Soluzione del primo scritto 2019/20 S.T.M.

Scrivo le soluzioni di uno dei due compiti. Su qualche punto la soluzione è solo accennata.

1a) Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza della funzione f definita da $f(x) = e^{\frac{1}{2x+3}} - 5e^{\frac{2}{2x+3}}$.
Soluzione. Il dominio9 della funzione è $\mathbf{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$. Calcoliamo la derivata. Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{2x+3}} \cdot \Big(\frac{1}{2x+3}\Big)' - 5e^{\frac{2}{2x+3}} \cdot \Big(\frac{2}{2x+3}\Big)' \\ &= e^{\frac{1}{2x+3}} \cdot \frac{-2}{(2x+3)^2} \; - 5e^{\frac{2}{2x+3}} \cdot \frac{-4}{(2x+3)^2} \\ &= e^{\frac{1}{2x+3}} \frac{2}{(2x+3)^2} \Big(-1 + 10\, e^{\frac{1}{2x+3}} \Big). \end{aligned}$$

Dato che i primi due fattori sono sempre positivi nel dominio di f, il segno della funzione sarà il segno del terzo fattore. Dunque

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -1 + 10\, e^{\frac{1}{2x+3}} > 0 \\ &\iff 10\, e^{\frac{1}{2x+3}} > 1 \iff e^{\frac{1}{2x+3}} > \frac{1}{10} \\ &\iff e^{\frac{1}{2x+3}} > e^{\ln\left(\frac{1}{10}\right)} \iff \frac{1}{2x+3} > \ln\Big(\frac{1}{10}\Big) = -\ln(10) \\ &\iff \frac{1}{2x+3} + \ln(10) > 0 \iff \frac{1 + (2x+3)\ln(10)}{2x+3} > 0. \end{aligned}$$

NOTA BENE. Nel passaggio dalla terza alla quarta riga bisogna evitare la tentazione di "semplificare" moltiplicando per $2x+3$ dato che nelle disuguaglianze non si può moltiplicare meccanicamente se non si controlla il segno dell'oggetto per cui moltiplichiamo (in questo caso $2x+3$). Ora studiamo il segno di numeratore e di denominatore.

$$1 + (2x+3)\ln(10) > 0 \iff 2\ln(10)x > -\big(1 + 3\ln(10)\big) \iff x > -\frac{1 + 3\ln(10)}{2\ln(10)}.$$

Osservo che qui abbiamo diviso per $2\ln(10)$ nel passaggio tra la seconda e la terza disuguaglianza; questo era lecito (mantenendo il verso della disuguaglianza) dato che il fattore per cui abbiamo diviso $\big($ossia $2\ln(10)\big)$ è positivo.

$$2x + 3 > 0 \iff x > -\frac{3}{2}.$$

Poniamo $x_1 := -\dfrac{1 + 3\ln(10)}{2\ln(10)}$ e notiamo che $x_1 < -\frac{3}{2}$. Riassumo il seguito. Facendo il prodotto dei segni si trova il segno della derivata f' e si trova che f è strettamente crescente in $]-\infty, x_1]$, strettamente decrescente in $[x_1, -\frac{3}{2}[$, strettamente crescente in $]-\frac{3}{2}, +\infty[$.

1b) Calcolare il limite $\lim_{x\to x_o} f(x)$ al variare di $x_0 \in \overline{\mathbf{R}}$.

Soluzione. Notiamo che $\frac{1}{2x+3} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si deduce facilmente che $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 - 5\cdot e^0 = -4$. Analogamente $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} e^0 - 5\cdot e^0 = -4$. Dato che si vede facilmente che f è continua nel suo dominio, ossia $\mathbf{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$, si ricava subito che $f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} f(x_0)$ per ogni $x \in \mathbf{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$. Rimane da trovare il limite $\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)$. Tale limite non esiste dato che il limite destro è diverso dal limite sinistro. Infatti, si ha $\frac{1}{2x+3} \underset{x\to-\frac{3}{2}^+}{\longrightarrow} +\infty$ e $\frac{1}{2x+3} \underset{x\to-\frac{3}{2}^-}{\longrightarrow} -\infty$ poiché $2x+3 \underset{x\to-\frac{3}{2}}{\longrightarrow} 0$ e $2x+3>0$ per $x>-\frac{3}{2}$, mentre $2x+3<0$ per $x<-\frac{3}{2}$. Allora dato che $e^y \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, si ha $f(x) \underset{x\to-\frac{3}{2}^-}{\longrightarrow} 0-5\cdot 0 = 0$. Invece per il limite destro, ragionando allo stesso modo, si trova che viene una coram indeterminata del tipo $+\infty-(+\infty)$, che si scioglie facendo

$$f(x) = e^{\frac{1}{2x+3}} - 5e^{\frac{2}{2x+3}} = e^{\frac{2}{2x+3}}\Big(-5+e^{-\frac{1}{2x+3}}\Big) \underset{x\to-\frac{3}{2}^+}{\longrightarrow} (+\infty)\cdot(-5) = -\infty.$$

Nota: L'espressione $(+\infty)\cdot(-5) = -\infty$ ha senso solo nel linguaggio dei limiti, ossia vuol dire che il prodotto di un oggetto che tende a $+\infty$ per un altro che tende a -5 tende a $-\infty$.

1c) Provare che se g è una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ limitata tale che non esiste $\lim_{x\to+\infty} g(x)$, allora esiste una successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tale che non esiste $\lim_{n\to+\infty} g(x)_n$.

Soluzione. Per il teorema ponte non è vero che esiste $l \in \mathbf{R}$ tale che $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ per ogni successione $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Dobbiamo ancora escludere che esista il limite $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$ per ogni $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, potendo però tale limite dipendere dalla successione x_n. Vediamo che effettivamente non è possibile che per ogni $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ esista il limite $\lim_{n\to+\infty} g(x_n)$ (tale limite per forza sarebbe un numero reale essendo g limitata). In tal caso infatti, per quanto detto all'inizio ci sarebbero due successioni $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e $y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ tali che $g(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ e $g(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l'$ con $l \neq l'$. Sia z_n la successione $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, ...)$ data da $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, ...)$. Allora si vede facilmente che $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ma non esiste $\lim_{n\to+\infty} g(z_n)$ dato che le due sottosuccessioni $g(z_{2n}) = g(y_n)$ e $g(z_{2n-1}) = g(x_n)$ tendono a limiti diversi.

2a) Dire per quali numeri reali $a>0$ converge la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Bigg(\frac{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n+1}}{\frac{n^{10}}{n^a+1}} + \frac{n^{10}\big((a-2)^n+n\big)}{(n+4)!}\Bigg)$$

Soluzione (Cenno). Studiamo separatamente le due serie. Si vede, usando il criterio del confronto asintotico, che la prima ha lo stesso carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{a+\frac{1}{2}}}{n^{10}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{19}{2}-a}}$$

che converge per $\frac{19}{2} - a > 1$, ossia per $a < \frac{17}{2}$. Notiamo che nel numeratore della prima serie $\sqrt{n}$ "prevale" su $\sqrt[3]{n+1}$. Ora vediamo che la seconda serie converge per ogni a e quindi la serie data, somma delle due, converge per gli a per cui converge al prima ossia per $a < \frac{17}{2}$. Accenno solamente il ragionamento della seconda serie. Poniamo $b_n(a) = \dfrac{n^{10}\big((a-2)^n + n\big)}{(n+4)!}$. Si usa il criterio del rapporto, tenendo conto che, dato che per certi valori di a, $b_n(a)$ può cambiare segno al variare di n, bisogna fare il limite $\lim_{n\to+\infty} \left|\dfrac{b_{n+1}(a)}{b_n(a)}\right|$. Tale limite viene sempre $0 < 1$ e la serie converge. Qualche attenzione:
1) Si ha $n+5)! = (n+5)(n+4)!$ (questo aiuta a semplicare il rapporto.
2) Nel termine $(a-2)^n + n$ prevale $(a-2)^n$ quando $|a-2| > 1$ e prevale n quando $|a-2| \leq 1$.

2b) Sia data una successione $a_n > 0$ illimitata. Provare che esiste un indice n tale che $\dfrac{1}{a_n} < \sqrt{123456789} - \sqrt{123456788}$.
Soluzione. Poniamo $m := \sqrt{123456789} - \sqrt{123456788}$. Notiamo che chiaramente $m > 0$. Essendo a_n illimitata e positiva, necessariamente a_n è illimitata superiormente, quindi esiste un indice n tale che $a_n > \dfrac{1}{m}$. Quindi $\dfrac{1}{a_n} < m$.
NOTA: Un errore frequente è confondere superiormente illimitata con tendente a $+\infty$. Una successione può essere superiormente illimitata ma non tendere a $+\infty$, ad esempio $b_n = (-2)^n$.

3a) Calcolare, al variare di $a, b \in \mathbf{R}$, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \big((x^2+3)^b - 1\big)\Big(e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1\Big).$$

Soluzione (senza tutti i dettagli). Se $b = 0$ la funzione viene 0 (NOTA: non solo *tende* a 0) quindi il limite vale 0. Se $b < 0$ si ha $(x^2+3)^b - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$. Se $b > 0$ si ha $(x^2+3)^b - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ma piú precisamente si ha

$$(x^2+3)^b - 1 = x^{2b}\beta(x) \tag{1}$$

con $\beta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (ossia ci serve capire con che ordine tende a $+\infty$ per poi moltiplicare per il secondo fattore che potrebbe tendere a 0). Se $a > 2$ si ha $e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e se $a = 2$ si ha $e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} e - 1$. In questi casi non si hanno problemi a calcolare il limite perché il prodotto non è mai una forma indeterminata a meno che $b = 0$, ma in quel caso abbiamo visto che la funzione vale identicamente 0. Rimane il caso $a < 2$, dato che in tale caso $e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, e quindi per $b > 0$ viene una forma indeterminata. Allora vediamo con quale velocità il secondo termine tende a 0. Usando il limite notevole $\dfrac{e^y - 1}{y} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 1$, col cambio di variabile $y = \frac{x^a}{x^2+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, si ha

$$e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1 = \frac{x^a}{x^2+1}\gamma(x)$$

con $\gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, e quindi

$$e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1 = x^{a-2}\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\gamma(x) = x^{a-2}\delta(x), \quad \delta(x) := \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}\gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Allora, usando (1) si ha:

$$\big((x^2+3)^b - 1\big)\Big(e^{\frac{x^a}{x^2+1}} - 1\Big) = x^{2b+a-2}\beta(x)\delta(x)$$

e si conclude subito a seconda che $2b + a - 2$ sia positivo, negativo o 0.

3b) Calcolare, al variare dei numeri reali a e b, se esiste, il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a}{(1+x^2)^3 - e^{bx^2} - x^{\frac{3}{2}}\sin(\sqrt{x})}.$$

Soluzione (cenno). Si usa la formula di Taylor. La funzione $(1 + x^2)^3$ potrebbe anche essere sviluppata usando il cubo di un binomio $\big((1+x^2)^3 = 1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6\big)$. Si scrive $e^{bx^2} = 1 + bx^2 + bx^2\alpha_1(bx^2)$ ove $\alpha_1(0) = 0$ e α_1 è continua in 0.
NOTA!!! Alcuni studenti tolgono queste funzioni tipo $bx^2\alpha_1(bx^2)$ che potrebbe anche scriversi come $o(x^2)$, ma è un errore che può alterare il risultato.
Scriviamo $\sin(\sqrt{x}) = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}\alpha_2(x^{\frac{1}{2}})$ ove $\alpha_2(0) = 0$ e α_2 è continua in 0. A questo punto, si vede che a denominatore prevale x^2 a meno che $b = 2$, nel qual caso tutti gli x^2 si cancellano $\big($viene $(3 - b - 1)x^2\big)$. Per $b = 2$ bisogna usare la formula di Taylor all'ordine successivo. Non scrivo i dettagli.

4) Calcolare, per un opportuno $a > 0$, l'integrale indefinito

$$\int \Big(\frac{(7x+2)^{40} - 1}{(14x+4)^{20} + a} + x^3(x^2+1)^\pi\Big)\, dx.$$

Soluzione (cenno). Scriviamo

$$\int \Big(\frac{(7x+2)^{40}-1}{(14x+4)^{20}+a} + x^3(x^2+1)^\pi \Big)\, dx = \int \frac{(7x+2)^{40}-1}{(14x+4)^{20}+a}\, dx + \int x^3(x^2+1)^\pi\, dx.$$

Calcoliamo i due integrai separatamente. Scriviamo

$$\frac{(7x+2)^{40}-1}{(14x+4)^{20}+a} = \frac{(7x+2)^{40}-1}{2^{20}(7x+2)^{20}+a}$$

e ora, prendendo $a = 2^{20}$, si ha

$$\frac{(7x+2)^{40}-1}{(14x+4)^{20}+a} = \frac{1}{2^{20}} \frac{(7x+2)^{40}-1}{(7x+2)^{20}+1}$$

$$= \frac{1}{2^{20}} \frac{\big((7x+2)^{20}+1)(7x+2)^{20}-1)\big)}{(7x+2)^{20}+1} = \frac{1}{2^{20}} \big((7x+2)^{20}-1)\big).$$

Notiamo ora che l'integrale $\int (7x+2)^{20}\, dx$ si integra con la sostituzione $y = 7x+2$ ottenendo $\int (7x+2)^{20}\, dx = \dfrac{1}{7}\dfrac{(7x+2)^{21}}{21} + c$. Il secondo integrale si calcola con la sostituzione $y = x^2+1$ e scrivendo $x^3 = \frac{1}{2}(2x)(x^2+1-1)$.