Soluzione del terzo esonero 2019/20 S.T.M.

Scrivo le soluzioni del primo esercizio di uno dei due compiti, e del secondo e del terzo dell'altro.

1a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = \sqrt[4]{e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5}$.

Soluzione. Intanto troviamo il dominio (non ha senso dire se una funzione è crescente dove NON esiste). Dobbiamo imporre $e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5 \geq 0$ (dato che abbiamo una radice di indice pari). Sostituendo $t = e^{x^2}$ si ha $t^2 - 6t + 5 \geq 0$, ossia $t \geq 5$ o $t \leq 1$; quindi si ha o $e^{x^2} \geq 5 \iff e^{x^2} \geq e^{\ln(5)} \iff x^2 \geq \ln(5) \iff x \geq \sqrt{\ln(5)} \vee x \leq -\sqrt{\ln(5)}$ oppure $e^{x^2} \leq 1 \iff e^{x^2} \leq e^0 \iff x^2 \leq 0 \iff x = 0$. In conclusione ilo dominio è dato da $\quad \big] -\infty, -\sqrt{\ln(5)}\big] \cup \{0\} \cup \big[\sqrt{\ln(5)}, +\infty\big[$.

Ora, per trovare gli intervalli di crescenza e decrescenza, studio il segno della derivata di f. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{4}\big(e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5\big)^{-\frac{3}{4}} D(e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5) =$$

$$\frac{1}{4}\big(e^{2x^2} - 6e^{x^2} + 5\big)^{-\frac{3}{4}}\big(4xe^{2x^2} - 12xe^{x^2}\big).$$

Negli intervalli aperti del dominio della funzione il primo fattore è sempre positivo (Nota: nei punti estremi degli intervalli che definiscono il dominio della funzione, la f non è nemmeno derivabile, e infatti si vede che nella formula precedente si avrebbee $0^{-\frac{3}{4}}$ che non è definito). Quindi il segno della derivata è dato solo dal segno del secondo fattore ossia $4xe^{2x^2} - 12xe^{x^2}$. Si ha

$$4xe^{2x^2} - 12xe^{x^2} = 4xe^{x^2}(e^{x^2} - 3)$$

quindi studiamo i tre fattori separatamente. Si ha $4x > 0 \iff x > 0$, $\;e^{x^2} > 0$ sempre,

$$e^{x^2} - 3 > 0 \iff e^{x^2} > 3 \iff e^{x^2} > e^{\ln(3)}$$

$$\iff x^2 > \ln(3) \iff x > \sqrt{\ln(3)} \vee x < -\sqrt{\ln(3)}.$$

Ora, facendo il prodotto dei segni di questi tre fattori, e togliendo i pezzi dove la funzione non esiste (ossia fuori del suo dominio) si ottiene che $f' < 0$ su $] -\infty, -\sqrt{\ln(5)}[$ e $f' > 0$ su $]\sqrt{\ln(5)}, +\infty[$. Quindi f è strettamente decrescente in $] -\infty, -\sqrt{\ln(5)}]$ e strettamente crescente in $[\sqrt{\ln(5)}, +\infty[$.

1b) Provare che se u è una funzione continua da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $u(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ allora l'equazione

$$\sin\big(u(x)\big) = 0 \tag{1}$$

ha infinite soluzioni (provare almeno che ne ha almeno una).

Soluzione. Dalle ipotesi, fissato un numero intero k, si ha che esiste un punto $x_{1,k} \in \mathbf{R}$ tale che $u(x_{1,k}) > k\pi$ (dato che $u(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$) ed esiste un punto $x_{2,k} \in \mathbf{R}$ tale che $u(x_{2,k}) < k\pi$ (dato che $u(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$). Poiché u è continua per il teorema dei valori intermedi esiste un punto x_k tale che $u(x_k) = k\pi$. Ovviamente si ha che $\sin\big(u(x_k)\big) = 0$ e gli x_k sono tutti diversi tra loro, quindi effettivamente l'equazione (1) ha infinite soluzioni.

1c) Provare che se g è una funzione derivabile da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$, allora l'equazione

$$g'(x)\sin(x) + g(x)\cos(x) = 0 \tag{2}$$

ha infinite soluzioni.

Soluzione. Notiamo che $g'(x)\sin(x) + g(x)\cos(x) = w'(x)$ ove $w(x) = g(x)\sin(x)$. Poiché per ogni numero intero k ovviamente si ha $w(k\pi) = 0 = w\big((k+1)\pi\big)$, per il teorema di Rolle, applicato all'intervallo $\big[k\pi, (k+1)\pi\big]$ esiste un $y_k \in \big]k\pi, (k+1)\pi\big[$ tale che $w'(y_k) = 0$. Dato che al variare di k nei numeri interi, gli intervalli $\big]k\pi, (k+1)\pi\big[$ sono a due a due disgiunti, gli y_k sono tutti diversi tra di loro e sono soluzioni dell'equazione (2), che ha quindi infinite soluzioni.

2) Calcolare, se esiste, al variare di $a \in \mathbf{R}$, il limite

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^a \ln\big(1+\sin(x^2)\big)}{x^3\sin(x) - 2x^2e^{x^2} + 2x^2}.$$

Soluzione. Uso la formula di Taylor. In questo caso specifico, in realtà non sarebbe necessaria e basterebbe invece usare i limiti notevoli. Voglio però fare capire il metodo generale. Si ha

$$\ln\big(1+\sin(x^2)\big) = \frac{\ln\big(1+\sin(x^2)\big)}{\sin(x^2)}\ \frac{\sin(x^2)}{x^2}\ x^2.$$

Ora $\frac{\ln\left(1+\sin(x^2)\right)}{\sin(x^2)} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ dato che, col cambio di variabile $\sin(x^2) = y \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ ci si riconduce al limite notevole $\frac{\ln(1+y)}{y} \underset{y\to0}{\longrightarrow} 1$. Allo stesso modo $\frac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$ dato che col cambio di variabile $x^2 = y$ ci si riconduce al limite notevole $\frac{\sin(y)}{y} \underset{y\to0}{\longrightarrow} 1$. In conclusione, possiamo riscrivere il limite da calcolare come

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^a x^2}{x^3\sin(x) - 2x^2e^{x^2} + 2x^2}\ \gamma(x).$$

ove $\gamma(x) = \dfrac{\ln\big(1+\sin(x^2)\big)}{\sin(x^2)}\ \dfrac{\sin(x^2)}{x^2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 1$. Usiamo ora la formula di Taylor. Si ha

$$\sin(x) = x + x\alpha_1(x),$$

$$e^y = 1 + y + y\alpha_2(y),$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + x^2\alpha_2(x^2),$$

ove α_1 e α_2 sono funzioni, continue in 0 e che valgono 0 in 0. Riscriviamo quindi il nostro limite come

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{a+2}}{x^3\big(x + x\alpha_1(x)\big) - 2x^2\big(1 + x^2 + x^2\alpha_2(x^2)\big) + 2x^2}\ \gamma(x) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{a+2}}{x^4\big(1 + \alpha_1(x) - 2 - 2\alpha_2(x^2)\big)}\ \gamma(x) \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{a-2}}{r(x)}\ \gamma(x).
\end{aligned}$$

ove $r(x) = 1 + \alpha_1(x) - 2 - 2\alpha_2(x^2) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -1$. In conclusione il limite dato vale 0 se $a > 2$, vale -1 se $a = 2$, vale $-\infty$ se $a < 2$.

3) Calcolare 'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{(5x+2)^{\sqrt{5}}}{(10x+4)^{\sqrt{7}}} + \frac{e^{3x}}{e^{2x}+16}\Big)\, dx.$$

Soluzione. L'integrale da calcolare equivale a

$$\int \frac{(5x+2)^{\sqrt{5}}}{(10x+4)^{\sqrt{7}}}\, dx + \int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+16}\, dx.$$

Calcoliamo quindi separatamente i due integrali. si ha

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(5x+2)^{\sqrt{5}}}{(10x+4)^{\sqrt{7}}}\, dx = \int \frac{(5x+2)^{\sqrt{5}}}{\big(2(5x+2)\big)^{\sqrt{7}}}\, dx \\
&= \frac{1}{2^{\sqrt{7}}} \int \frac{(5x+2)^{\sqrt{5}}}{(5x+2)^{\sqrt{7}}}\, dx = \frac{1}{2^{\sqrt{7}}} \int (5x+2)^{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\, dx \\
&= \frac{1}{5\cdot 2^{\sqrt{7}}} \int (5x+2)^{\sqrt{5}-\sqrt{7}} \cdot 5\, dx \\
&= \frac{1}{5\cdot 2^{\sqrt{7}}} \int y^{\sqrt{5}-\sqrt{7}} dy, \quad (y = 5x+2) \\
&= \frac{1}{5\cdot 2^{\sqrt{7}}} \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}+1} y^{\sqrt{5}-\sqrt{7}+1} + c, \quad (y = 5x+2) \\
&\frac{1}{5\cdot 2^{\sqrt{7}}} \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}+1} (5x+2)^{\sqrt{5}-\sqrt{7}+1} + c
\end{aligned}$$

Ora calcoliamo l'altro integrale. Si ha

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+16}\,dx &= \int \frac{(e^x)^2}{(e^x)^2+16} e^x\,dx \\
&= \int \frac{y^2}{y^2+16}\,dy, \quad (y = e^x) \\
&= \int \left(1 - \frac{16}{y^2+16}\right) dy, \quad (y = e^x) \\
&= \int 1\,dy - \int \frac{16}{y^2+16}\,dy, \quad (y = e^x)
\end{aligned}
$$

Ora, dato che $\int 1\,dy = y + c$, rimane da calcolare il secondo integrale. Si ha

$$
\begin{aligned}
\int \frac{16}{y^2+16}\,dy &= \int \frac{1}{\left(\frac{y}{4}\right)^2+1}\,dy \\
&= 4\int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{y}{4}\right)^2+1}\,dy \\
&= 4\int \frac{1}{z^2+1}\,dz, \quad (z = \frac{y}{4}) \\
&= 4\arctan(z) + c, \quad (z = \frac{y}{4}) \\
&= 4\arctan\left(\frac{y}{4}\right) + c.
\end{aligned}
$$

Ovviamente, trovato il risultato, bisogna sostituire y con e^x.