}{\sqrt{|a|}} \widehat{\psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)} \rangle$$

Dato che:

$$\widehat{\psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x - b}{a}\right) e^{-i\omega x} dx =$$

$$|a| \int_{\mathbb{R}} \psi(z) e^{-i\omega(az+b)} dz = |a| e^{-i\omega b} \widehat{\psi}(a\omega),$$

ossia

$$(W_\psi f)(a, b) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{|a|} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\widehat{\psi}(\omega a)} d\omega$$

Inoltre, notando che

$$\widehat{\psi} \longrightarrow e^{i\omega b} \widehat{\psi}(a\cdot)$$

$$\omega_\psi^* \longrightarrow \frac{\omega_\psi^*}{a}$$

$$\Delta_\psi^2 \longrightarrow \frac{\Delta_\psi^2}{a^2}$$

Quindi la trasformata wavelet può essere vista come l'osservazione di $\widehat{f}$ nell'intervallo:

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_\psi}{|a|}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_\psi}{|a|} \right].$$

Quindi, nel piano tempo frequenza il segnale è osservato tramite la finestra

$$[at^* + b - |a|\Delta_\psi, at^* + b + |a|\Delta_\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{\Delta_\psi}{|a|}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{\Delta_\psi}{|a|} \right]$$

la cui area risulta $4\Delta_\psi \Delta_{\widehat{\psi}}$.

Ne segue che le finestre di osservazione hanno area che varia in funzione di ψ senza dipendere da a . Inoltre si osserva che, per $|a|$ piccolo l'intervallo in frequenza si allarga e si posiziona su alte frequenze mentre, rispettivamente, si restringe l'intervallo nello spazio/tempo. Ossia l'ampiezza e la posizione di tali intervalli resta determinata da $|a|$, che è esattamente ciò che volevamo.

Conoscendo la trasformata wavelet per $a, b \in \mathbb{R}$ si può ricostruire il segnale, infatti vale il seguente

Teorema 2.8 (Formula di inversione) *Sia ψ wavelet ammissibile, f e $g \in L^2(\mathbb{R})$. Allora*

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(a, b) \overline{(W_\psi g)(a, b)} \frac{da}{a^2} db = C_\psi \langle f, g \rangle$$

e quindi

$$f(x) = \frac{1}{C_\psi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_\psi f)(a, b) \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \frac{da}{a^2 \sqrt{|a|}} db$$

Dimostrazione. Per l'identità di Parseval risulta

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \overline{(W_{\psi} g)(a, b)} db = \\ & \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx \int_{\mathbb{R}} \overline{g(y)} \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{y-b}{a}\right) dy = \\ & = |a| \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} db \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega b} \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} d\omega \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{g}(\eta)} e^{-i\eta b} \widehat{\psi}(\eta a) d\eta \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} F(x) &= \widehat{f}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \\ G(x) &= \widehat{g}(x) \overline{\widehat{\psi}(ax)} \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \overline{(W_{\psi} g)(a, b)} db = |a| \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} \overline{\widehat{F}(b)} \widehat{G}(b) db = \\ & |a| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \overline{G(b)} F(b) db = \frac{|a|^2}{|a|} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx \end{aligned}$$

integrando per $\frac{da}{a^2}$ abbiamo

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \overline{(W_{\psi} g)(a, b)} \frac{da}{a^2} db = \int_{\mathbb{R}} \frac{|a|^2}{|a|} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{\widehat{g}(x)} |\widehat{\psi}(ax)|^2 dx \frac{da}{a^2}$$

ponendo $ax = z$ si ottiene

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \overline{(W_{\psi} g)(a, b)} \frac{da}{a^2} db = C_{\psi} \langle f, g \rangle$$

Inoltre se f è continua in x abbiamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} f(t) \frac{e^{\frac{(t-x)^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\alpha\pi}} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \langle f, g_{\alpha}(\cdot - x) \rangle = \\ & \frac{1}{C_{\psi}} \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \frac{da}{a^2} \overline{\langle g_{\alpha}(\cdot - x), \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \rangle} db = \\ & = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{da}{a^2} db \end{aligned}$$

da cui la formula di inversione

$$f(x) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_{\psi} f)(a, b) \psi\left(\frac{\cdot - b}{a}\right) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \frac{da}{a^2} db.$$

□

Esempio 2.1 Calcolare $\widehat{\psi_H}$ e valutare se per ψ_H vale la condizione di ammissibilità. Risulta

$$|\widehat{\psi_H}(\omega)| = \frac{2}{|\omega|} (1 - \cos(\frac{\omega}{2}))$$

quindi ψ_H è una wavelet ammissibile.

specialmente nelle applicazioni è evidente che la conoscenza di $(W_\psi f)(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$ non è proponibile. Sarebbe auspicabile poter lavorare su un insieme discreto di valori a, b per poter avere una rappresentazione del segnale f in SERIE di wavelets. In particolare, soprattutto per questioni pratiche sarebbe opportuno poter lavorare con traslazioni intere e dilatazioni che siano potenze di 2.

Osservazione 9 Ponendo

$$a = \frac{1}{2^j}, \quad b = \frac{k}{2^j}$$

risulta

$$\frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k) = \psi_{jk}(x)$$

quindi abbiamo

$$\langle f, \psi_{jk} \rangle = (W_\psi f)(a, b), \quad a = \frac{1}{2^j}, \quad b = \frac{k}{2^j}.$$

È quindi naturale porsi le seguenti domande

- possibile caratterizzare completamente f tramite $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$?
- possiamo ricostruire STABILMENTE (in senso numerico) f dai vari $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$?
- ogni funzione di $L^2(\mathbb{R})$ può essere scritta come somma (con opportuni coefficienti) di $\psi_{j,k}$?
- possiamo scrivere un algoritmo facile che permetta di trovare i coefficienti di questa somma?

Risposte a queste domande saranno ottenute inquadrando il nostro problema nel cosiddetto contesto dell' ANALISI di MULTIRISOLUZIONE.

Capitolo 3

Analisi di multirisoluzione (MRA)

¹ Introduciamo adesso un quadro matematico che riconduce la costruzione della wavelet ψ alla costruzione di una sequenza di spazi ordinati, [3], [4], [6]. Il termine multirisoluzione suggerisce che ci accingiamo a guardare il segnale con un'accuratezza e risoluzione via via diversa a seconda di quello che serve. La filosofia dell'analisi di multirisoluzione consiste nel rappresentare ogni elemento di $L^2(\mathbb{R})$ con approssimazioni successive costruite a partire da un primo tentativo "sfocato" aggiungendo "dettagli" fino ad ottenere il segnale stesso.

Definizione 3.1 (Analisi di Multirisoluzione (MRA)) Una sequenza di spazi $V_j \subset L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$ costituisce un'Analisi di Multi Risoluzione (MRA) di $L^2(\mathbb{R})$ se:

$$\mathbf{m1)} \quad \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \dots$$

$$\mathbf{m2)} \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$$

$$\mathbf{m3)} \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$$

$$\mathbf{m4)} \quad f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$$

$$\mathbf{m5)} \quad f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0$$

$$\mathbf{m6)} \quad \exists \phi \in V_0 \text{ t.c. } V_0 = \text{span}\{\phi(\cdot - k), \quad k \in \mathbb{Z}\} \text{ e}$$

$$\langle \phi(\cdot - k), \phi(\cdot - j) \rangle = \delta_{kj}, \quad k, j \in \mathbb{Z}$$

¹Si ringrazia A. Melone per una prima stesura di questo capitolo e dei successivi

Osservazione 10 *Le condizioni precedenti non sono indipendenti: abbiamo $\mathbf{m6} \Rightarrow \mathbf{m5}$ mentre si può mostrare, ([6], Sezione 2.1) che $\mathbf{m1}, \mathbf{m4}, \mathbf{m6} \Rightarrow \mathbf{m3}$*

La condizione $\mathbf{m6}$ afferma che le traslate di ϕ costituiscono una base ortonormale di V_0 . Come vedremo, tale condizione è molto restrittiva ed implica condizioni spesso difficili da verificare per la funzione ϕ cosicchè risulta spesso conveniente indebolirla sostituendola con la seguente

$\mathbf{m6}^*) \exists \phi \in V_0$ tale che l'insieme $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ risulta una base di Riesz (o base incondizionata) di V_0 ossia

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(x - k) \right\|_2^2 \leq B \sum_k |c_k|^2 \quad (3.1)$$

ove

$$0 < A \leq B < +\infty.$$

Le due disuguaglianze in (3.1) sono molto importanti sia dal punto di vista teorico che pratico. Esse affermano che l'applicazione

$$T : \ell_2 \rightarrow V_0, \quad T(\{c_k\}) = \sum_k c_k \phi(\cdot - k)$$

è continua con inversa continua. In pratica “piccole variazioni” sulla sequenza dei coefficienti comportano “piccole variazioni” sulla funzione descritta e viceversa. Ossia cambiando di poco c_k cambia di poco l'elemento ottenuto come combinazione di traslate di ϕ usando come coefficienti i c_k . Si ha quindi una rappresentazione ben condizionata, fondamentale da un punto di vista pratico.

Il caso ortonormale è un caso speciale della base di Riesz con $A = B = 1$.

Esempio 3.1 Un esempio di analisi di multirisoluzione di $L^2(\mathbb{R})$ è costituita dalle costanti a tratti. Consideriamo

$$\phi_H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Allora

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \text{ costanti su } \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right], k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Abbiamo:

$\mathbf{m1}$) questi spazi sono nidificati

$$\dots \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \dots$$

m2) le costanti a tratti sono dense in $L^2(\mathbb{R})$

m3) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

m4) ovvia

m5) ovvia

m6) ovvia, in quanto le funzioni costanti a tratti su con estremi interi sono generate dalle traslate della funzione caratteristica dell'intervallo $[0, 1)$. Le traslate sono ortonormali in quanto facendo il prodotto scalare i supporti sono disgiunti.

Vediamo come una MRA sia legata all'esigenza di osservare il segnale da un punto di vista sempre più dettagliato.

Osservazione 11 *In generale, se ϕ con le sue traslate genera lo spazio V_0 , da **m4)** e **m5)** si ha che le funzioni traslate e dilatate*

$$\phi_{jk}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k) \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

generano V_j .

Sia ora $f \in L^2(\mathbb{R})$, fissiamo $j \in \mathbb{Z}$, e sia f_j proiezione di f in V_j così definita:

$$f_j(x) = \sum_N f_{jn} \phi_{jn}(x), \quad f_{jn} = \langle f_j, \phi_{jn} \rangle = \langle f, \phi_{jn} \rangle.$$

Ora, essendo $V_j \subset V_{j+1}$, l'approssimazione, f_{j+1} , su V_{j+1} sarà non peggiore. Avremo dunque

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j, \quad V_j \perp W_j$$

quindi in generale

$$f_{j+1}(x) = f_j(x) + g_j(x), \quad g_j \in W_j$$

Osservazione 12 *Abbiamo, per **m3)***

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} = \dots = V_{j-l} \oplus \sum_{r=j-l}^{j-1} W_r = \bigoplus_{r=-\infty}^{j-1} W_r$$

quindi

$$L^2(\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{r \in \mathbb{Z}} W_r}$$

Inoltre $W_j \subset V_{j+1}$ e $W_{j+1} \perp V_{j+1}$ quindi

$$W_j \perp W_{j+1}.$$

Dunque $L^2(\mathbb{R})$ si può costruire in due modi: tramite gli spazi V o tramite gli spazi W . Gli spazi V sono spazi sempre “più grandi” che finiscono con l’invadere $L^2(\mathbb{R})$. La chiusura della somma diretta degli spazi W è uguale a $L^2(\mathbb{R})$.

Gli spazi W sono una decomposizione ortogonale di $L^2(\mathbb{R})$.

Esempio 3.2 Cerchiamo di capire come sono fatti gli spazi W riprendendo il solito esempio delle wavelet di Haar. Ricordiamo che tali spazi contengono l’informazione aggiuntiva che si ottiene nel passare da uno spazio V allo spazio successivo. Avremo

$$f_{j+1}(x) = \sum_n f_{j+1,n} \phi_{j+1,n}(x) \quad f_j(x) = \sum_n f_{j,n} \phi_{j,n}(x)$$

La differenza tra queste due funzioni, che sta in V_{j+1} , si potrà scrivere come

$$f_{j+1}(x) - f_j(x) = \sum_n g_{j,n} \phi_{j+1,n}(x).$$

Cerchiamo di capire come sono fatti questi coefficienti. Consideriamo quindi la funzione caratteristica dell’intervallo $[0, 1)$,

$$\phi_H(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e l’analisi di multirisoluzione generata dalle funzioni costanti a tratti su $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}]$. In questo contesto, sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ allora

$$f_{j,n} = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_{H,j,n}(x) dx = \int_{\frac{n}{2^j}}^{\frac{n+1}{2^j}} f(x) 2^{\frac{j}{2}} dx.$$

Notiamo che $\phi_H \in V_0 \subset V_1$ quindi si può scrivere come combinazione lineare di funzioni che generano V_1

$$\begin{aligned} \phi_H(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \phi_H(2x) + \sqrt{2} \phi_H(2x-1) \right) \\ &= \phi_{H,00}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{H,10}(x) + \phi_{H,11}(x)) \end{aligned}$$

Analogamente, $\phi_{H,j,n} \in V_j \subset V_{j+1}$, quindi si può rappresentare come combinazione lineare di elementi di V_{j+1} .

$$\phi_{H,j,n}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \phi_H(2^j x - n) = 2^{\frac{j}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} [\phi_H(2^{j+1}x - 2n) + \phi_H(2^{j+1}x - 2n - 1)]$$

ossia

$$\phi_{H,j,n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_{H,j+1,2n}(x) + \phi_{H,j+1,2n+1}(x)]$$

Allora i coefficienti f_{jn} si potranno scrivere nel seguente modo in funzione dei coefficienti del livello successivo:

$$f_{jn} = \int_{\frac{2^n}{2^{j+1}}}^{\frac{2n+2}{2^{j+1}}} f(x) 2^{\frac{j+1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\frac{2^n}{2^{j+1}}}^{\frac{2n+1}{2^{j+1}}} \dots + \int_{\frac{2^n}{2^{j+1}}}^{\frac{2n+2}{2^{j+1}}} \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{j+1,2n} + f_{j+1,2n+1})$$

Per capire com'è fatto il dettaglio che aggiungo e cioè la struttura dello spazio W , riscriviamo, con le nuove relazioni trovate, la differenza $f_{j+1}(x) - f_j(x)$:

$$f_j(x) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} (f_{j+1,2n} + f_{j+1,2n+1}) \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_{H,j+1,2n}(x) + \phi_{H,j+1,2n+1}(x))$$

$$f_{j+1}(x) = \sum_n f_{j+1,2n} \phi_{H,j+1,2n}(x) + f_{j+1,2n+1} \phi_{H,j+1,2n+1}(x)$$

da cui

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) - f_j(x) &= \sum_n \phi_{H,j+1,2n}(x) \frac{1}{2} [f_{j+1,2n} - f_{j+1,2n+1}] \\ &\quad - \phi_{H,j+1,2n+1}(x) [f_{j+1,2n} - f_{j+1,2n+1}] \\ &= \sum_n \frac{1}{\sqrt{2}} [f_{j+1,2n} - f_{j+1,2n+1}] [\phi_{H,j+1,2n}(x) - \phi_{H,j+1,2n+1}(x)] \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ponendo

$$\psi_H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_{H,1,0}(x) - \phi_{H,1,1}(x)] = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} [\phi(2x) - \phi(2x-1)], \quad (3.2)$$

$$\psi_{H,jn}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi_H(2^j x - n)$$

risulta che la differenza tra un'approssimazione e la successiva si può vedere come combinazione di funzioni $\psi_{H,jn}$ con certi coefficienti g_{jn}

$$f_{j+1}(x) - f_j(x) = \sum_n g_{jn} \psi_{H,jn}(x) \in W_j$$

dove le $\psi_{H,jn}$ sono traslate e dilatate di una stessa funzione. Tale differenza non è altro che l'elemento aggiuntivo di dettagli. Ogni elemento di W_j si può vedere come combinazione lineare di funzioni che sono traslate e dilatate di una stessa funzione ψ_H .

3.1 Decomposizione e Ricostruzione

Mostriamo che quanto visto nell'esempio precedente per la base di Haar vale in generale.

Consideriamo $f \in W_j$, quindi $f \in V_{j+1}$, inoltre $f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right) \in V_1$. Moltiplichiamo f per un generico elemento di V_j , cioè per una traslata e dilatata della ϕ .

$$0 = \langle f, \phi_{jk} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi(2^j x - k) 2^{\frac{j}{2}} dx \underbrace{=}_{z=2^j x} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{z}{2^j}\right) \phi(z - k) dz$$

dunque $f\left(\frac{\cdot}{2^j}\right) \in W_0$ in quanto risulta ortogonale a V_0 .

Se abbiamo una MRA, sommando tra loro tutti gli spazi dei dettagli si ottiene una decomposizione ortogonale di $L^2(\mathbb{R})$. Inoltre tali spazi sono generati dalle traslate e dilatate di una sola funzione. Allora se riusciamo a capire quando le traslate e dilatate di questa funzione sono ortonormali abbiamo trovato una wavelet **ortonormale** (vedere Definizione 1.3).

Ammesso di avere una MRA, se riusciamo a scrivere una funzione ψ che genera W_0 avremo una famiglia di wavelet. Ipotizzando dunque di avere una MRA, abbiamo solo bisogno di capire come costruire la ψ che genera W_0 . Successivamente ci occuperemo di capire quando una funzione ϕ genera una MRA. Prima di affrontare in dettaglio tali questioni, diamo un'idea del perchè questo strumento risulta efficiente dal punto di vista pratico.

Supponiamo, dunque, di avere una MRA e di aver costruito ϕ e ψ che costituiscono con le proprie traslate una base ortonormale rispettivamente di V_0 e W_0 .

Data $f \in L^2(\mathbb{R})$, possiamo determinare una approssimazione f_M di f tramite proiezione, ossia

$$f_M \in V_M, \quad f_M = \sum_n f_{M_n} \phi_{M_n}(x), \quad f_{M_n} = \langle f, \phi_{M_n} \rangle. \quad (3.3)$$

Dalla **m2)** risulta che le approssimazioni suddette (proiezioni di f su V_j) sono arbitrariamente accurate, cioè

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M : \|f - f_M\| < \varepsilon.$$

D'ora in poi lavoreremo sempre sulle approssimazioni del segnale negli spazi V_j sulle quali dovremo fare operazioni varie: compressione, trasmissione, denoising,.... Notiamo che essendo

$$V_M = W_{M-1} \oplus W_{M-2} \oplus \dots \oplus W_{M-k} \oplus V_{M-k},$$

ogni elemento di V_M si può scrivere in maniera univoca come somma di elementi di

$$W_{M-1}, W_{M-2}, \dots, W_{M-k}, V_{M-k}.$$

Indicando con g gli elementi di W e con f gli elementi di V , possiamo scrivere la nostra approssimazione f_M nel seguente modo

$$f_M = f_{M-k} + g_{M-k} + \dots + g_{M-1}.$$

Le osservazioni di base sono le seguenti:

- f_M è un'approssimazione migliore rispetto a f_{M-k} ,
- Dall'approssimazione f_{M-k} riesco a ricostruire f_M aggiungendo successivamente dettagli, dettagli rappresentati dalle funzioni

$$g_{M-k}, \dots, g_{M-1}.$$

- A seconda delle operazioni che si devono eseguire su f_M sarà più conveniente vederlo come elemento di V_M e quindi esprimerlo come

$$f_M = \sum_n f_{M_n} \phi_{M_n}(x)$$

oppure come somma di elementi di $W_{M-1}, W_{M-2}, \dots, W_{M-k}, V_{M-k}$.

- Saremo avvantaggiati da questa duplice rappresentazione se disporremo di mezzi efficienti per passare da una rappresentazione all'altra.

Il processo che da f_M , cioè noti i coefficienti f_{M_n} , permette di ottenere le funzioni $g_{M-k}, \dots, g_{M-1}, f_{M-k}$ si chiama processo di **decomposizione** del segnale

$$f_M \rightarrow f_{M-k} + g_{M-k} + \dots + g_{M-1}.$$

Ovviamente è utile anche il processo inverso, ovvero noti i coefficienti della rappresentazione di f_M come somma di elementi degli spazi $W_{M-1}, W_{M-2}, \dots, W_{M-k}, V_{M-k}$, scriverla come elemento di V_M , cioè scrivere i coefficienti di f_M come combinazione lineare di elementi della base ϕ_M . Tale processo è noto come processo di **ricostruzione** del segnale

$$f_M \leftarrow f_{M-k} + g_{M-k} + \dots + g_{M-1}.$$

Dal punto di vista concettuale non c'è nulla di difficile, sono solo cambiamenti di base. Ma essendo gli spazi vettoriali di dimensione infinita, le matrici che rappresentano il cambiamento di base sono di dimensione infinita. Tuttavia nella struttura considerata le cose si semplificano.

Vediamo quindi la struttura degli algoritmi di decomposizione e di ricostruzione nelle ipotesi che siano assegnate una MRA e una corrispondente decomposizione wavelet di $L^2(\mathbb{R})$.

3.1.1 Decomposizione

Data l'approssimazione f_M del segnale f come in (3.3) abbiamo

$$\begin{array}{ccccccc} f_M \in V_M & \rightarrow & f_{M-1} \in V_{M-1} & \rightarrow & f_{M-2} \in V_{M-2} & \rightarrow & \cdots \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & g_{M-1} \in W_{M-1} & \rightarrow & g_{M-2} \in W_{M-2} & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

la decomposizione consiste dunque nell'iterare sempre uno stesso passaggio.

Ad un generico livello $j+1$ avremo

$$V_{j+1} \ni f_{j+1} = \sum_n f_{j+1,n} \phi_{j+in}(x),$$

cioè, nota la sequenza $f_{j+1,n}$, vogliamo determinare

$$f_j = \sum_l f_{jl} \phi_{jl}(x),$$

quindi la sequenza $\{f_{jl}\}$,

$$g_j = \sum_l g_{jl} \psi_{jl}(x)$$

cioè la sequenza $\{g_{jl}\}$.

Per capire quali relazioni intercorrono fra le basi di questi spazi, consideriamo lo spazio $V_1 = V_0 \oplus W_0$.

In particolare $\sqrt{2}\phi(2x) \in V_1$ e quindi si può scrivere come

$$\sqrt{2}\phi(2x) = \sum_n a_{-2n} \phi(x-n) + \sum_n b_{-2n} \psi(x-n).$$

Ancora, la funzione $\sqrt{2}\phi(2x-1)$ appartiene allo spazio V_1 , dunque possiamo scriverla come somma di elementi di V_0 e W_0

$$\sqrt{2}\phi(2x-1) = \sum_n a_{1-2n} \phi(x-n) + \sum_n b_{1-2n} \psi(x-n).$$

Consideriamo ora la traslazione generica con indice l pari, la funzione $\sqrt{2}\phi(2x-l) \in V_1$ si scrive nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\phi(2x-l) &= \sqrt{2}\phi\left(2\left(x-\frac{l}{2}\right)\right) = \\ &= \sum_n a_{-2n} \phi\left(x-\frac{l}{2}-n\right) + \sum_n b_{-2n} \psi\left(x-\frac{l}{2}-n\right). \end{aligned}$$

Se consideriamo il cambiamento di variabile $k = n + \frac{l}{2}$ si ha

$$\sqrt{2}\phi(2x-l) = \sum_k a_{-2(k-\frac{l}{2})} \phi(x-k) + \sum_k b_{l-2k} \psi(x-k).$$

La stessa espressione vale se l è dispari. L'effetto della traslazione sulla funzione di V_1 determina una traslazione dei coefficienti. Nella matrice di cambiamento di base, questa struttura si traduce nel fatto che le colonne della matrice sono ottenute tutte da un'unica colonna per traslazione. Dunque possiamo scrivere

$$\phi_{1l}(x) = \sum_k a_{l-2k} \phi_{0k}(x) + b_{l-2k} \psi_{0k}(x).$$

Esempio 3.3 Consideriamo la MRA di Haar. In tal caso gli unici elementi non nulli della sequenza sono

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & b_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & b_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Si potrebbe pensare che nel passare da un generico livello j al livello successivo $j+1$ i coefficienti dipendano da j , ma questo non accade per la struttura degli spazi V_j . Consideriamo infatti un livello generico j :

$$2^{\frac{j}{2}} \sqrt{2} \phi(2^{j+1}x - l) = 2^{\frac{j}{2}} \sum_k a_{l-2k} \phi(2^j x - k) + b_{l-2k} \psi(2^j x - k).$$

Dunque

$$\phi_{j+1,l}(x) = \sum_k a_{l-2k} \phi_{jk}(x) + b_{l-2k} \psi_{jk}(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= \sum_l f_{j+1,l} \phi_{j+1,l}(x) = \sum_l f_{j+1,l} \sum_k a_{l-2k} \phi_{jk}(x) + b_{l-2k} \psi_{jk}(x) \\ &= \sum_k \sum_l f_{j+1,l} a_{l-2k} \phi_{jk}(x) + \sum_k \sum_l f_{j+1,l} b_{l-2k} \psi_{jk}(x) \\ &= \sum_k f_{jk} \phi_{jk}(x) + \sum_k g_{jk} \psi_{jk}(x) \end{aligned}$$

dove

$$f_{jk} = \sum_l f_{j+1,l} a_{l-2k}, \quad g_{jk} = \sum_l f_{j+1,l} b_{l-2k}.$$

La legge di cambiamento **non dipende** dal livello j . Nel processo di decomposizione sono fondamentali le sequenze a e b .

3.1.2 Ricostruzione

Il procedimento inverso consiste nel ricostruire f_M conoscendo f_{M-k} e $g_{M-k}, \dots, g_{M-1}$. Quindi supponendo di avere un'approssimazione ad un livello

basso ed i dettagli dobbiamo passare ad un livello superiore. Ricordando che $V_1 = V_0 \oplus W_0$, per opportune sequenze $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ abbiamo

$$\phi(x) = \sum_k \sqrt{2} p_k \phi(2x - k)$$

$$\psi(x) = \sum_k \sqrt{2} q_k \phi(2x - k).$$

Come per il caso del processo di ricostruzione, traslando le ϕ e le ψ , tale traslazione si scarica sui coefficienti, mentre le dilatazioni non influenzano i coefficienti. Otteniamo dunque un risultato simile al precedente, ovvero

$$\phi_{kl}(x) = \sum_n p_{n-2l} \phi_{k+1,n}(x)$$

$$\psi_{kl}(x) = \sum_n q_{n-2l} \phi_{k+1,n}(x)$$

Le due sequenze p e q ci permettono di passare da un generico livello al livello superiore.

Esempio 3.4 Nel caso dell MRA di Haar risulta

$$\phi(x) = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) + \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x - 1)$$

$$\psi(x) = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x) - \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi(2x - 1)$$

Quindi gli unici elementi non nulli delle sequenze p e q sono:

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & q_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ p_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & q_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Ad un generico livello j , l'algoritmo di ricostruzione si articola dunque come segue:

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) &= f_j(x) + g_j(x) = \sum_l f_{jl} \phi_{jl}(x) + g_{jl} \psi_{jl}(x) \\ &= \sum_l f_{jl} \sum_n p_{n-2l} \phi_{j+1,n}(x) + g_{jl} \sum_n q_{n-2l} \phi_{j+1,n}(x) \\ &= \sum_n \phi_{j+1,n}(x) \sum_l f_{jl} p_{n-2l} + \sum_n \phi_{j+1,n}(x) \sum_l q_{n-2l} g_{jl} \\ &= \sum_n \phi_{j+1,n}(x) \sum_l f_{jl} p_{n-2l} + q_{n-2l} g_{jl} = \sum_n \phi_{j+1,n}(x) f_{j+1,n} \end{aligned}$$

quindi il coefficiente $f_{j+1,n}$ che esprime f_{j+1} nella base $\phi_{j+1,n}$ risulta

$$f_{j+1,n} = \sum_l f_{jl} p_{n-2l} + q_{n-2l} g_{jl}.$$

Anche in questo caso, **indipendentemente dal livello** a cui stiamo lavorando, cioè dall'accuratezza con cui stiamo cercando di rappresentare il nostro segnale, il tutto è descritto da due sequenze p e q .

In linea di principio non c'è nessun motivo per cui le sequenze a, b e p, q debbano essere in relazione, in quanto descrivono coefficienti di rappresentazioni diverse. In ipotesi di ortonormalità esiste una relazione speciale tra le sequenze a, b e p, q (si veda anche l'esempio di Haar). Supponendo dunque di essere in ipotesi ortonormalità e consideriamo il prodotto scalare:

$$\begin{aligned} \langle \phi_{jn}, \phi_{j+1,l} \rangle &= \left\langle \phi_{jn}, \sum_k a_{l-2k} \phi_{jk}(x) + b_{l-2k} \psi_{jk}(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \phi_{jn}, \sum_k a_{l-2k} \phi_{jk}(x) \right\rangle + \left\langle \phi_{jn}, \sum_k b_{l-2k} \psi_{jk}(x) \right\rangle \\ &= \sum_k \bar{a}_{l-2k} \langle \phi_{jn}, \phi_{jk}(x) \rangle + \sum_k \bar{b}_{l-2k} \langle \phi_{jn}, \psi_{jk}(x) \rangle \\ &= \sum_k \bar{a}_{l-2k} \delta_{nk} = \bar{a}_{l-2n} \end{aligned}$$

in quanto $\langle \phi_{jn}, \psi_{jk} \rangle = 0$ poichè $\phi_{jn} \in V_j$ e $\psi_{jk} \in W_j$ e $V_j \perp W_j$. Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \langle \phi_{j+1,l}, \phi_{jn} \rangle &= \left\langle \phi_{j+1,l}, \sum_r p_{r-2n} \phi_{j+1,r} \right\rangle \\ &= \sum_r \bar{p}_{r-2n} \langle \phi_{j+1,l}, \phi_{j+1,r} \rangle = \sum_r \bar{p}_{r-2n} \delta_{lr} = \bar{p}_{l-2n} \end{aligned}$$

da cui essendo

$$\langle \phi_{jn}, \phi_{j+1,l} \rangle = \overline{\langle \phi_{j+1,l}, \phi_{jn} \rangle}$$

risulta

$$\bar{a}_{l-2n} = p_{l-2n}$$

Analogamente

$$\bar{b}_{l-2n} = q_{l-2n}$$

Dunque, in ipotesi di ortonormalità le sequenze che descrivono l'algoritmo di decomposizione e quello di ricostruzione si riducono in pratica, tramite coniugio, da quattro a due.

Se abbiamo una struttura di MRA ed una famiglia di wavelet associata possiamo decomporre e ricostruire il nostro segnale f approssimato in un certo spazio V_M , con algoritmi molto semplici, basati su al più quattro sequenze

numeriche binfinite. Sarà caratteristica fondamentale di una wavelet e quindi dei relativi algoritmi di decomposizione e ricostruzione fornire sequenze il più corte possibile. In ultimo vedremo che “costruzione di una wavelet” vuol dire costruzione di un’opportuna sequenza di coefficienti.

Dal punto di vista pratico sarà importante avere delle sequenze a supporto compatto o comunque a decadimento molto veloce.

Le sequenze a , b e p , q sono un modo per descrivere le funzioni ϕ e ψ .

3.2 Descrizione degli algoritmi di decomposizione e ricostruzione

3.2.1 Decomposizione

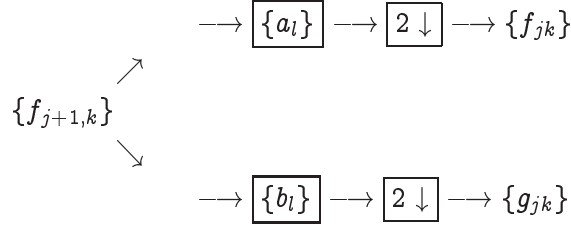
Nell’algoritmo di decomposizione i valori $\{fj, k\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $\{gj, k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ sono ottenuti da $\{fj + 1, k\}_{k \in \mathbf{Z}}$ usando un processo di media avente per pesi i valori delle sequenze $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ rispettivamente. Successivamente solo i valori di indice pari sono selezionati. Più precisamente poniamo

$$F_{jl} := \sum_n f_{j+1,n} a_{n-l}, \quad G_{jl} := \sum_n f_{j+1,n} b_{n-l}$$

tali quantità vengono dette **moving average** e, a meno del segno, corrispondono ad una convoluzione discreta o filtraggio digitale. Risulta

$$f_{j,k} = F_{j,2k}, \quad g_{j,k} = G_{j,2k}$$

Il campionamento sugli indici pari viene detto **downsampling** ed è di solito schematizzato come segue



3.2.2 Ricostruzione

Analogamente il processo che porta da $\{f_{jk}\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $\{g_{jk}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ a $\{f_{j+1,k}\}_{k \in \mathbf{Z}}$ può essere descritto come segue:

1. si inserisce il valore 0 fra due elementi consecutivi delle sequenze di partenza (**upsampling**)
2. si eseguono due moving averages con pesi dati dalle sequenze $\{p_l\}$, $\{q_l\}$

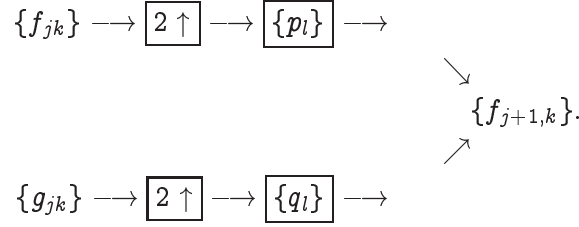
infatti posto

$$\tilde{F}_{jl} := \begin{cases} f_{jm} & \text{se } l = 2m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \tilde{G}_{jl} := \begin{cases} g_{jm} & \text{se } l = 2m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

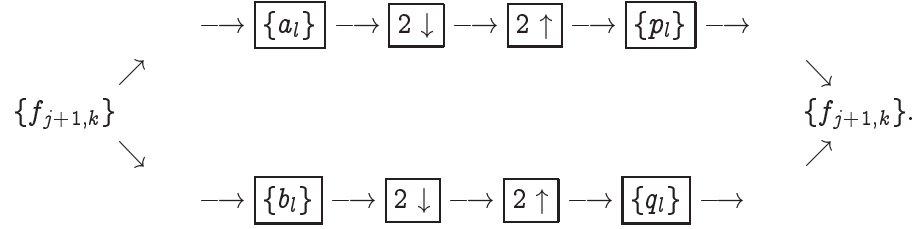
risulta

$$\begin{aligned} f_{j+1,k} &= \sum_m f_{jm} p_{k-2m} + g_{jm} q_{k-2m} = \\ &= \sum_m [f_{jm} p_{k-2m} + 0 p_{k-2m-1}] + [g_{jm} q_{k-2m} + 0 q_{k-2m-1}] \\ &= \sum_l \tilde{F}_{jl} p_{k-l} + \tilde{G}_{jl} q_{k-l}. \end{aligned}$$

Graficamente questo viene schematizzato come segue



Naturalmente applicando di seguito i due processi si ottiene l'identità (ricostruzione perfetta). Graficamente si ha il seguente schema noto come **filter bank**.



Osservazione 13 come già osservato

$$g_{jk} = \langle f, \psi_{jk} \rangle = (W_\psi f)\left(\frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j}\right), \quad k, j \in \mathbb{Z}$$

cioè sono i valori della trasformata wavelet discreta. L'algoritmo di decomposizione quindi un metodo per calcolare tale trasformata (assumendo di avere un'approssimazione del segnale in V_M). Analogamente l'algoritmo di ricostruzione permette il calcolo della trasformata inversa.

3.3 Caratterizzazione delle trasformate di ϕ e di ψ

Supponendo di possedere una MRA cerchiamo adesso di generare gli spazi W_j , ortogonali ai V_j , tramite traslate e dilatate di una stessa funzione ψ . Tali traslate devono costituire un sistema ortonormale.

A tal fine caratterizziamo anzitutto le funzioni le cui traslate generano un sistema ortonormale successivamente caratterizzeremo le funzioni di W_0 (come ortogonale di V_0).

Sia ϕ una funzione che genera una MRA, allora

$$\phi(x) = \sum_n p_n \sqrt{2} \phi(2x - n) \quad (3.6)$$

quindi

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}(\omega) &= \sqrt{2} \sum_n p_n \int_{\mathbf{R}} \phi(2x - n) e^{-i\omega x} dx \\ &\stackrel{z=2x-n}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n \int_{\mathbf{R}} \phi(z) e^{-i\frac{z}{2}\omega} e^{-i\frac{\omega}{2}n} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n e^{-i\frac{\omega}{2}n} \int_{\mathbf{R}} \phi(z) e^{-i\frac{z}{2}\omega} dz \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n e^{-i\frac{\omega}{2}n} \right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \end{aligned}$$

quindi

$$\widehat{\phi}(\omega) = P\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad P(w) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n e^{-iwn}. \quad (3.7)$$

Analogamente la funzione ψ è un elemento di W_0 , quindi in particolare di V_1 , dunque

$$\psi(x) = \sum_n q_n \sqrt{2} \phi(2x - n) \quad (3.8)$$

da cui

$$\widehat{\psi}(\omega) = Q\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad Q(w) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n q_n e^{-iwn}. \quad (3.9)$$

Se le sequenze p e q sono finite, a meno di un riordinamento degli indici, P e Q sono un polinomi trigonometrici, altrimenti sono comunque funzioni 2π -periodiche.

Caratterizziamo ora una sistema ortonormale di traslate.

Proposizione 3.1 *Il sistema*

$$\{\phi(\cdot - k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

è un sistema ortonormale se e solo se

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2 = 1, \quad q.o.$$

Dimostrazione

Supponiamo il sistema sia ortonormale, allora, dall'identità di Parseval,

$$\delta_{0k} = \langle \phi(x), \phi(x - k) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(\omega) \overline{\widehat{\phi}(\cdot - k)} d\omega$$

inoltre risulta

$$\widehat{\phi}(\cdot - k) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) e^{-i\omega x} dx \underset{z=x-k}{=} \int_{\mathbb{R}} \phi(z) e^{-i\omega z} e^{-i\omega k} dz = \widehat{\phi}(\omega) e^{-i\omega k}$$

Quindi, vedasi anche lemma

$$\begin{aligned} \delta_{0k} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\phi}(\omega) \right|^2 e^{i\omega k} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi l}^{2\pi(l+1)} \left| \widehat{\phi}(\omega) \right|^2 e^{i\omega k} d\omega \\ &\underset{\omega=\eta+2\pi l}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \left| \widehat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2 e^{i\eta k} d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2 e^{i\eta k} d\eta \end{aligned}$$

Posto

$$F(\eta) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2$$

F è una funzione 2π -periodica e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2 e^{i\eta k} d\eta$$

è il coefficiente k -esimo della serie di Fourier di $F(\eta)$. Nell'ipotesi che le traslate costituiscano un sistema ortonormale sappiamo che questo coefficiente è δ_{0k} ossia la funzione $F(\eta)$ ha serie di Fourier con coefficienti tutti nulli tranne quello corrispondente all'indice $k = 0$ che è 1, da cui la tesi.

Il viceversa segue percorrendo al contrario i passaggi fatti. ■

Lemma 3.2 Sia $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ allora

$$\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2$$

converge in $L^1([0, 2\pi])$ e

$$\int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} e^{ik\omega} |\hat{\phi}(\omega + 2l\pi)|^2 = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} e^{ik\omega} |\hat{\phi}(\omega + 2l\pi)|^2 \quad (3.10)$$

Dimostrazione

Posto

$$F_N(\omega) := \sum_{|k| < N} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2, \quad N \in \mathbb{N}$$

per $M > N$

$$\begin{aligned} \|F_M - F_N\|_{L^1} &= \int_0^{2\pi} \sum_{N < |k| \leq M} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \underbrace{=}_{\eta = \omega + 2k\pi} \sum_{n < |k| \leq M} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} |\hat{\phi}(\eta)|^2 = \\ &= \int_{-2M\pi}^{2N\pi} |\hat{\phi}(\eta)|^2 + \int_{-2(N+1)\pi}^{2(M+1)\pi} |\hat{\phi}(\eta)|^2 \end{aligned}$$

essendo $\hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ tali integrali tendono a 0 quando N tende a $+\infty$, $M > N$. Quindi la successione F_N è di Cauchy in L^1 per cui converge in L^1 . Ne segue

$$\left| \sum_{|k| \leq N} |e^{ik\omega} \hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \right| \leq \sum_{|k| \leq N} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \in L^1.$$

Ne segue che, per il teorema di convergenza dominata, vale la (3.10). ■

Osservazione 14 Con passaggi analoghi si mostra che il sistema

$$\{\phi(\cdot - k), \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

è una base di Riesz se e solo se

$$0 < A \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2 \leq B$$

dove A e B sono le costanti che compaiono nella definizione di base di Riesz.

Supponiamo ora che ϕ verifichi la relazione di scala (3.6) e vediamo come la condizione di ortonormalità si traduce in una caratterizzazione di P . Dalla Proposizione precedente

$$\begin{aligned}
 1 &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \widehat{\phi}(\eta + 2\pi l) \right|^2 \stackrel{\eta=2\xi}{=} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \widehat{\phi}(2\xi + 2\pi l) \right|^2 = \sum_{l \in \mathbf{Z}} |P(\xi + \pi l)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi + \pi l) \right|^2 \\
 &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} |P(\xi + 2\pi l)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 + |P(\xi + \pi + 2\pi l)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi + \pi + 2\pi l) \right|^2 \\
 &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} |P(\xi)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 + \sum_{l \in \mathbf{Z}} |P(\xi + \pi)|^2 \left| \widehat{\phi}(\xi + \pi + 2\pi l) \right|^2 \\
 &= |P(\xi)|^2 \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 + |P(\xi + \pi)|^2 \sum_{l \in \mathbf{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + \pi + 2\pi l) \right|^2 \\
 &= |P(\xi)|^2 + |P(\xi + \pi)|^2.
 \end{aligned}$$

Dunque se ϕ verifica la relazione di scala (3.6), le sue traslate generano un sistema ortonormale se e solo se:

$$|P(\xi)|^2 + |P(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad q.o. \quad (3.11)$$

Possiamo togliere il “q.o.” quando si ha continuità, in particolare ciò accade nel caso in cui la sequenza p è finita, e quindi la funzione P è praticamente un polinomio trigonometrico.

Esempio 3.5 Si consideri la MRA di Haar. Allora

$$\widehat{\phi}(\omega) = \int_0^1 e^{-i\omega x} dx = -\frac{1}{\omega i} [e^{-i\omega x}]_0^1 = -\frac{1}{\omega i} (e^{-i\omega} - 1) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}$$

inoltre

$$P(\omega) = \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega}),$$

quindi

$$P\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2} \left(e^{-i\frac{\omega}{2}} + 1 \right) \left(\frac{1 - e^{-i\frac{\omega}{2}}}{i\frac{\omega}{2}} \right) = \widehat{\phi}(\omega)$$

Sappiamo che il sistema è ortonormale quindi deve essere verificata la (3.11), infatti risulta

$$|P(\omega)|^2 = \frac{1}{4} (e^{-i\omega} + 1) (e^{i\omega} + 1) = \frac{1}{4} (e^{-i\omega} + 2 + e^{i\omega}) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\omega))$$

$$|P(\omega) + \pi|^2 = \frac{1}{4} (e^{-i\omega+\pi} + 1) (e^{i\omega+\pi} + 1) = \frac{1}{2} (1 + \cos(\omega + \pi))$$

3.3.1 Caratterizzazione delle funzioni di W_0 .

Sia $g \in W_0 \subset V_1$ allora

$$g(x) = \sum_n g_n \sqrt{2} \phi(2x - n)$$

per cui

$$\widehat{g}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-i\frac{\omega}{2}n} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = M_g\left(\frac{\omega}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.12)$$

dove

$$M_g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n g_n e^{-i\omega n}$$

è una funzione 2π - periodica. La funzione g deve essere ortogonale ad una qualunque traslata di ϕ quindi, con passaggi analoghi a quelli seguiti per la dimostrazione della Proposizione 3.1

$$\begin{aligned} 0 &= \langle g, \phi(\cdot - k) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{g}(\omega) \overline{\widehat{\phi}(\omega)} e^{i\omega k} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbf{Z}} \widehat{g}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)} e^{i\omega k} d\omega \end{aligned}$$

questo è il coefficiente k -esimo della serie di Fourier di

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \widehat{g}(\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\omega + 2\pi l)}$$

quindi la funzione integranda è nulla quasi ovunque, da cui, per le (3.7), (3.12)

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} \widehat{g}(2\omega + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(2\omega + 2\pi l)} \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} M_g(\omega + \pi l) \widehat{\phi}(\omega + \pi l) \overline{\widehat{\phi}(\omega + \pi l) P(\omega + \pi l)} \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} M_g(\omega + \pi l) \left| \widehat{\phi}(\omega + \pi l) \right|^2 \overline{P(\omega + \pi l)} \end{aligned}$$

Operando con passaggi analoghi a quelli effettuati per ottenere la (3.11) abbiamo

$$0 = M_g(\omega) \overline{P(\omega)} + M_g(\omega + \pi) \overline{P(\omega + \pi)} \quad (3.13)$$

Questa relazione dice come devono essere fatte le funzioni P e M_g affinché g sia un elemento di W_0 .

Secondo la relazione (3.11) non si può avere contemporaneamente e q.o.

$$P(\omega) = P(\omega + \pi) = 0.$$

Inoltre la relazione (3.13) si può riscrivere in forma vettoriale come un prodotto scalare nel seguente modo

$$\begin{pmatrix} M_g(\omega) \\ M_g(\omega + \pi) \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \overline{P(\omega + \pi)} \\ -P(\omega) \end{pmatrix} = 0$$

quindi

$$\begin{pmatrix} M_g(\omega) \\ M_g(\omega + \pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P(\omega + \pi)} \\ -P(\omega) \end{pmatrix} \lambda(\omega) \quad (3.14)$$

ove $\lambda(\omega)$ è 2π -periodica. Inoltre, riscrivendo l'uguaglianza (3.14) per $\omega + \pi$ si ha

$$\begin{pmatrix} M_g(\omega + \pi) \\ M_g(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{P(\omega)} \\ -P(\omega + \pi) \end{pmatrix} \lambda(\omega + \pi)$$

ossia

$$\lambda(\omega) = -\lambda(\omega + \pi)$$

per soddisfare tale uguaglianza prendiamo

$$\lambda(\omega) = e^{i\omega} \nu(2\omega)$$

dove ν , purchè 2π -periodica, è totalmente arbitraria. Allora

$$M_g(\omega) = \lambda(\omega) \overline{P(\omega + \pi)}. \quad (3.15)$$

Riassumendo, affinchè $g \in W_0$, deve risultare

$$\widehat{g}(\omega) = e^{i\frac{\omega}{2}} \nu(\omega) \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.16)$$

per una qualsiasi ν 2π -periodica.

In particolare, la trasformata della funzione ψ deve verificare la relazione precedente. Il fatto che le traslate di ψ debbano costituire un sistema ortonormale impone ulteriori condizioni su ν . Considerando la caratterizzazione della proposizione 3.1, ricordando la (3.9) e (3.11), si ottiene facilmente che,

$$\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

è un sistema ortonormale se e solo se

$$|\nu| = 1, \quad q.o.$$

Scegliamo dunque

$$\nu(\omega) = 1$$

ossia,

$$\widehat{\psi}(\omega) = e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

per cui avremo da (3.8)

$$Q\left(\frac{\omega}{2}\right) = e^{i\frac{\omega}{2}} \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}. \quad (3.17)$$

Osservazione 15 *Le funzioni di W_0 sono esprimibili come combinazioni lineari delle traslate della ψ , infatti ν è una funzione 2π -periodica dunque scrivendo $\widehat{g}(\omega)$ con al posto della funzione $\nu(\omega)$ la sua serie di Fourier abbiamo*

$$\widehat{g}(\omega) = \sum_k \nu_k e^{-i\omega k} \widehat{\psi}(\omega) = \sum_k \nu_k \widehat{\psi}(\cdot - k)$$

e quindi, da (3.17) e (3.16) si ha

$$g(\omega) = \sum_k \nu_k \psi(x - k).$$

Osservazione 16 *Utilizzando la notazione matriciale*

$$H(\omega) := \begin{pmatrix} P(\omega) & P(\omega + \pi) \\ Q(\omega) & Q(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

possiamo riassumere le (3.11) (3.17) affermando che la matrice $H(\omega)$ è unitaria ossia $H(\omega)H^(\omega)$ è la matrice identità.*

Notiamo che la sequenza q non può essere qualsiasi, ma è legata alla sequenza p . Risulta

$$Q(\omega) = e^{i\omega} \overline{P(\omega + \pi)} = e^{i\omega} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \overline{p_n} e^{i\omega n} e^{-i\pi n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n \overline{p_n} e^{i\omega(n+1)} (-1)^n$$

peraltro risulta

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k q_k e^{-i\omega k}$$

dunque deve essere $-k = n + 1$, quindi $n = -1 - k$

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k \overline{p_{-1-k}} e^{-i\omega k} (-1)^{1-k}$$

Dunque

$$q_k = \overline{p_{-1-k}} (-1)^{1-k} \quad (3.18)$$

Esempio 3.6 Si consideri la MRA di Haar. Gli unici indici della sequenza dei coefficienti p non nulli sono quelli con l'indice 1 e con l'indice 0.

$$\begin{aligned} -1 - k = 0 & \quad k = -1 & \quad q_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 - k = 1 & \quad k = -2 & \quad q_{-2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Ci aspettavamo la sequenza q_0, q_1 , ma la ψ ora ottenuta non è la stessa degli esempi già visti. Tale differenza è dovuta alla scelta della funzione ν . La funzione ψ individuata differisce per una traslazione ed un cambiamento di segno da quella precedentemente usata e quindi genera naturalmente lo stesso spazio.

Possiamo riassumere quanto appena detto con il seguente

Teorema 3.3 *Data una MRA in $L^2(\mathbb{R})$, esiste una base ortonormale di wavelets per $L^2(\mathbb{R})$*

$$\left\{ \psi_{jk}, \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad \psi_{jk}(x) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j x - k) \right\}. \quad (3.19)$$

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$, sia $P_j f$ la proiezione ortonormale di f su V_j , allora

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_k \psi_{jk}(x) \langle f, \psi_{jk} \rangle. \quad (3.20)$$

Se

$$\phi(x) = \sum_n p_n \sqrt{2} \phi(2x - n)$$

allora una possibile scelta per ψ è

$$\psi(x) = \sum_n q_n \sqrt{2} \phi(2x - n)$$

dove

$$(-1)^{n-1} \overline{p_{-1-n}} = q_n. \quad \blacksquare$$

Osservazione 17 *Fissata ϕ è chiaro che ψ non è unica. Infatti la (3.17) corrisponde ad una precisa scelta di ν . In particolare, scegliendo*

$$\widehat{\tilde{\psi}}(\omega) = \rho_0 e^{im\omega} \hat{\psi}(\omega), \quad m \in \mathbb{Z}, \quad |\rho_0| = 1$$

si ottiene una wavelet $\tilde{\psi}$ che risulta essere una traslata di ψ moltiplicata per ρ_0 .

La questione ora è capire quali debbano essere le ipotesi da fare sulla funzione ϕ affinché generi una MRA.

3.4 Caratterizzazione di ϕ che genera una MRA

Assumeremo in questa sezione che la funzione ϕ verifichi le due seguenti ipotesi

$$\mathbf{H1)} \quad \phi(x) = \sqrt{2} \sum_n p_n \phi(2x - n)$$

$\mathbf{H2)}$ le traslate intere di ϕ formano una base di Riesz per cui

$$0 < A \leq \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 \leq B.$$

Definizione 3.2 ϕ , genera una MRA in $L^2(\mathbb{R})$ se gli spazi

$$V_j := \text{span} \langle \phi_{jk}(x) := 2^{j/2} \phi(2^j x - k), \quad k \in \mathbb{Z} \rangle, \quad j \in \mathbb{Z}$$

verificano **m1)–m5)** e **m6)** o **m6)***.

3.4.1 Condizioni necessarie per ϕ affinché generi una MRA

Vale il seguente

Teorema 3.4 Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se ϕ genera una MRA con **m6)** allora

$$|\hat{\phi}(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt \right| = 1.$$

Dimostrazione

Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ con $\hat{f}$ continua, a supporto in $[-R, R]$ e $\|f\|_2 \neq 0$.
Si consideri la proiezione di f su V_j

$$P_j f = \sum_k \langle f, \phi_{jk} \rangle \phi_{jk}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

essendo il sistema $\{\phi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormale, per **m6)** risulta

$$\|P_j f\|_2^2 = \sum_k |\langle f, \phi_{jk} \rangle|^2 = \sum_k \left| \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{\phi}_{jk} \rangle \right|^2.$$

Poichè

$$\hat{\phi}_{jk}(\omega) = \frac{1}{2^{j/2}} \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) e^{-i\omega k/2^j}$$

considerando j sufficientemente grande, poichè $\hat{f}$ ha supporto compatto, abbiamo

$$\|P_j f\|_2^2 = \sum_k \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2^j\pi}^{2^j\pi} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2^{j/2}} e^{i\omega k/2^j} d\omega \right|^2$$

si osserva che $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{2^{j/2}}e^{i\omega k/2^j}, k \in \mathbb{Z}\}$ è un sistema ortonormale completo in $L^2([-2^j\pi, 2^j\pi])$ quindi nell'espressione precedente abbiamo i moduli al quadrato dei coefficienti della serie di Fourier di

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}\hat{\phi}(\frac{\cdot}{2^j})$$

per cui

$$\|P_j f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \left\| \hat{f}\hat{\phi}(\frac{\cdot}{2^j}) \right\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\hat{f}(\omega)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega.$$

Le ipotesi su ϕ assicurano che $\hat{\phi}$ è continua e quindi uniformemente continua nel compatto $[-R, R]$, ne segue che, passando al limite, per **m2**)

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \lim_{j \rightarrow +\infty} \|P_j f\|_2^2 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R |\hat{f}(\omega)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{f}(\omega)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2^j})|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \|\hat{f}\|_2^2 |\hat{\phi}(0)|^2 = \|f\|_2^2 |\hat{\phi}(0)|^2. \end{aligned}$$

Da cui $|\hat{\phi}(0)| = 1$ ■.

Corollario 3.5 Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se ϕ genera una MRA con **m6**) allora

$$\sum_n p_{2n} = \sum_n p_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.21)$$

Inoltre

$$\hat{\phi}(2\pi n) = 0, \quad n \neq 0. \quad (3.22)$$

Dimostrazione

Le ipotesi assicurano che $\hat{\phi}$ è continua, quindi

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(\frac{\omega}{2})P(\frac{\omega}{2})$$

vale puntualmente. Essendo per il teorema $\hat{\phi}(0) \neq 0$ risulta

$$\hat{\phi}(0) = \hat{\phi}(0)P(0) \Rightarrow P(0) = 1$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n = 1. \quad (3.23)$$

Analogamente, poichè le traslate di ϕ generano un sistema ortonormale da (3.11), che per continuità vale puntualmente, risulta

$$1 = |P(0)|^2 + |P(\pi)|^2, \Rightarrow P(\pi) = 0$$

ossia

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n (-1)^n p_n = 0. \quad (3.24)$$

Si verifica facilmente che (3.23) e (3.24) sono equivalenti alla (3.21).

Da $\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ valutata per $\omega = 0$ e $|\hat{\phi}(0)| = 1$ segue poi la (3.22). ■

Con passaggi analoghi si ottiene

Corollario 3.6 *Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se ϕ genera una MRA con m6) e sia ψ una wavelet associata a ϕ allora*

$$\hat{\psi}(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Inoltre

Proposizione 3.7 *Sia $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, se ϕ genera una MRA con m6) allora*

$$\sum_k \phi(x + k) = \hat{\phi}(0) \neq 0. \quad (3.25)$$

Dimostrazione

Poichè $\phi \in L^1$

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} |\phi(y)| dy = \sum_k \int_k^{k+1} |\phi(y)| dy = \sum_k \int_0^1 |\phi(x + k)| dx \quad (3.26)$$

quindi, lavorando con serie a termini positivi

$$+\infty > \sum_k \int_0^1 |\phi(x + k)| dx = \int_0^1 \sum_k |\phi(x + k)| dx$$

ossia

$$\sum_k |\phi(x + k)| < +\infty.$$

La funzione $\sum_k \phi(x + k)$ è 1-periodica. La sviluppiamo in serie di Fourier. I coefficienti dello sviluppo sono

$$c_n = \int_0^1 \sum_k \phi(x + k) e^{-i2\pi nx} dx$$

Posto

$$F_n(x) := \sum_{|k| \leq n} |\phi(x+k)|$$

quindi, applicando convergenza dominata, vedi (3.26), e ricordando (3.22)

$$c_n = \sum_k \int_0^1 \phi(x+k) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{-i2\pi n y} dy = \hat{\phi}(2\pi n) = \hat{\phi}(0) \delta_{0n}. \quad \blacksquare$$

Proposizione 3.8 *Sia $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, continua, che verifichi H1) e H2) e tale che*

$$|\phi| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

allora le due seguenti condizioni sono equivalenti

$$a) \sum_n p_{2n} = \sum_n p_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$b) \sum_n \phi(x-l) = c \neq 0.$$

Dimostrazione

a) $\Rightarrow$ b)

Sia

$$f(x) := \sum_l \phi(x-l).$$

L'ipotesi sul decadimento di ϕ assicura che la serie è convergente assolutamente e, poichè ϕ è continua anche f lo è.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_l \phi(x-l) = \sum_l \sqrt{2} \sum_n p_n \phi(2x-2l-n) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{2l+n=k} \sum_k \sum_l \sqrt{2} p_{k-2l} \phi(2x-k) \\ &= \sum_k \phi(2x-k) \underbrace{\sum_l \sqrt{2} p_{k-2l}}_1 = \sum_k \phi(2x-k) = f(2x). \end{aligned}$$

Quindi f è continua e tale che $f(x) = f(2x)$, per cui è costante, infatti supponiamo per assurdo che esistano x e y con $x \neq y$ tali che $f(x) \neq f(y)$ allora

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^j}\right) \neq f\left(\frac{y}{2^j}\right) = f(y)$$

che porta ad un assurdo per $j \rightarrow \infty$. Quindi $\sum_k \phi(x+k)$ è una costante c . Le ipotesi assicurano che $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. Ripercorrendo la dimostrazione del teorema precedente abbiamo

$$c = \sum_k \phi(x+k) = \sum_k \hat{\phi}(2k\pi) e^{i2k\pi x}.$$

Ma essendo $\sum_k \phi(x+k) = c$, integrando in $[0, 1]$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } n = 0, \quad c \\ \text{se } n \neq 0, \quad 0 \end{array} \right\} = \int_0^1 c e^{-i2\pi x n} dx = \int_0^1 \sum_k \widehat{\phi}(2k\pi) e^{i2k\pi x} e^{-i2\pi x n} dx = \widehat{\phi}(2n\pi).$$

Dunque

$$\widehat{\phi}(0) = c, \quad \widehat{\phi}(2n\pi) = 0, \quad n \neq 0. \quad (3.27)$$

Poichè inoltre ϕ verifica **H2**) abbiamo

$$\sum_k \left| \widehat{\phi}(\omega + 2k\pi) \right|^2 \geq A > 0$$

In particolare per $\omega = 0$ si ha

$$0 < A \leq \sum_k \left| \widehat{\phi}(2k\pi) \right|^2 = \left| \widehat{\phi}(0) \right|^2 = c^2$$

per cui

$$\sum_k \phi(x+k) = c = \widehat{\phi}(0), \quad c \neq 0.$$

$b) \Rightarrow a)$

Per quanto visto, (3.27), $b)$ implica

$$\widehat{\phi}(2\pi n) = c \delta_{0n}, \quad c \neq 0.$$

Dalla relazione di scala si ha per $\omega = 0$ $\widehat{\phi}(0) = P(0) \widehat{\phi}(0)$ dunque $P(0) = 1$ ossia la (3.23). Inoltre

$$0 = \widehat{\phi}(2\pi(2n+1)) = P(\pi(2n+1)) \widehat{\phi}(\pi(2n+1)) = P(\pi) \widehat{\phi}(\pi(2n+1)).$$

Se $P(\pi) \neq 0$ allora $\widehat{\phi}(\pi(2n+1)) = 0 \quad \forall n$ ossia

$$\sum_n \left| \widehat{\phi}(\pi + 2n\pi) \right|^2 = 0$$

in contraddizione con **H2**). Dunque $P(\pi) = 0$ ossia

$$\sum_n (-1)^n p_n = 0$$

che, con la (3.23) fornisce la tesi. ■

Osserviamo che nei teoremi precedenti abbiamo usato e dimostrato il seguente risultato, [1]

Teorema 3.9 (Poisson Summation Formula) *Siano $f, \hat{f}$ tali che*

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad |\widehat{f(x)}| \leq \frac{\hat{C}}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

allora

$$\sum_k f(x+k) = \sum_k \hat{f}(2k\pi) e^{i2k\pi x}. \quad \blacksquare \quad (3.28)$$

3.4.2 Condizioni sufficienti per ϕ per MRA

I risultati della sezione precedente si possono essenzialmente invertire e forniscono condizioni sufficienti affinché ϕ generi una MRA.

Enunciamo i risultati rimandando a [3], pg. 141 e seguenti, per i dettagli delle dimostrazioni che utilizzano tecniche analoghe a quelle usate finora.

Teorema 3.10 *Se $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tale che valgono H1), H2) ed inoltre*

$$\hat{\phi} \text{ continua, limitata, } \hat{\phi}(0) \neq 0$$

allora ϕ genera una MRA in $L^2(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Alternativamente abbiamo

Teorema 3.11 *Se $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ tale che valgono H1), H2) ed inoltre*

$$\phi \text{ continua, } |\phi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0$$

$$\sum_k \phi(x+k) = \text{costante} \neq 0$$

allora ϕ genera una MRA in $L^2(\mathbb{R})$. $\blacksquare$

Osservazione 18 *Dalla Proposizione 3.8 se ϕ è sufficientemente regolare il fatto che generi una MRA si può leggere in maniera banale sui coefficienti p_n , ossia risulta equivalente a*

$$\sum_n p_{2n} = \sum_n p_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Esempio 3.7 Le B-spline cardinali (nodi equispaziati) di ordine fissato verificano $\sum_k \phi(x+k) = 1$.

3.5 Mancanza di ortogonalità

Data ϕ che verifichi **H2**) la funzione definita da

$$\hat{\phi}^\#(\omega) := \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\left(\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2\right)^{1/2}}$$

genera, con le proprie traslate, lo stesso spazio generato da ϕ inoltre le traslate di $\phi^\#$ sono ortonormali. È interessante notare che

$$\langle \phi, \phi(\cdot - k) \rangle$$

fornisce il k -esimo coefficiente di Fourier della funzione

$$\sum_n |\hat{\phi}(\omega + 2n\pi)|^2.$$

Seguendo questo approccio Battle e Lemarié costruiscono una famiglia di wavelet ortonormali di regolarità arbitraria considerando come ϕ le B-spline cardinali. Le wavelet costruite non sono a supporto compatto ma hanno un decadimento esponenziale e sono di classe C^{k-2} usando B-splines di ordine k .

Esempio 3.8 Consideriamo la B-spline di ordine 2

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Risulta

$$\hat{\phi}(\omega) = \left[\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right]^2$$

da cui

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n p_n \phi(2x - n)$$

con

$$p_{-1} = p_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad p_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad p_n = 0, \quad n \neq -1, 0, 1.$$

Inoltre

$$\sum_k |\phi(\omega + 2\pi k)|^2 = \frac{2}{3} + \frac{\cos(\omega)}{3}$$

Quindi ϕ verifica **H1**) e **H2**) e, in base ai teoremi precedenti, genera una MRA ma il sistema delle traslate non è ortonormale.

3.6 Studio del supporto

Se ϕ ha supporto compatto allora, da **H1)** per l'ortonormalità

$$p_n = \langle \phi, \phi_{1,n} \rangle = 0$$

tranne che per un numero finito di indici.

Viceversa se

$$p_n = \langle \phi, \phi_{1,n} \rangle = 0, \quad n \notin [N^-, N^+]$$

allora ϕ ha supporto compatto contenuto in $[N^-, N^+]$. Infatti, data η_0 con supporto $[N_0^-, N_0^+]$ consideriamo la successione

$$\eta_l(x) := \sqrt{2} \sum_n p_n \eta_{l-1}(2x - n).$$

Si verifica che il termine l -esimo della successione ha supporto $[N_l^-, N_l^+]$ contenuto in $\left[\frac{N_{l-1}^- + N^-}{2}, \frac{N_{l-1}^+ + N^+}{2} \right]$, la tesi segue passando al limite in quanto

$$\eta_l \rightarrow \phi.$$

Concludendo ϕ è a **supporto compatto** se e solo se la sequenza $\{p_n\}$ ha elementi nulli tranne che per un numero finito di indici.

3.7 Regolarità

La regolarità di ψ è quella di ϕ . Il seguente teorema, [3], Sezione 5.5, lega la regolarità di ψ al numero dei suoi momenti nulli

Teorema 3.12 *Sia ψ tale che*

$$\{\psi_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}\}$$

è un sistema ortonormale e tale che

1. $\psi \in C^m$,
2. $\psi^{(l)}$ limitata, $\forall l \leq m$
3. $|\psi(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{1+m+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0$

allora

$$\int_{\mathbb{R}} x^l \psi(x) dx = 0, \quad l = 0, \dots, m, \quad \blacksquare \tag{3.29}$$

Da esso segue

Proposizione 3.13 *Sia $\psi \in C^\infty$ e a supporto compatto, allora*

$$\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

Non può essere un sistema ortonormale

Dimostrazione

Se il sistema fosse ortonormale tutte le ipotesi del teorema precedente sarebbero verificate per un qualsiasi m , ossia ψ avrebbe momenti di qualsiasi ordine nulli. Per il teorema di Weierstrass, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un polinomio p_ϵ per cui

$$\|\psi - p_\epsilon\|_{\infty, K} < \epsilon$$

ove K indica il supporto di ψ . Da cui

$$\|\psi\|_2^2 \leq \int_{\mathbb{R}} |\psi(x) - p_\epsilon(x)| |\psi(x)| dx \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)| dx$$

quindi $\|\psi\|_2 = 0$ in contrasto con l'ortonormalità. ■

Ricordando l'espressione delle derivate della trasformata di una funzione nell'origine, la (3.29) equivale a

$$\frac{d^l}{d\omega^l} \widehat{\psi}(0) = 0, \quad l = 0, \dots, m, \quad (3.30)$$

ossia 0 è radice di molteplicità $m + 1$ per $\widehat{\psi}$. Da questo, ricordando che per un sistema ortonormale

$$\widehat{\psi}(\omega) = \widehat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{i\omega/2} \overline{P\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}$$

e che, se ϕ genera una MRA allora $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ abbiamo che π è radice di molteplicità $m + 1$ di P . Ossia

Proposizione 3.14 *Sia*

$$\{\psi_{j,k}, j, k \in \mathbb{Z}\}$$

una base ortonormale di $L^2(\mathbb{R})$ associata ad una MRA. Se

$$|\phi(x)|, |\psi(x)| \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1+m+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0$$

e $\psi \in C^m$ con derivate limitate fino all'ordine m allora

$$P(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^{m+1} \mathcal{L}(\omega) \quad (3.31)$$

ove $\mathcal{L}$ è 2π -periodica e di classe C^m . ■

Capitolo 4

Costruzione di ϕ, ψ Daubechies

Vediamo come costruire ϕ che soddisfi le relazioni viste nei paragrafi precedenti in modo che

- generi una MRA
- le traslate intere siano un sistema ortonormale
- ϕ sia a supporto compatto
- ϕ abbia una regolarità prefissata.

La funzione ϕ sarà nota in caso sia nota la sua trasformata.

4.1 Costruzione trasformata di ϕ come prodotto infinito

Dalla relazione di scala, ricordando che $\widehat{\phi}(0) \neq 0$ (normalizzando $\widehat{\phi}(0) \neq 1$), risulta

$$\widehat{\phi}(\omega) = P(\omega/2)\widehat{\phi}(\omega/2) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^k P(\omega/2^j)\widehat{\phi}(\omega/2^k) = \prod_{j=1}^{\infty} P(\omega/2^j)$$

ammesso che il prodotto infinito converga. In particolare, noto $P(\omega)$ sarà nota $\widehat{\phi}(\omega)$. Abbiamo

Proposizione 4.1 Se $P(0) = 1$ e

$$\sum_n |np_n| < +\infty$$

allora

$$\prod_{j=1}^k P\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$$

converge per $k \rightarrow +\infty$

Dimostrazione

$$P(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n = 1$$

$$P(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n e^{-i\omega n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n p_n (e^{-i\omega n} - 1)$$

quindi essendo $|e^{-i\omega n} - 1| = 2 \operatorname{sen}(\omega n/2)$ risulta

$$|P(\omega) - 1| \leq 2/\sqrt{2} \sum_n |p_n| |\operatorname{sen}(\omega n/2)| \leq 2/\sqrt{2} |\omega/2| \sum_n |p_n| |n| \leq c|\omega|$$

da cui

$$|P(\omega)| \leq 1 + |P(\omega) - 1| \leq 1 + c|\omega| \leq e^{c|\omega|}$$

quindi

$$\left| \prod_{j=1}^k P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \leq \prod_{j=1}^k e^{c|\frac{\omega}{2^j}|} = e^{c|\omega| \sum_{j=1}^k 1/2^j} \leq e^{c|\omega|}$$

Abbiamo quindi che il prodotto finito è convergente, uniformemente sui compatti. ■

Per quanto riguarda la regolarità la condizione (3.31) è solo necessaria (come si può capire considerando la wavelet di Haar per la quale risulata $P(\omega) = \frac{1+e^{-i\omega}}{2}$ pur essendo ϕ, ψ discontinue).

Forniamo ora una condizione sufficiente per la regolarità.

Teorema 4.2 Sia $P(\omega) = \left[\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right]^N \mathcal{L}(\omega)$ dove

$$\mathcal{L}(\omega) = \sum_n l_n e^{-i\omega n}$$

se

$$P(0) = 1, \quad \sum_n |l_n| |n| < \infty$$

e

$$B < 2^{N-1-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad B := \sup_{\omega} |\mathcal{L}(\omega)|$$

allora

$$|\widehat{\phi}(\omega)| \leq \frac{1}{(1+|\omega|)^{1+\alpha+\epsilon}}, \quad \epsilon > 0.$$

Dimostrazione

Abbiamo

$$\frac{1 - e^{i\omega}}{i\omega} = \frac{1 - e^{i\omega/2}}{i\frac{\omega}{2}} \frac{1 + e^{i\omega/2}}{2} = \dots = \frac{1 - e^{i\omega/2^k}}{i\frac{\omega}{2^k}} \prod_{j=1}^k \frac{1 + e^{i\omega/2^j}}{2}$$

ossia

$$\frac{1 - e^{i\omega}}{i\omega} = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^k \frac{1 + e^{i\omega/2^j}}{2}$$

poichè $\frac{1 - e^{i\omega/2^k}}{i\omega/2^k}$ tende a 1 per $k \rightarrow \infty$. Quindi

$$\widehat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1 + e^{-i\omega/2^j}}{2} \right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) = \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega} \right)^N \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^j}\right).$$

Essendo

$$P(\omega) = \left[\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right]^N \mathcal{L}(\omega)$$

$P(0) = 1$ implica $\mathcal{L}(0) = 1$ ossia $\sum_n l_n = \sqrt{2}$ quindi, con gli stessi passaggi fatti per la convergenza del prodotto infinito, otteniamo

$$\left| \prod_{j=1}^k \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \leq e^{c|\omega|}, \quad \forall k$$

- Se $|\omega| \leq 1$ allora $\left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \leq c'$
- Se $|\omega| \geq 1$ allora $\exists J$ t.c. $2^{J-1} \leq |\omega| \leq 2^J$ e quindi $2(1 + |\omega|) \geq 2^J$ da cui

$$\begin{aligned} \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| &= \left| \prod_{j=1}^J \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^j}\right) \right| \left| \prod_{j=1}^{\infty} \mathcal{L}\left(\frac{\omega}{2^J 2^j}\right) \right| \\ &\leq c' B^J \leq c' (2^{N-1-\alpha-\epsilon})^J \leq c'' (1 + |\omega|)^{N-1-\alpha-\epsilon} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Osservazione 19 Ricordando la relazione fra decadimento di una funzione e regolarità della sua trasformata dal teorema abbiamo che

$$\phi \in C^{\alpha}.$$

Ricordiamo in proposito la seguente

Definizione 4.1 Sia $\alpha = n + \beta$, $n \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1)$ si dice che $f \in C^\alpha$ se f ha derivata di ordine n continua ed holderiana con esponente β ossia

$$|f^{(n)}(y) - f^{(n)}(x)| \leq C|x - y|^\beta.$$

Osservazione 20 Dal Teorema 4.2 abbiamo che per poter ottenere $\alpha > 0$ occorre

$$B := \sup_{\omega} |\mathcal{L}(\omega)| < 2^{N-1}.$$

Esempio 4.1 Per la MRA di Haar risulta

$$P(\omega) = \frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \mathcal{L}(\omega), \quad \mathcal{L}(\omega) = 1$$

quindi $N = 1$, $B = 1$ e le ipotesi del teorema 4.2 non sono verificate per nessun $\alpha > 0$.

4.2 Costruzione sequenza $\{p_n\}$

Finalmente vogliamo costruire una sequenza $\{p_n\}$ tale che la ϕ associata

- sia regolare
- sia a supporto compatto
- generi una MRA
- le sue traslate intere diano un sistema ortonormale

Condizione necessaria per avere regolarità C^{N-1} risulta (si veda 3.31)

$$P(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega), \quad \mathcal{L}(\omega) = \sum_n l_n e^{-i\omega n}.$$

Inoltre, volendo supporto compatto, deve risultare $l_n = 0$ tranne per un numero finito di indici, ossia, a meno di una traslazione di indici, $\mathcal{L}$ è un polinomio trigonometrico. Avremo

$$|P(\omega)|^2 = \left[\frac{1}{4}(1 + e^{-i\omega})(1 + e^{i\omega}) \right]^N |\mathcal{L}(\omega)|^2 = [\cos^2 \frac{\omega}{2}]^N |\mathcal{L}(\omega)|^2.$$

Assumendo $l_n \in \mathbb{R}$ abbiamo

$$\overline{\mathcal{L}}(\omega) = \mathcal{L}(-\omega)$$

quindi $|\mathcal{L}(\omega)|^2$ è un polinomio trigonometrico pari per cui si può esprimere in funzione di $\cos(\omega)$ o, equivalentemente di

$$\sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Posto

$$y := \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

avremo

$$|P(\omega)|^2 = y^N Q(1-y), \quad Q(1-y) = |\mathcal{L}(\omega)|^2.$$

Essendo

$$\cos^2\left(\frac{\omega + \pi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1-y$$

la relazione di ortonormalità diviene

$$1 = |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2 = y^N Q(1-y) + (1-y)^N Q(y). \quad (4.1)$$

resta quindi da determinare un polinomio $Q(y)$ che verifica la precedente condizione. Ricordando il Teorema di Bezuot, poiché y^N e $(1-y)^N$ non hanno zeri in comune, esiste unico polinomio Q di grado minore o uguale ad $N-1$ tale che la (4.1) è verificata. Per trovare l'espressione di tale polinomio osserviamo che

$$Q(y) = (1-y)^{-N} [1 - y^N Q(1-y)]$$

da cui, ricordando che

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \binom{\alpha}{k} := \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1) \frac{1}{k!}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ricaviamo

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k + y^N R(y).$$

Poiché deve esistere un'unica soluzione di grado non superiore a $N-1$ abbiamo che posto

$$Q(y) = Q_N(y) := \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k \quad (4.2)$$

questo polinomio verifica (4.1). Tutte le soluzioni¹ di (4.1) avranno quindi la forma

$$Q(y) = Q_N(y) + y^N R(y)$$

ove, affinché la (4.1) sia verificata occorre che $R(y) + R(1-y) = 0$. Abbiamo quindi mostrato la seguente.

¹di grado anche superiore a $N-1$

Proposizione 4.3 *Un polinomio trigonometrico a coefficienti reali della forma*

$$P(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^N \mathcal{L}(\omega) \quad (4.3)$$

verifica

$$1 = |P(\omega)|^2 + |P(\omega + \pi)|^2$$

se e solo se

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = Q(1 - y), \quad y := \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

con

$$Q(y) = Q_N(y) + y^N R(y),$$

ove

$$Q_N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N+k-1}{k} y^k, \quad R(y) + R(1-y) = 0$$

ed R tale che $Q(y) \geq 0$, $y \in [0, 1]$. ■

La proposizione precedente caratterizza completamente $|P(\omega)|^2$. Per ottenere ϕ e quindi anche ψ occorre però determinare un **polinomio trigonometrico a coefficienti reali** $\mathcal{L}(\omega)$ in modo che valga

$$|\mathcal{L}(\omega)|^2 = Q(1 - y), \quad y := \cos^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Ciò non è assolutamente evidente in quanto occorre “la radice quadrata” di Q . Vale in proposito il seguente Lemma di Riesz, o di *fattorizzazione spettrale*.

Lemma 4.4 *Sia A un polinomio trigonometrico positivo contenente solo coseni*

$$A(\xi) = \sum_{n=0}^M a_n \cos(n\xi), \quad a_n \in \mathbb{R}$$

allora esiste un polinomio trigonometrico B a coefficienti reali tale che

$$|B(\xi)|^2 = A(\xi).$$

Dimostrazione La dimostrazione è costruttiva. Le linee essenziali della dimostrazione (si veda anche [3], pg. 172) sono le seguenti. Essendo

$$A(\xi) = a_0 + \sum_{n=1}^M a_n \frac{(e^{i\xi} + e^{-i\xi n})}{2}$$

si considera il polinomio

$$P_A(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{M-1} a_{M-n} z^n + a_0 z^M + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M a_n z^{M+n}, \quad z := e^{i\omega}.$$

Risulta $A(\omega) = e^{-iM\omega} P_A(e^{i\omega})$. Si verifica che le radici di $P(z)$ sono della forma

$$r_k, \frac{1}{r_k}, \quad k = 1, \dots, K$$

se reali e della forma

$$z_j, \bar{z}_j, \frac{1}{z_j}, \frac{1}{\bar{z}_j}, \quad j = 1, \dots, J$$

se complesse. Inoltre, le eventuali radici sul cerchio unitario sono di molteplicità pari perché $A(\omega) \geq 0$.

Infine si osserva che, sul cerchio unitario,

$$|(e^{i\omega} - z_j)(e^{i\omega} - \bar{z}_j^{-1})| = |z_j|^{-1} |e^{i\omega} - z_j|^2.$$

quindi, essendo $A(\omega) \geq 0$

$$A(\omega) = |A(\omega)| = |P_A(e^{i\omega})| = |B(\omega)|^2$$

ove

$$B(\xi) = \left[\frac{|a_M|}{2} \prod_{k=1}^K \frac{1}{|r_k|} \prod_{j=1}^J \frac{1}{|z_j|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \prod_{k=1}^K (e^{i\xi} - r_k) \prod_{j=1}^J \left(e^{2i\xi} - 2e^{i\xi} \left(\frac{z_j + \bar{z}_j}{2} \right) + |z_j|^2 \right)$$

■

Esempio 4.2 Si consideri la costruzione precedente con $N = 2$

$$Q(y) = 1 + 2y \Rightarrow Q(1-y) = 3 - 2y = 3 - 2 \cos^2 \frac{\omega}{2} = 2 - \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}) = 2 - \cos(\omega)$$

quindi

$$P_A(z) = \frac{1}{2}(-1 + 4z - z^2) = 0, \quad z = 2 + \sqrt{3}, \quad z = 2 - \sqrt{3}.$$

Scegliendo la seconda radice si ha

$$\mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{2}[(1 + \sqrt{3})e^{-i\omega} + 1 - \sqrt{3}]$$

da cui

$$P(\omega) = \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^2 \mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n^3 p_n e^{-i\omega n},$$

$$p_0 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_3 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Scegliendo la radice $z = 2 + \sqrt{3}$ si ottiene invece la sequenza:

$$p_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \quad p_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}.$$

Per valutare la regolarità della ϕ risultante consideriamo il Teorema 4.2. Abbiamo

$$B := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\mathcal{L}(\omega)| = \sup_{y \in [0,1]} \sqrt{1 + 2y} = \sqrt{3}$$

quindi

$$\sqrt{3} < 2^{N-1-\alpha} = 2^{1-\alpha}, \quad \alpha \sim 0.207.$$

In base alla dimostrazione del Lemma di Riesz ed all'esempio precedente si possono fare alcune interessanti osservazioni

- Se $Q(y)$ ha grado M lo stesso accade per $\mathcal{L}(\omega)$, quindi da (4.3), i termini non nulli della sequenza $\{p_n\}$ sono

$$p_0, \dots, p_{N+M}.$$

Questo in particolare comporta che il supporto di ϕ sia $[0, M+N]$. Inoltre, fissato N , ossia il numero di momenti nulli, il minimo valore di M è dato da $N - 1$, che corrisponde al supporto

$$[0, 2N - 1].$$

L'esempio precedente fornisce quindi una funzione ϕ a supporto minimo con 2 momenti nulli.

- La scelta di M radici per descrivere B fra le $2M$ di P_A è libera. Scelte diverse forniscono sequenze, e quindi funzioni ϕ , diverse. Alcune diversità sono inessenziali (traslazioni, cambiamenti di segno) come accade per $N = 2$ per le due sequenze ottenute nell'esempio precedente. Nel caso $N > 2$ si possono però ottenere funzioni ϕ effettivamente diverse. La celebre famiglia ϕ_N (si veda [3], pg. 195) corrisponde alla scelta delle radici in questione nel cerchio unitario e produce funzioni di scala a supporto minimo rispetto al numero di momenti nulli².
- Una volta fissato il polinomio $Q(y)$, la regolarità della funzione ϕ determinata è fissata (indipendentemente dalla scelta delle radici di P_A). Per aumentare la regolarità, a parità di supporto, si può richiedere un

²in generale si hanno $2^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor - 1}$ scelte possibili. [3]

minor numero di momenti nulli e alterare la struttura di Q . Ad esempio, si veda [3], pg. 242., si può procedere come segue

$$Q(y) = Q_{N-1}(y) + y^{N-1}R(y)$$

e scegliere opportunamente R .

Per la famiglia ϕ_N di cui sopra, con numero massimo di momenti nulli rispetto al supporto e scelta delle radici di P_A nel cerchio unitario si può mostrare che

- ϕ_N è di classe $C^{\lambda N}$, $\lambda \sim .34$ per grandi valori di N . Quindi si può raggiungere con tale famiglia una regolarità arbitrariamente elevata, ma prefissata.
- Le wavelets associate alla funzioni ϕ_N

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \Delta_{\psi_N} \Delta_{\hat{\psi}_N}^+ = +\infty$$

Questa ultima proprietà è negativa in quanto indica che l'area "della finestra di osservazione" della trasformata wavelet associata diverge al crescere di N .

4.3 Approssimazione dei valori di ϕ

Data una funzione di scala (o raffinamento)

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n p_k \sqrt{2} \phi(2x - k)$$

che sia continua, se ne possono determinare i valori sugli interi osservando che

$$\phi(k) = 0, \quad k \neq 1, \dots, n-1$$

mentre, se ricordando che siamo interessati a ϕ t. c. $\sum_k \phi(x+k) = 1$, i valori non nulli sono soluzione del sistema lineare

$$\phi(l) = \sum_{k=0}^n p_k \sqrt{2} \phi(2l - k), \quad l = 1, \dots, n-1, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \phi(k) = 1.$$

Una volta ottenuti tali valori, la relazione di scala permette di calcolare per ricorrenza i valori di ϕ sui punti diadici. Ad esempio

$$\phi\left(\frac{l}{2}\right) = \sum_{k=0}^n p_k \sqrt{2} \phi(l - k), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Esiste tuttavia un'alternativa molto efficiente alla strategia precedente per approssimare i valori di ϕ sui diadici. Si consideri a riguardo la seguente

Proposizione 4.5 *Sia ϕ a supporto compatto $\hat{\phi}(0) = 1$, $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ ed f hölderiana di esponente $\alpha > 0$ allora*

$$|f(x) - 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) 2^{j/2} \overline{\phi(2^j y)} dy| \leq C 2^{-j\alpha}.$$

Dimostrazione

Essendo $\hat{\phi}(0) = 1$, assumendo che il supporto di ϕ sia contenuto in $[R, R]$, risulta

$$\begin{aligned} |f(x) - 2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) 2^{j/2} \overline{\phi(2^j y)} dy| &= |2^j \int_{\mathbb{R}} [f(x) - f(x+y)] \overline{\phi(2^j y)} dy| \leq \\ \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f(x+2^{-j}z)| |\overline{\phi(z)}| dz &\leq \|\phi\|_{L^1} \sup_{|u| \leq 2^{-j}R} |f(x) - f(x+u)| \leq C 2^{-j\alpha}. \blacksquare \end{aligned}$$

In base alla Proposizione i valori

$$2^{j/2} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) 2^{j/2} \overline{\phi(2^j y)} dy, \quad j > 0$$

forniscono una successione di approssimazioni di $f(x)$ che converge esponenzialmente rispetto a j , grazie al fattore $2^{-j\alpha}$, e tanto più velocemente quanto più α è elevato, ossia quanto più f è regolare. Ponendo $f = \phi$ e $x = \frac{k}{2^n}$ e notando che

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x+y) 2^{j/2} \overline{\phi(2^j y)} dy = \langle \phi, \phi_{j,k2^{j-n}} \rangle$$

la Proposizione precedente permette di approssimare i valori di ϕ sui diadici. Infatti

$$\langle \phi, \phi_{j,k2^{j-n}} \rangle$$

sono i coefficienti della rappresentazione di ϕ in V_j . Inoltre, tenendo conto che ϕ è ortogonale ad ogni W_j , $j \geq 0$ e che

$$\langle \phi, \phi_{0,k} \rangle = \delta_{0,k},$$

dall'algoritmo di ricostruzione si ha

$$2^{(j+1)/2} \langle \phi, \phi_{j+1,n} \rangle = 2^{(j+1)/2} \sum_l \langle \phi, \phi_{j,l} \rangle p_{n-2l}. \quad (4.4)$$

Ne segue che i valori di ϕ sui diadici possono essere approssimati molto velocemente tramite successive applicazioni dell'algoritmo di ricostruzione, che risulta semplificato poiché i prodotti

$$\langle \phi, \psi_{j,l} \rangle, \quad j \geq 0$$

risultano nulli³.

³Nell'ambito della teoria dell'approssimazione l'algoritmo risultante prende il nome di algoritmo di **suddivisione**. In tale contesto il fattore $\sqrt{2}$ è generalmente inglobato nella sequenza $\{p_n\}$, quindi la relazione di scala (o raffinamento) prende la forma

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^n \tilde{p}_k \phi(2x - k), \quad \tilde{p}_k := p_k \sqrt{2}.$$

La nuova sequenza $\{\tilde{p}_n\}$ viene generalmente detta **maschera** e la (4.4) diviene

$$2^{(j+1)/2} \langle \phi, \phi_{j+1,n} \rangle = \sum_l 2^{j/2} \langle \phi, \phi_{j,l} \rangle \tilde{p}_{n-2l}.$$

Ossia un algoritmo di suddivisione descritto da una maschera $\{\tilde{p}_n\}$ ha la forma

$$F_{j+1,n} = \sum_l F_{j,l} \tilde{p}_{n-2l}.$$

Gli algoritmi di suddivisione sono una delle tecniche più efficienti per generare curve (e superfici nella loro estensione bivariata) e sono molto affermati soprattutto nel campo della grafica computerizzata.

Bibliografia

TESTI DI RIFERIMENTO

- [1] C.K. Chui : *An Introduction to wavelets*, Academic Press, 1992
- [2] C.K. Chui: *Wavelets a mathematical tool for signal analysis*, SIAM 1997
- [3] I. Daubechies: *Ten lectures on wavelets*, SIAM 1992

TESTI DI CONSULTAZIONE

- [4] P. Wojtaszczyk: *A mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, 1999.
- [5] S. Mallat: *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press 1998.
- [6] E. Hernández G. Weiss: S. *A first course on wavelets* , CRC Press 1996.

SOFTWARE DIDATTICO

- [7] ftp server: `ftp.tsc.uvigo.es` under directory `/pub/Uvi_Wave/matlab`