IX Tutorato 4 Dicembre 2014

- Determinare le derivate prime delle seguenti funzioni:

  1. $$f(x) = (x^2+1)^{10000}$$

  2. $$f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$$

  3. $$f(x) = x^2 \sin(2x)$$

  4. $$f(x) = \frac{\sin(xe^{3^x})}{x^3+x}$$

  5. $$f(x) = \cos\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right)$$

  6. $$f(x) = x^3 \arctan\left(\frac{x^5 e^x + 3}{\ln(x^2+x)+1}\right)$$

- Determinare gli intervalli di crescenza e la concavitá della funzione

$$f(x) = x^2 e^x$$

- Studiare la continuitá della funzione $f(x) = [x^2]$.

Soluzioni

- Derivate:

  1. La funzione
  $$f(x) = (x^2+1)^{10000}$$
  si deriva utilizzando le regole di derivazione per la funzione composta $(g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ dove in questo caso si ha $h(x) = x^2+1$ e $g(x) = x^{10000}$. Si ha allora
  $$f'(x) = 10000(x^2+1)^{10000-1} \cdot (2x) = 20000x(x^2+1)^{9999}$$

  2. Si riscrive la funzione
  $$f(x) = \sqrt[3]{3x+1}$$
  come $f(x) = (3x+1)^{\frac{1}{3}}$ e si deriva come nel caso precedente
  $$f'(x) = \frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{1}{3}-1} \cdot (3) = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+1)^2}}.$$

  3. Per la funzione
  $$f(x) = x^2 \sin(2x)$$
  occorre usare anche la regola di derivazione del prodotto, che si ricorda essere $(g(x) \cdot h(x))' = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$. In queso caso si ha $g(x) = x^2$ e $h(x) = \sin(2x)$, si osserva inoltre che per derivare la funzione h occorre usare la regola di derivazione della funzione composta. Si ha quindi
  $$f'(x) = 2x \cdot \sin(2x) + x^2 \cdot \cos(2x) \cdot (2) = 2x(\sin(2x) + x\cos(2x)).$$

  4. Per la funzione
  $$f(x) = \frac{\sin(xe^{3^x})}{x^3+x}$$
  occorre usare anche la regola di derivazione del quoziente, che si ricorda essere $\left(\frac{g(x)}{h(x)}\right)' = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$. In queso caso si ha $g(x) = \sin(xe^{3^x})$ e $h(x) = x^3+x$, si osserva inoltre che

per derivare la funzione g occorre usare la regola di derivazione della funzione composta. Si ha quindi

$$f'(x) = \frac{\cos(xe^{3^x})\left(xe^{3^x}\right)' \cdot (x^3+x) - \sin(xe^{3^x}) \cdot (3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$$

Per semplicitá si studia separatamente la derivata della funzione xe^{3^x}.

$$\left(xe^{3^x}\right)' = 1 \cdot e^{3^x} + xe^{3^x} \cdot (3^x)' = e^{3^x} + xe^{3^x} \cdot (e^{x\ln 3})' =$$

$$= e^{3^x} + xe^{3^x} \cdot \ln 3 e^{x\ln 3} = e^{3^x} + xe^{3^x} \cdot 3^x \ln 3 = e^{3^x}\left(1 + x3^x \ln 3\right)$$

da cui

$$f'(x) = \frac{\cos(xe^{3^x})e^{3^x}\left(1 + x3^x \ln 3\right) \cdot (x^3+x) - \sin(xe^{3^x}) \cdot (3x^2+1)}{(x^3+x)^2}$$

5. Data la funzione

$$f(x) = \cos\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right)$$

sfruttando tutte le regole viste in precedenza si ottiene

$$f'(x) = -\sin\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right) \cdot \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right)' =$$

$$= -\sin\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right) \cdot \left(2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) + x^2 \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)\right)'\right) =$$

$$= -\sin\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right) \cdot \left(2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) \cdot \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)'\right) =$$

$$= -\sin\left(x^2 \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) - 2\right) \cdot \left(2x \cdot \sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{\ln(x)}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x\left(\ln(x)\right)^2}\right)\right).$$

6. Data la funzione

$$f(x) = x^3 \arctan\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right)$$

sfruttando tutte le regole viste in precedenza si ottiene

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \arctan\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right) + x^3 \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right)' =$$

$$= 3x^2 \cdot \arctan\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right) +$$

$$+x^3 \cdot \frac{(\ln(x^2+x)+1)^2}{(\ln(x^2+x)+1)^2+(x^5e^x+3)^2} \cdot \left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right)'$$

Per comoditá si studia separatamente la derivata di $\dfrac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}$
e si ottiene

$$\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right)' = \frac{(x^5e^x+3)' \cdot (\ln(x^2+x)+1) - (x^5e^x+3) \cdot (\ln(x^2+x)+1)'}{(\ln(x^2+x)+1)^2} =$$

$$= \frac{(5x^4+x^5)e^x \cdot (\ln(x^2+x)+1) - (x^5e^x+3) \cdot \frac{2x+1}{x^2+x}}{(\ln(x^2+x)+1)^2} =$$

$$= \frac{(5x^4+x^5)e^x \cdot (\ln(x^2+x)+1) \cdot (x^2+x) - (x^5e^x+3) \cdot (2x+1)}{(\ln(x^2+x)+1)^2 \cdot (x^2+x)}$$

Da cui

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \arctan\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right) +$$

$$+x^3 \cdot \frac{(\ln(x^2+x)+1)^2}{(\ln(x^2+x)+1)^2+(x^5e^x+3)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{(5x^4+x^5)e^x \cdot (\ln(x^2+x)+1) \cdot (x^2+x) - (x^5e^x+3) \cdot (2x+1)}{(\ln(x^2+x)+1)^2 \cdot (x^2+x)} =$$

$$= 3x^2 \cdot \arctan\left(\frac{x^5e^x+3}{\ln(x^2+x)+1}\right) +$$

$$+x^3 \cdot \frac{(5x^4+x^5)e^x \cdot (\ln(x^2+x)+1)\cdot(x^2+x) - (x^5e^x+3)\cdot(2x+1)}{\left((\ln(x^2+x)+1)^2 + (x^5e^x+3)^2\right)\cdot(x^2+x)}.$$

- Si consideri la funzione $f(x) = x^2e^x$. Si osserva che tale funzione é sempre non negativa, inoltre diverge a piú infinito e tende a 0 a meno infinito.
  Si determina la sua derivata prima
  $$f'(x) = (2x+x^2)\cdot e^x$$
  e si studia il segno della derivata prima
  $$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -2 \vee x \geq 0$$
  poiché la funzione e^x è sempre positiva.
  Quindi la derivata prima è positiva prima di -2 e dopo lo 0, allora nell'intervallo $(-\infty, -2]$ la funzione f è crescente, nell'intervallo $[-2, 0]$ è decrescente e in $[0, +\infty)$ è crescente. La funzione f ha, quindi, un massimo relativo in $x = -2$ in cui vale $f(-2) = \frac{4}{e^2}$ e un minimo in $x = 0$ in cui la funzione vale $f(0) = 0$.
  Per studiare la concavitá della funzione si determina la sua derivata seconda
  $$f''(x) = (x^2+4x+2)\cdot e^x.$$
  Dallo studio del suo segno si ha
  $$f''(x) \geq 0 \iff x \leq -2-\sqrt{2} \vee x \geq -2+\sqrt{2}$$
  ovvero la funzione è convessa nell'intervallo $(-\infty, -2-\sqrt{2}]$, è concava in $[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}]$ e convessa in $[-2+\sqrt{2}, +\infty)$.

- Si consideri la funzione $f(x) = [x^2]$.
  Se x^2 è compreso tra due interi successivi tale funzione è continua perché ivi costante, ma, preso $n \in \mathbb{N}$ si ha
  $$n < x^2 < n+1 \iff -\sqrt{n+1} < x < -\sqrt{n} \vee \sqrt{n} < x < \sqrt{n+1}$$

Si fissa x_0 tale che $x_0^2 = n$.
Si considera $x_0 > 0$, cioè $x_0 = +\sqrt{n}$ e si calcolano i limiti destro e sinistro di x_0. Poiché $f_{|_{\left(\sqrt{n},\sqrt{n+1}\right)}} = n$ e $f_{|_{\left(\sqrt{n-1},\sqrt{n}\right)}} = n-1$ si ha

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} n = n$$

mentre

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} n - 1 = n - 1$$

Con un discorso analogo, si considera $x_0 < 0$, cioè $x_0 = -\sqrt{n}$. Si ha

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} n - 1 = n - 1$$

mentre

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} n = n$$

Nel caso in cui $x_0 = 0$, poiché per ogni $x \in (-1, 1)$ vale $0 \leq x^2 < 1$, si ha $f_{|_{(-1,1)}} = 0$. Quindi

$$f(0) = 0 = \lim_{x \to 0} f(x)$$

In definitiva la funzione f è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \cup \{0\}$.