CALCOLO NUMERICO

Corso di Laurea in INFORMATICA

Prof. Francesca PELOSI / Dr. Carlo GARONI

04 Febbraio 2020

Esercizio 1. Data la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta \in \mathbb{R}$$

- (a) determinare, se possibile, la fattorizzazione LU della matrice.
- (b) Nel caso $\beta = \frac{1}{9}$, rappresentare gli elementi di L e U nell'insieme di numeri macchina $\mathcal{F}(2, 4, -5, 5)$ in cui si opera per troncamento e commentare il risultato ottenuto.
- (c) Nel caso $\beta = -1$, operando in precisione infinita, analizzare il problema dell'esistenza ed unicità della fattorizzazione LU .

Esercizio 2. Si consideri la funzione $g(x) = (2 - x)hx^2$, $h > 0$. Analizzare la convergenza del metodo iterativo $x_{i+1} = g(x_i)$, discutendone eventualmente anche l'ordine di convergenza nei casi $h = \frac{1}{2}$ e $h = 1$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ definita come segue

$$A = \begin{cases} 2(-1)^i, & \text{se } i = j, \\ \alpha & \text{se } |i - j| = 1 \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases} \quad \alpha \in [0, 1)$$

- (a) scrivere esplicitamente A e stabilire per quali valori di α è a diagonale dominante in senso forte.
- (b) Determinare per quali valori di α il metodo iterativo di Gauss Seidel applicato al sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ converge.
- (c) Calcolare se possibile il condizionamento $\mu_2(A)$.

Esercizio 4. Assegnati i punti $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$, con

$$x_i = i - 1, \quad f(x) = \max(0, 2x).$$

- (a) Disegnare il grafico di $f(x)$.
- (b) Nel caso $n = 2$, determinare se possibile il polinomio $p(x)$ che li interpola nella forma di Lagrange e nella forma di Newton e calcolare $\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p(x)|$.
- (c) Calcolare sfruttando i calcoli fatti nei punti precedenti il polinomio interpolante i punti dati nel caso $n = 3$.