CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in INFORMATICA

Prof. Francesca PELOSI / Dr. Carlo GARONI

20 Febbraio 2020

Esercizio 1. [pt: = 2+4+4=10]

Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & \alpha & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha - 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Stabilire per quali valori di α la matrice A ammette un'unica fattorizzazione LU .
- Nel caso $\alpha = 0$ calcolare esplicitamente la fattorizzazione LU della matrice A .
- Nel caso $\alpha = 0$, rappresentare gli elementi di U nell'insieme di numeri macchina $\mathcal{F}(2, 3, -3, 3)$ in cui si opera per troncamento. Calcolare gli errori relativi di rappresentazione e confrontarli con la precisione di macchina.

Esercizio 2. [pt: = 1+3+3+1=8]

Si consideri la funzione $f(x) = x - \cos(x)$, $x \in [0, 1]$.

- Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = 0$ per $x \in [0, 1]$.
- Studiare la convergenza del metodo di Newton applicato a $f(x) = 0$ determinandone eventualmente l'ordine.
- Sia $g(x) = \cos(x)$. Mostare che $g(x) = x$ è equivalente a $f(x) = 0$ per $x \in [0, 1]$ e studiare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$.
- Quale dei due metodi analizzati conviene utilizzare? Motivare la risposta.

Esercizio 3. [pt: = 3+3+3=9]

Si consideri la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

- Si dimostri, senza calcolare lo spettro, che gli autovalori della matrice A sono tutti reali e positivi e darne una localizzazione.
- Studiare la convergenza del metodo iterativo di Jacobi e del metodo iterativo di Gauss-Seidel applicati al sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $\mathbf{b} = [2, 0, 1]^T$.
- Con entrambi i metodi iterativi, effettuare 3 passi partendo dal vettore $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0]^T$. Commentare i risultati ottenuti confrontando le approssimazioni finali con la soluzione esatta del sistema.

Esercizio 4. [pt: = 1+3+2=5]

Assegnati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2$, con

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = 1, \quad f(x) = \sin(2\pi x).$$

- Disegnare il grafico di $f(x)$ e determinare se possibile il polinomio $p(x)$ che interpola i dati.
- Determinare se possibile il polinomio $q(x)$ che interpola i dati assegnati e l'ulteriore coppia $(x_3, f(x_3))$ con $x_3 = \frac{3}{4}$.