CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in INFORMATICA

Prof. Francesca PELOSI / Dr. Carlo GARONI

18 Dicembre 2019

Esercizio 1. Dati i numeri reali

$$x = \frac{1}{5}, \quad y = \frac{1}{40}, \quad z = \frac{1}{80};$$

- (a) determinare le rappresentazioni $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ e $\tilde{z}$ di x , y e z in $\mathcal{F}(2; 3; -6; 6)$ in cui si operi con troncamento.
- (b) Calcolare gli errori relativi di rappresentazione per x , y e z e confrontarli con la precisione di macchina.
- (c) Calcolare il valore delle espressioni $(\tilde{x} \oplus \tilde{y}) \oplus \tilde{z}$ e $\tilde{x} \oplus (\tilde{y} \oplus \tilde{z})$, determinare l'errore relativo di ciascun risultato rispetto a $x + y + z$ e commentare il risultato.

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(x) = x \log x - 2$.

- (a) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$.
- (b) Studiare la convergenza del metodo di Newton applicato a $f(x) = 0$, determinando eventualmente anche l'ordine di convergenza.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & \alpha \\ 3 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

dove α è un numero reale assegnato.

- (a) Determinare per quali valori di α la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LU .
- (b) Per i valori di α determinati al punto sopra, calcolare la fattorizzazione LU di A .
- (c) Calcolare $\det(A)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
- (d) Stabilire per quali valori di α la matrice A è invertibile.
- (e) Per $\alpha = 0$ calcolare il condizionamento in norma infinito ($\mu_\infty(A)$).

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha > 0, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Nel caso $\alpha = 3$, dire se i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel applicati al sistema dato convergono.
- (b) Determinare per quali valori di α il metodo iterativo di Jacobi applicato al sistema dato converge.
- (c) Determinare per quali valori di α il metodo iterativo di Gauss-Seidel applicato al sistema dato converge. Confrontare la risposta con i valori del punto precedente.
- (d) Nel caso $\alpha = 2$ effettuare 3 passi del metodo iterativo di Gauss-Seidel partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 1, 1]^T$. Commentare i risultati ottenuti confrontando l'approssimazione $\mathbf{x}^{(3)}$ con la soluzione esatta del sistema.