Soluzioni degli esercizi del primo esonero di Analisi Matematica 4
Anno Accademico 2016/17

Scriverò qui le soluzioni degli servizi del primo esonero di Analisi Matematica 4. Due avvertenze.

Ricordo che ho dato due testi diversi. Io scriverò la soluzione di uno dei due testi, dati all'esonero; le soluzioni dell'altro testo sono simili. Scriverò per il primo esercizio la soluzione di uno dei due testi, per il secondo la soluzione dell'altro. A volte spiegherò, oltre alla soluzione, anche alcuni errori fatti. Sarà sottinteso che quando farò riferimento a un errore, potrò dire che alcuni studenti hanno fatto un certo errore, senza preoccuparmi se è quello preciso detto lí o quello del tutto analogo nell'altro testo.

Esercizio 1

Sia data la successione di funzioni $f_n(x) = \begin{cases} a + \frac{1}{n} & \text{se } x \in [-n, 3 - \frac{1}{n}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$, ove a è un numero reale.

a) Al variare di $a \in \mathbf{R}$, dire se la successione f_n converge puntualmente su $\mathbf{R}$, e nel caso se la convergenza è uniforme su $\mathbf{R}$.

b) per $a = 0$, dire per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge.

c) Supponiamo data una successione g_n di funzioni da $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$. Sia α una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ che manda $[0, +\infty[$ in $[0, +\infty[$ tale che $\alpha(0) = 0$. Provare che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $[0, +\infty[$.

d) Supponiamo data una successione g_n di funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tale che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$. Sia α una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(0) = 0$. È vero che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$?

Soluzione

Notiamo che se $x \geq 3$ per ogni intero positivo n si ha $x \notin [-n, 3 - \frac{1}{n}]$ dato che che $x \geq 3 > 3 - \frac{1}{n}$. Quindi

$$\forall\, x \geq 3 \quad f_n(x) = 0 \ \forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Se invece $x < 3$, si ha definitivamente $x < 3 - \frac{1}{n}$ dato che $3 - \frac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 3 > x$, e inoltre, chiaramente $x > -n$ definitivamente. Quindi, fissato $x < 3$, esiste ν tale che $x \in [-n, 3 - \frac{1}{n}]$ per ogni $n > \nu$, e quindi

$$\forall\, x < 3\ \exists\, \nu : f_n(x) = a + \frac{1}{n} \quad \forall\, n > \nu. \tag{2}$$

Soluzione di a).
In conclusione, $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ puntualmente, ove

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x < 3, \\ 0 & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

NOTA!!! Errori fatti sulla convergenza puntuale. Qualcuno ha sbagliato la convergenza nel punto $x = 3$, dicendo che f_n tende ad a in 3. Il ragionamento fatto mostra chiaramente che nel punto 3, f_n tende a 0. Nota: *Bisogna spiegare il motivo per cui la funzione limite f ha la forma data*, e non limitarsi a descriverla senza alcuna motivazione.

Passiamo ora alla convergenza uniforme. Si ha

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \begin{cases} |a| & \text{se } x \in\ ]-\infty, -n[\\ \frac{1}{n} & \text{se } x \in [-n, 3 - \frac{1}{n}] \\ |a| & \text{se } x \in\ ]3 - \frac{1}{n}, 3[\\ 0 & \text{se } x \in [3, +\infty[\end{cases}.$$

Quindi $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \max\{|a|, \frac{1}{n}\}$. Se $a = 0$, quindi $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente su $\mathbf{R}$. Se invece $a \neq 0$, si ha $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| = |a|$ definitivamente, quindi $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}} \left|f_n(x) - f(x)\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} |a| \neq 0$, e la convergenza di f_n a f non è uniforme su $\mathbf{R}$.

NOTA!!! Errori fatti sulla convergenza uniforme. Alcuni hanno detto che la convergenza di f_n a f non è uniforme per $a \neq 0$ per il fatto che la funzione limite f non è continua, ma questo ragionamento non è valido perché il teorema dice che, *se f_n sono funzioni continue* da un sottoinsieme A di $\mathbf{R}$ a valori reali e $f_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente, allora f è continua. In questo caso però, le funzioni f_n non sono continue e quindi il teorema non si può applicare.

Soluzione di b). Ricordo che qui si suppone $a = 0$.
Se $x \geq 3$, per (1) si ha $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0$, e quindi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge. Se invece $x < 3$, per (2), dato che $f_n(x)$ coincide con $\frac{1}{n}$ definitivamente la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ ha lo stesso carattere della serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e quindi diverge.
Notare che nel ragionamento di sopra conta il fatto che $f_n(x)$ coincide con $\frac{1}{n}$ *definitivamente*, mentre non basterebbe che questo succeda per infiniti n (invece che definitivamente).

Soluzione di c). Dalla teoria sappiamo che $g_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente su $[0,+\infty[$, quindi esiste ν tale che $0 \le g_n(x) \le 1$ per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in [0,+\infty[$. Inoltre, dato che α è supposta C^1, sappiamo che α' è continua, e quindi, per il teorema di Weierstrass applicato all'intervallo $[0,1]$, esiste $M > 0$, tale che $\alpha'(y) \le M$ per ogni $y \in [0,1]$. Si ha

$$0 \le \alpha\big(g_n(x)\big) = \alpha\big(g_n(x)\big) - \alpha(0) = \alpha'(\xi_{n,x})g_n(x) \le M g_n(x), \tag{3}$$

per ogni $n > \nu$ e per ogni $x \in [0,+\infty[$, ove $\xi_{n,x}$ è un numero opportuno nell'intervallo $[0,g_n(x)] \subseteq [0,1]$, dato dal teorema di Lagrange. Dall'ipotesi che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $[0,+\infty[$, per il criterio di Cauchy uniforme, sappiamo il seguente fatto. Fissato $\varepsilon > 0$, esiste ν' (che possiamo scegliere $> \nu$) tale che se $n \ge \nu'$, $p \ge 0$ e $x \in [0,+\infty[$ si ha

$$\sum_{k=n}^{n+p} g_k(x) = \Big|\sum_{k=n}^{n+p} g_k(x)\Big| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Usando (3), deduciamo che se $n \ge \nu'$, $p \ge 0$ e $x \in [0,+\infty[$ si ha

$$\Big|\sum_{k=n}^{n+p} \alpha\big(g_k(x)\big)\Big| = \sum_{k=n}^{n+p} \alpha\big(g_k(x)\big) \le \sum_{k=n}^{n+p} M g_k(x) < \varepsilon$$

e quindi, ancora per il criterio di Cauchy uniforme, la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converge uniformemente su $[0,+\infty[$.

Soluzione di d). La soluzione piú semplice (che mi è stata suggerita dal tutore) è la seguente: basta prendere $g_n(x) = (-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ e $\alpha(x) = x^2$. Ricordando che se le funzioni sono costanti la serie di funzioni converge uniformemente se e solo se converge la serie di tali costanti (fatto immediato da verificare), per il criterio di Leibniz, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ converge uniformemente su $\mathbf{R}$. Comunque, $\alpha\big(g_n(x)\big) = \frac{1}{n}$, e quindi la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ non converge essendo la serie armonica.

Nota: Sarebbe stato piú complicato se si fosse chiesto che su α che α fosse una funzione di classe C^1 su $\mathbf{R}$ tale che $\alpha(0) = 0$ e che la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha \circ g_n$ converga puntualmente, ma non uniformemente su $\mathbf{R}$. In tal caso le considerazioni sarebbero state simili ma piú complicate e ovviamente non sarebbe dato corretto l'esempio dato sopra.

Esercizio 2

a) Risolvere, per un numero reale a scelto a piacere, l'equazione differenziale

$$y^{(iv)}(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \frac{1}{2}y(t) = e^{at}.$$

b) Sia dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = u\big(y(t)\big) \\ y(0) = k \end{cases}$$

ove $u(x) = (x+13)(x^{38} - 24)(x - 31)$. Determinare, se esiste $k \in \mathbf{R}$ in modo che tale problema di Cauchy non abbia soluzione globale.
c) Determinare $w : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ di classe C^∞ tale che w si annulla esattamente nei punti $3, 4, 5$ e il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = w\big(y(t)\big) \\ y(0) = k \end{cases}$$

ha soluzioni globali per ogni $k \in \mathbf{R}$.

Soluzione di a). Studiamo l'omogenea associata ossia

$$y^{(iv)}(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \frac{1}{2}y(t) = 0 \tag{4}$$

che si risolve trovando le polinomio caratteristico, in questo caso $P(\lambda) = \lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}$. Le radici di tale polinomio si ottengono sostituendo $z = \lambda^2$, e sono $1, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}}i$, ovviamente ognuna con molteplicità 1. quindi la soluzione generale dell'omogenea associata è data da

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4 \sin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big).$$

Qui ovviamente c_1, c_2, c_3 e c_4 sono arbitrarie costanti reali. Scegliamo un numero a a piacere. La scelta piú semplice è $a = 0$. In questo caso l'equazione originaria diventa

$$y^{(iv)}(t) - \frac{1}{2}y''(t) - \frac{1}{2}y(t) = 1. \tag{5}$$

Una soluzione particolare si trova anche ad occhio, ossia $y(t) = -2$. Però, anche se è corretto trovarla cosí, vediamo come si cerca in modo sistematico. Scriviamo (5) come

$$\big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\big)(y)(t) = 1 \tag{6}$$

e applichiamo un operatore che annulla il secondo membro ossia D, ottenendo

$$D\big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\big)(y)(t) = 0 \tag{7}$$

Da note proprietà, il polinomio caratteristico associato è il prodotto di quello associato a D e di quello associato a $D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}$ ossia viene

$$P(\lambda) = \lambda\Big(\lambda^4 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\Big),$$

che ha come radici 0 e $1, -1, \frac{1}{\sqrt{2}}i, -\frac{1}{\sqrt{2}}i$, ovviamente ognuna con molteplicità 1. Quindi le soluzioni di (7) saranno della forma

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4 \sin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_5$$

Ora usiamo un procedimento standard in questa situazione. Ossia, vogliamo che y risolva (6) e scriviamo

$$\begin{aligned}
1 &= \Big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\Big)\Big(c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4 \sin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_5\Big) \\
&= \Big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\Big)\Big(c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4\Big) + \Big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\Big)(c_5) \\
&= \Big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\Big)(c_5)
\end{aligned}$$

ove l'ultima uguaglianza è dovuta al fatto che la funzione $c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4$ è soluzione di (4). Quindi cerchiamo una soluzione di (6) della forma c_5, e, fatti i calcoli, risulta $c_5 = -2$. Allora la soluzione finale dell'equazione, come noto, si ottiene sommando la soluzione generale dell'omogenea associata (6) alla soluzione particolare trovata e dunque sarà

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4 \sin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) - 2$$

con c_1, c_2, c_3 e c_4 arbitrarie costanti reali.
NOTA BENE!!! Qui, come al solito, ho usato un piccolo abuso di notazione, ossia ho scritto ad esempio,

$$c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4 \sin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_5$$

quando sarebbe stato piú preciso dire *la funzione che a t associa*

$$c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3 \cos\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_4 \sin\big(\frac{1}{\sqrt{2}}t\big) + c_5.$$

Avremmo anche potuto porre ad esempio $a = 2$, e in tal caso avrei dovuto applicare un operatore differenziale che annulla la funzione z definita da $z(t) = e^{2t}$, e la scelta piú tipica e naturale è $D - 2$. Ovviamente anche $a = 1$ sarebbe stato lecito e fattibile ma meno conveniente dato che calcoli verrebbero piú elaborati, in quanto l'analoga di (7) ossia

$$(D - 1)\big(D^4 - \frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{2}\big)(y)(t) = 0$$

verrebbe un'equazione, il cui polinomio caratteristico avrebbe 1 come radice doppia. NOTA: la parte a) è stata fatta correttamente da quasi tutti gli studenti.

Soluzione di b). Prima di tutto notiamo che, essendo la funzione u di classe C^1 (e in realtà anche di classe C^∞, ma basta C^1) siamo nelle condizioni del teorema di esistenza e unicità locale. Notiamo che le costanti -13, $\sqrt[38]{24}$, $-\sqrt[38]{24}$, 31, sono soluzioni dell'equazione, chiaramente globali, e quindi il problema di Cauchy per $k=-13$, $k=\sqrt[38]{24}$, $k=-\sqrt[38]{24}$, $k=31$, ha tali costanti come soluzioni, e quindi soluzioni globali; quindi sicuramente tali valori non vanno bene. Anche se

$$k \in \left]\sqrt[38]{24}, 31\right[\tag{8}$$

la soluzione è globale. Infatti, siano y_1 e y_2 le funzioni date da $y_1(t)=\sqrt[38]{24}$, $y_2(t)=31$. Sia $\overline{y}$ la soluzione del problema di Cauchy con k che soddisfa (8), e sia $]\alpha,\beta[$ il suo intervallo massimale. Per il teorema di unicità (globale), dato che $y_1(t)<\overline{y}(t)<y_2(t)$, vale per $t=0$, vale anche per ogni $t\in]\alpha,\beta[$. Si vede questo con un ragionamento molto tipico, ossia in caso contrario $\overline{y}$ e y_1 oppure $\overline{y}$ e y_2 coinciderebbero in un punto, e quindi in tutto $]\alpha,\beta[$ ma questo non accade dato che non coincidono in 0. Supponiamo per assurdo $\beta<+\infty$. Allora su $[0,\beta[$ $\overline{y}$ sarebbe limitata, e *dato che l'equazione ha la forma*

$$y'(t)=\widetilde{u}\big(t,y(t)\big)$$

con $\widetilde{u}(t,z)=u(z)$, *e* $\widetilde{u}$ *è definita e* C^1 *in tutto* $\mathbf{R}^2$, $\overline{y}$ sarebbe prolungabile, contraddizione. Il principio generale dietro il precedente ragionamenti è il seguente: sull'intervallo $[0,\beta[$, la soluzione $\overline{y}$ avrebbela proprietà che

$$\big\{\big(t,\overline{y}(t)\big):t\in[0,\beta[\big\}\subseteq[0,\beta]\times[\sqrt[38]{24},31]:=K$$

con K compatto contenuto nell'aperto $\mathbf{R}^2$ dominio di $\widetilde{u}$, e quindi $\overline{y}$ sarebbe prolungabile. In conclusione, $\beta=+\infty$, e similmente si vede che $\alpha=-\infty$; quindi la soluzione è globale.

In modo analogo si vede che la soluzione del problema di Cauchy è globale se $k\in\left]-13,-\sqrt[38]{24}\right[$ e se $k\in\left]-\sqrt[38]{24},\sqrt[38]{24}\right[$, poiché anche in tali casi la soluzione nel punto 0 è compresa tra due soluzioni costanti, e si ragiona come prima. Anzi si sarebbe potuto fare il ragionamento generale: se $k\in]-13,31[$ allora la soluzione è globale, ragionando come prima. Quindi gli unici problemi per avere la soluzione globale possono verificarsi se $k>31$ e se $k<-13$. Vediamo che cosa succede se $k>31$. Osserviamo che sull'intervallo massimale $]\alpha,\beta[$, la soluzione $\overline{y}$ del problema di Cauchy soddisfa $\overline{y}(t)>31$ per motivi simili a quelli spiegati nel dettaglio se vale (8). Perciò

$$\overline{y}'(t)=u\big(\overline{y}(t)\big)=\big(\overline{y}(t)+13\big)\big(\overline{y}(t)^{38}-24\big)\big(\overline{y}(t)-31\big)>0$$

e quindi $\overline{y}$ è strettamente crescente in $]\alpha,\beta[$. Segue che, se $t\in]\alpha,0[$ si ha $31<\overline{y}(t)<k$, e quindi, se fosse $\alpha>-\infty$, per motivi simili al caso in cui vale (8), $\overline{y}$ sarebbe prolungabile (notiamo che qui k è un numero dato una volta fissato il problema di Cauchy). Quindi

$\alpha = -\infty$. Quindi il problema può essere solo su β. Vediamo ora che in effetti $\beta < +\infty$, e quindi la soluzione non è globale. L'idea è che l'equazione ha crescita "molto piú" che lineare e quindi la soluzione "esplode" prima. Formalizziamo questo.

Per ogni $t \in [0, \beta[$ si ha $\overline{y}(t) \geq \overline{y}(0) = k$ dato che abbiamo visto che $\overline{y}$ è strettamente crescente. Ora su $[k, +\infty[$ la funzione v definita da $v(x) = \dfrac{u(x)}{x^2}$ ha un minimo m, dato che si ha $v(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ e tale minimo m è necessariamente positivo. Quindi $u(x) \geq mx^2$ per ogni $x \geq k$, e allora per ogni $t \in [0, \beta[$ abbiamo

$$\overline{y}'(t) = u\big(\overline{y}(t)\big) \geq my(t)^2$$

da cui dividendo per $y(t)^2$ si ha

$$\frac{\overline{y}'(t)}{\overline{y}(t)^2} \geq m,$$

e, mettendo s al posto di t e integrando in s tra 0 e t, otteniamo

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{\overline{y}(t)} = \frac{1}{\overline{y}(0)} - \frac{1}{\overline{y}(t)} \geq mt \quad \forall\, t \in [0, \beta[$$

ma, dato che $m > 0$, la relazione $mt \leq \frac{1}{k}$ non può essere vera per t abbastanza grande, ad esempio per $t > \dfrac{1}{mk}$, e quindi si deve avere necessariamente $\beta \leq \dfrac{1}{mk}$. Quindi la soluzione non è globale.

Osserviamo che le considerazioni precedenti possono sembrare dovute ad un calcolo casuale, ma non è cosí. Intanto la relazione

$$u(x) \geq mx^2 \tag{9}$$

esprime il concetto intuitivo che la crescita è piú che lineare e quindi la soluzione esplode prima, imitando il ragionamento per cui le soluzioni dell'equazione $y'(t) = my(t)^2$ **non sono** globali, ossia basta sostituire la disuguaglianza all'uguaglianza. Inoltre, se qualcuno trovasse innaturale tale relazione (9), si potrebbe tranquillamente sostituire con $u(x) \geq mx^l$ ove l è un intero non superiore a 40 (il grado del polinomio u). Al limite per k che scegliamo noi grande, ad esempio $k \geq 62$, si trova facilmete un esplicito m.

Soluzione di c). La soluzione piú semplice consiste nel trovare w che si annulla esattamente nei punti $3, 4, 5$, di classe C^∞, e *limitata*, dato che i teoremi generali assicurano in tale caso che la soluzione è globale. Una possibilità è

$$w(x) = \frac{(x-3)(x-4)(x-5)}{x^4+1}.$$

Infatti, in tal caso, dividendo per un polinomio di quarto grado che non si annulla su $\mathbf{R}$ (altrimenti, se si annullasse, la funzione non sarebbe definita in $\mathbf{R}$), si vede facilmente che w è limitata dato che $w(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ e $w(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, quindi esisterà un $d > 0$ tale che $|w(x)| \le 1$ se $x \notin [-d, d]$, e d'altra parte, per il teorema di Weierstrass, esiste $M > 0$ tale che $|w(x)| \le M$ per ogni $x \in [-d, d]$, e in conclusione $|w(x)| \le \max\{1, M\}$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Un'altra possibilità è, come hanno fatto alcuni,

$$w(x) = \arctan\big((x-3)(x-4)(x-5)\big).$$

Invece non è corretta la funzione $w(x) = \sin\big((x-3)(x-4)(x-5)\big)$ poiché tale funzione non si annulla solo nei punti 3, 4, 5, ma anche, ad esempio, in $3 + 100\pi$.