Soluzioni di esercizi del secondo esonero
di Analisi Matematica 1 2017/18.

Esercizio 1). Sia $u_a(x) = \dfrac{x^a(3x^2+1)^\pi}{\sin\big(x\sin(x)\big)+e^x-1}$.

a) Determinare, al variare di $a>0$, se esiste, $\lim\limits_{x\to 0^+} u_a(x)$.
b) Determinare, al variare di $a>0$, se esiste, $\lim\limits_{x\to +\infty} u_a(x)$.
c) Provare che $\sin\big(x\sin(x)\big)\geq 0$ per ogni $x\in[0,1]$.
d) Provare che $\sin\big(x\sin(x)\big)+e^x-1>0$ per ogni $x>0$.
e) Provare che se $a>0$ è tale che $\lim\limits_{x\to 0^+} u_a(x)=+\infty$, allora esiste $x>0$ tale che $u_a(x)=7$.

Soluzione. Per motivi tecnici preferisco prima spiegare la b) e pi la a). Infatti in tale modo si capisce meglio perché in a) si usano certi metodi.

b) Ovviamente il denominatore tende a $+\infty$, ed è facile vedere che anche il numeratore tende a $+\infty$, per qualunque $a>0$. Quindi viene una forma indeterminata. Intuitivamente si "capisce" che il limite dovrebbe essere 0 dato che a numeratore prevale una potenza tipo x^b per qualche b e a denominatore e^x. Però ovviamente questa non è una soluzione rigorosa. L'idea dietro alla soluzione rigorosa, come sempre in questi casi, è di mettere in evidenza a numeratore e a denominatore "l'addendo più grande". Quindi scriviamo

$$u_a(x) = \frac{x^a\Big(x^2\big(3+\frac{1}{x^2}\big)\Big)^\pi}{e^x\Big(1-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{\sin\big(x\sin(x)\big)}{e^x}\Big)} =$$

$$\frac{x^{a+2\pi}}{e^x}\frac{\big(3+\frac{1}{x^2}\big)^\pi}{1-\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{\sin\big(x\sin(x)\big)}{e^x}}.$$

Ora, si ha $\big(3+\dfrac{1}{x^2}\big)^\pi \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 3^\pi$, $\dfrac{1}{e^x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ovvio),

$$\frac{\sin\big(x\sin(x)\big)}{e^x} = \sin\big(x\sin(x)\big)\frac{1}{e^x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

(prodotto di una funzione limitata per una che tende a 0), e
$\dfrac{x^{a+2\pi}}{e^x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, (limite notevole dato che $e>1$).
Si deduce $u_a(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

a) In questo caso, sia numeratore sia denominatore tendono a 0, quindi viene ancora una forma indeterminata. Dato che abbastanza spesso gli studenti commettono errori, magari confondendo i metodi con quelli da usare quando si hanno somme di oggetti che invece tendono all'infinito, per spiegare perché uso certi metodi, premetto alcune considerazioni generali. Occorre ricordare

1) In una somma di termini che tendono a 0 conviene mettere in evidenza quello più grande, ossia*quello che tende a 0 più lentamente.*
2) Quando si fanno i limiti per x che tende a 0, x tende a 0 più lentamente di x^2, che a sua volta tende a 0 più lentamente di x^3, etc. Quindi, per quanto visto in 1) poco fa, per esempio in $x + x^3$ conviene mettere in evidenza x.
3) Quando si hanno oggetti che tendono a 0 (per $x \to 0$) ma non del tipo x^b, in genere tendono a 0 con la velocità di funzioni tipo x^b e quindi l'idea è di "sostituirli" con con tali funzioni, ma ovviamente facendo passaggi corretti. In genere si usano i limiti notevoli: ad esempio se abbiamo come addendo $\sin(x)$, pensiamo al limite notevole $\frac{\sin(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Questo in sostanza ci dice che $\sin(x)$ tende a 0 con la stessa velocità (o in altri termini con lo stesso ordine) di x, e quindi scriviamo $\sin(x) = x\frac{\sin(x)}{x}$ ossia $\sin(x)$ vale x moltiplicato per una funzione che tende a 1.

Ora procediamo alla soluzione. Notiamo che $(3x^2+1)^\pi \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Infatti, dato che la funzione considerata γ definita da $\gamma(x) = (3x^2+1)^\pi$ è una funzione continua, si ha $\gamma(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \gamma(0) = 1$. Occorre evitare di commettere l'errore di mettere in evidenza x^2 in $3x^2+1$. Infatti, questo andrebbe bene se il limite fosse per $x \to +\infty$, ma per $x \to 0$ "x^2 è più piccolo di 1" (cf. 1) e 2) qui sopra). Del resto di vede subito che se scriviamo $3x^2 + 1 = x^2\big(3 + \frac{1}{x^2}\big)$, otteniamo il prodotto tra una funzione che tende a 0 e una che tende a $+\infty$, cosa che non ha alcuna utilità. Scriviamo dunque:

$$
\begin{aligned}
u_a(x) &= \frac{x^a}{\sin\big(x\sin(x)\big) + e^x - 1}(3x^2+1)^\pi \\
&= \frac{x^a}{\dfrac{\sin\big(x\sin(x)\big)}{x\sin(x)}x\sin(x) + \dfrac{e^x-1}{x}x}(3x^2+1)^\pi.
\end{aligned}
$$

Ora poniamo, come sopra, $\gamma(x) = (3x^2+1)^\pi$, e abbiamo, come visto, $\gamma(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Poi poniamo $\beta(x) = \dfrac{\sin\big(x\sin(x)\big)}{x\sin(x)}$ e abbiamo $\beta(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Infatti con il cambio di variabile $y = x\sin(x)$, si scrive $\beta(x) = \dfrac{\sin(y)}{y}$ e quindi

$$
\lim_{x\to 0}\beta(x) = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(y)}{y} = 1.
$$

Noto che il il limite in y è per $y \to 0$ dato che $y = x\sin(x)$ e $x\sin(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Infine, posto $v(x) = \dfrac{e^x-1}{x}$, si ha $v(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (limite notevole). Alla fine scriviamo

$$
u_a(x) = \frac{x^a}{\beta(x)x\sin(x) + v(x)x}\gamma(x).
$$

A questo punto a denominatore si può tranquillamente mettere in evidenza x, e lo studente che ha un po' di "occhio" effettua naturalmente questo passaggio. Però, per spiegare il metodo generale, "elimino $\sin(x)$" come spiegato in precedenza, ossia posto, $w(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, e noi sappiamo dal limite notevole che $w(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$, scrivo $\sin(x) = xw(x)$. alla fine si ha

$$\begin{aligned} u_a(x) &= \frac{x^a}{\beta(x)w(x)x^2 + v(x)x}\,\gamma(x) \\ &= \frac{x^a}{x\Big(x\beta(x)w(x) + v(x)\Big)}\,\gamma(x) \\ &= \frac{x^{a-1}}{x\beta(x)w(x) + v(x)}\,\gamma(x). \end{aligned}$$

Dato che le funzioni β, w, v e γ tendono tutte a 1, per $x \to 0$, come visto prima, posto $h(x) = \dfrac{1}{x\beta(x)w(x) + v(x)}\,\gamma(x)$, si ha $u_a(x) = x^{a-1}h(x)$, e $h(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$. Dato che da un limite notevole si ha

$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases},$$

deduciamo

$$\lim_{x\to 0^+} u_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a < 1 \end{cases}.$$

Vediamo alcune osservazioni sui metodi usati. Ad esempio il cambio di variabile da 0^+ a $+\infty$ o viceversa, strumento tentato da molti studenti, nel caso presente è del tutto inutile in quanto non da alcun vantaggio. Per esempio per il b) la soluzione data è del tutto naturale, e quindi non si vede motivo di cercare soluzioni con trucchi tipo cambi di variabili (che, anche fossero fatti in modo corretto) non darebbero alcun vantaggio. Ovviamente se uno usa correttamente i cambi di variabile non sbaglierà l'esercizio e si bloccherà , ma spesso lo studente sbaglia qualcosa.

Come si fa il cambio di variabile per esempio per portare il limite da 0^+ a limite a $+\infty$? L'idea è molto semplice. Ad esempio se abbiamo il limite detto sopra, si ha $u_a(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} l$ se e solo se $u_a\left(\dfrac{1}{y}\right) \underset{y\to +\infty}{\longrightarrow} l$. Ovviamente per scrivere $u_a\left(\frac{1}{y}\right)$ dobbiamo scrivere semplicemente $\frac{1}{y}$ al posto di x in tutti i casi, nel caso specifico

$$u_a\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^a\left(3\left(\frac{1}{y}\right)^2 + 1\right)^\pi}{\sin\left(\frac{1}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right) + e^{\frac{1}{y}} - 1}.$$

Si vede subito che per trattare questo limite l'unico modo ragionevole è ritornare al limite precedente.
Quando invece è utile il cambio di variabile del tipo precedente? Possiamo dire che non c'è una regola generale ed è la pratica a suggerire i casi in cui usarlo. Io suggerirei di usarlo generalmente non in espressioni lunghe ma in singoli "pezzetti" ad esempio un prodotto che è una forma indeterminata e non si riesce a sciogliere in altro modo. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln(x) = \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^2 \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln(y)}{y^2} = 0$$

(ove quest'ultimo è un limite notevole, a parte il segno -).
L'altra raccomandazione sui limiti di funzioni è che sui limiti per $x \to 0$ (o $x \to 0^+$) rinunciare alla tentazione di trattarlo come limite a $+\infty$ (errore frequente) come già detto in precedenza, ossia se abbiamo ad esempio $x + x^3$ questo tende a 0 per $x \to 0$ con l'ordine di x (e NON di x^3 come sarebbe se il limite fosse a $+\infty$), e quindi si mette in evidenza x.

Soluzione di c). Bisogna vedere che quando $x \in 0, 1$ l'espressione $x\sin(x)$ sta in una zona dove il seno è non negativo. ossia nell'intervallo $[0, \pi]$ unito a tutti i suoi traslati di un multiplo intero di 2π, ossia del tipo $[2k\pi, 2k\pi + \pi]$ con k intero. Vedremo che per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $x\sin(x) \in [0, \pi]$. Notiamo che se noi dovessimo verificare direttamente questo fatto risolvendo la "doppia" disequazione

$$0 \le x\sin(x) \le \pi \tag{1}$$

questo sarebbe praticamente impossibile dato che la disequazione a destra in (1) non si vede come risolvere, ma il punto è che noi non siamo tenuti a risolvere (1) ossia a trovare *TUTTI GLI* x che verificano (1), ma solo a verificare che (1) è soddisfatta per $x \in [0, 1]$, cosa molto più semplice. Dato che per ogni $x \in [0, 1]$ si ha $0 \le \sin(x) \le 1$, si deduce

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le \sin(x) \le 1 \tag{2}$$

e "moltiplicando le disuguaglianze" in (2) segue $0 \le x\sin(x) \le 1 \cdot 1 = 1$, come volevasi. Notiamo più precisamente che $x\sin(x) \ge 0$ segue subito da (2) dato che il prodotto di numeri ≥ 0 è sempre ≥ 0. Sulla seconda disuguaglianza occorre notare che da $x \le 1$ e $\sin(x) \le 1$ segue $x\sin(x) \le 1 \cdot 1 = 1$ *perché tutti i numeri che moltiplichiamo, ossia x, $\sin(x)$ e 1 sono ≥ 0.* Ricordo che non possiamo usare lo stesso principio sempre. Ad esempio $-3 < -2$, $-5 < -4$, ma $(-3) \cdot (-5) > (-2) \cdot (-4)$.

d) Sia $x > 0$. Se $x \le 1$, da c) segue che $\sin\big(x\sin(x)\big) \ge 0$, mentre $e^x > e^0 = 1$, quindi $e^x - 1 > 0$. In conclusione

$$\sin\big(x\sin(x)\big) + e^x - 1 > 0.$$

Se invece $x > 1$ si ha $e^x > e^1 = e > 2$, quindi

$$sin\big(x\sin(x)\big) + e^x - 1 > 2 - 1 + \sin(x) = 1 - \sin(x) \ge 0.$$

.

e) La funzione u_a è continua in $]0,+\infty[$, e in particolare ci serve d) per osservare che la funzione è definita in $]0,+\infty[$ avendo denominatore non nullo. Dal fatto che abbiamo supposto $\lim_{x\to 0^+} u_a(x) = +\infty$, mentre abbiamo verificato in b) che $\lim_{x\to+\infty} u_a(x) = 0$, segue che esiste $x_1 \in]0,+\infty[$ tale che $u_a(x_1) > 7$, in particolare scegliamo x_1 abbastanza vicino a 0, mentre troviamo $x_2 \in]0,+\infty[$ abbastanza grande tale che $u_a(x_2) < 7$. Per il teorema dei valori intermedi esiste $\overline{x} \in]0,+\infty[$ tale che $u_a(\overline{x}) = 7$.

Esercizio 2) a) Dire se la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}\,3^n}{5^n + n^4}$ converge.

b) Dire per quali $a \in \mathbf{R}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(7^{2n}+n^2)^a + 4}{80^n + n}$ converge.

Soluzione **NOTA BENE:** *non scriverò tutti i passaggi; lo studente nei compiti dovrebbe scrivere qualche passaggio in più.*

a) Sia $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}\,3^n}{5^n + n^4}$ e sia $b_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}\,3^n}{5^n} = \sqrt[3]{n}\,\big(\dfrac{3}{5}\big)^n$. Si verifica facilmente che $\dfrac{a_n}{b_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, quindi le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere per il criterio del confronto asintotico. Studiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ col criterio del rapporto. Si ha

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt[3]{n+1}\,\big(\frac{3}{5}\big)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}\,\big(\frac{3}{5}\big)^n}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{n\big(1+\frac{1}{n}\big)}}{\sqrt[3]{n}}\,\frac{3}{5}$$

$$= \big(1+\frac{1}{n}\big)^{\frac{1}{3}}\frac{3}{5} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{5} < 1$$

e perciò la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge e quindi anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

b) Siano $a_n = \dfrac{(7^{2n}+n^2)^a + 4}{80^n + n}$, $b_n = \dfrac{(7^{2n}+n^2)^a}{80^n + n}$, $c_n = \dfrac{4}{80^n + n}$. Dato che $a_n = b_n + c_n$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ (ricordo che sommare una serie convergente non cambia il carattere di una serie). Il fatto che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge si verifica facilmente. Ad esempio si vede che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{80^n}$ converge in quanto $\dfrac{4}{80^n} = 4\big(\dfrac{1}{80}\big)^n$ e quindi è la costante 4 moltiplicata per una serie geometrica convergente. A questo punto vediamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ converge usando o il criterio del confronto o quello del confronto asintotico. Studiamo dunque la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$: Usando il criterio del confronto asintotico vediamo che ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$, ave poniamo

$$d_n = \frac{(7^{2n})^a}{80^n} = \left(\frac{49^a}{80}\right)^n$$

Infatti è facile vedere che $\frac{b_n}{d_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ e usiamo il criterio del confronto asintotico. Ora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ è una serie geometrica di ragione $\frac{49^a}{80}$, e quindi converge se e solo se

$$-1 < \frac{49^a}{80} < 1.$$

La prima di queste due disuguaglianze è chiaramente vera per ogni a, mentre la seconda vale se e solo se $a < \log_{49}(80)$. Alla fine la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$, e quindi anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, e quindi anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, converge se e solo se $a < \log_{49}(80)$.

Un'osservazione. Se per studiare ad esempio la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, invece del confronto asintotico si volesse usare il criterio della radice o quello del rappporto, occorrerebbe sempre ricordare che nei casi in cui il limite della radice o del rapporto viene 1, non possiamo concludere nulla in base al criterio, e bisogna studiare la serie in altro modo. Questo fatto viene spesso scordato dagli studenti che per esempio scrivono che la serie converge quando (nel senso di se e solo se) il limite del rapporto è < 1.