

SOLUZIONE DI ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA IV
ANNO 2015/16, FOGLIO 2

1) Sia $f_n : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, 3n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme e uniforme sui compatti della successione f_n e della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Soluzione: Fissato $x \in \mathbf{R}$ esiste $N_0 \in \mathbf{N}$ tale che $x < N_0$. Allora per ogni $n > N_0$ si ha $f_n(x) = 0$ e quindi $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Quindi $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ puntualmente. Si vede in modo analogo che $f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ uniformemente sui compatti. Infatti sia K sottoinsieme compatto (non vuoto) di $\mathbf{R}$. Allora K ha un massimo M . Esisterà $N_0 \in \mathbf{N}$ tale che $M < N_0$. Allora $n > N_0$ si ha $x \leq M < N_0 < n$ e quindi $f_n(x) = 0$ per ogni $x \in K$. Quindi $\sup_{x \in K} |f_n(x) - 0| = 0$ per ogni $n > N_0$, quindi $\sup_{x \in K} |f_n(x) - 0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Invece la convergenza non è uniforme su $\mathbf{R}$ dato che $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - 0| = 1$ e quindi **NON** vale $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x) - 0| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Per quanto riguarda la serie si ha che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge puntualmente, dato che fissato $x \in \mathbf{R}$, come visto in precedenza si ha $f_n(x) = 0$ definitivamente e quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge. Si vede pure che $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente sui compatti. Un modo per vedere ciò è che, fissato un compatto K e posto $c_{n,A} = \sup_{x \in A} |f_n(x)|$ per ogni $A \subseteq \mathbf{R}$, si ha $c_{n,K} = 0$ definitivamente, quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n,K}$ converge. Quindi la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge totalmente, e quindi uniformemente su K . Invece la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ non converge uniformemente su $\mathbf{R}$ dato che come visto, la successione f_n non tende a 0 uniformemente su $\mathbf{R}$. Si può dire la stessa cosa in altri termini, ossia $c_{n,\mathbf{R}} = 1$ per ogni n e quindi $c_{n,\mathbf{R}}$ non tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

2) Fare lo stesso se f_n è definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} (x - n)^a & \text{se } x \in [n, 3n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

al variare di $a > 0$.

Soluzione: si procede in modo simile per la convergenza puntuale e per quella uniforme sui compatti. Per quella uniforme, bisogna notare che $\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [n, 3n]} (x - n)^a = (2n)^a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, quindi la successione f_n non converge uniformemente su $\mathbf{R}$, e

di conseguenza anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ non converge uniformemente su $\mathbf{R}$, altrimenti f_n convergerebbe a 0 uniformemente.

3) Fare lo stesso se f_n è definita da

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(x - n + \frac{1}{n}\right)^a & \text{se } x \in [n, n+3] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases},$$

al variare di $a \in \mathbf{R}$.

Soluzione: è simile al precedente, e i risultati sono gli stessi. L'unica cosa da osservare è che se $a > 0$ allora

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [n, n+3]} \left(x - n + \frac{1}{n}\right)^a = \left(2n + \frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

poiché la funzione $x \mapsto x^a$ è crescente su $]0, +\infty[$, mentre se $a < 0$ allora

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [n, n+3]} \left(x - n + \frac{1}{n}\right)^a = \left(\frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

poiché la funzione $x \mapsto x^a$ è decrescente su $]0, +\infty[$; infine se $a = 0$ si ha

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in [n, n+3n]} \left(x - n + \frac{1}{n}\right)^a = 1.$$

4) Dire se la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^4 \ln(x^2 + n^2)}{2^n}$ si può derivare termine a termine in $\mathbf{R}$.

Soluzione: Si può derivare termine a termine. Usiamo il teorema che dice che questo è verificato se

1) la serie di funzioni converge puntualmente (basterebbe sapere che converge in almeno un punto)

2) la serie delle derivate converge uniformemente.

Per provare 1) scriviamo

$$\begin{aligned} \frac{x^4 \ln(x^2 + n^2)}{2^n} &= \frac{x^4 \ln\left(n^2\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)\right)}{2^n} = x^4 \frac{2 \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)}{2^n} \\ &= x^4 \frac{\ln(n)}{2^n} \left(2 + \frac{\ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)}{\ln(n)}\right), \end{aligned}$$

quindi

$$\frac{\frac{x^4 \ln(x^2 + n^2)}{2^n}}{\frac{\ln(n)}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2x^4$$

quindi, (per $x \neq 0$) la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^4 \ln(x^2+n^2)}{2^n}$ (per il criterio del confronto asintotico) ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{2^n}$, che converge per esempio per il criterio del rapporto. Se $x = 0$ la serie iniziale converge banalmente.

Ora vorremmo provare 2). In realtà, **non** proviamo 2), ma **come si fa spesso in questi casi** proveremo che la serie delle derivate converge uniformemente in ogni intervallo $]a, b[$ con $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ e questo basterà a concludere. Infatti, restringendo le funzioni ad $]a, b[$ proveremo in tal modo in base al teorema, che la serie si può derivare termine a termine in $]a, b[$, ma dato che ogni $x \in \mathbf{R}$ appartiene ad un intervallo del tipo $]a, b[$, allora la derivazione termine a termine vale in tutto $\mathbf{R}$. Nota che abbiamo considerato gli intervalli aperti, dato che la derivata di una funzione e della sua restrizione ad un intervallo aperto coincidono in tutti i punti dell'intervallo stesso, mentre se l'intervallo fosse chiuso questo non sarebbe vero (una funzione potrebbe non essere derivabile in un estremo dell'intervallo chiuso, anche se la sua restrizione lo è, ad esempio $f(x) = |x|$ su $[0, 1]$; in tal caso la restrizione di f a $[0, 1]$ ha derivata 1, ma f non è derivabile in 0). La serie delle derivate è data da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(4x^3 \ln(x^2 + n^2) + x^4 \frac{2x}{x^2 + n^2} \right).$$

Sia ora $x \in]a, b[$, sia $c = \max\{|a|, |b|\}$, sia $\bar{n} > c$, e prendiamo $n \geq \bar{n}$. Allora si ha

$$\left| \frac{1}{2^n} \left(4x^3 \ln(x^2 + n^2) + x^4 \frac{2x}{x^2 + n^2} \right) \right| \leq \frac{1}{2^n} \left(4c^3 \ln(2n^2) + 2c^5 \frac{1}{n^2} \right) := d_n,$$

e, dato che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ converge, come si verifica facilmente, allora la nostra serie delle derivate converge totalmente, e quindi uniformemente, su $]a, b[$.

5) a) Trovare l'insieme di convergenza puntuale della serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 + 2)^n}{4^n + 1}$ precisando in quali insiemi tale serie converge uniformemente.

b) Dire se nell'intervallo di convergenza puntuale tale serie si può derivare termine a termine.

Soluzione:

a) Usando, per esempio il criterio della radice, si ha che la serie converge quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(x^2 + 2)^n}{4^n + 1}} < 1$$

ma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(x^2 + 2)^n}{4^n + 1}} = \frac{x^2 + 2}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{4^n + 1}} = \frac{x^2 + 2}{4 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{4^n}}} = \frac{x^2 + 2}{4}.$$

Quindi la serie converge quando $\frac{x^2+2}{4} < 1$, ossia $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, quando $\frac{x^2+2}{4} = 1$ la serie va controllata a parte, mentre quando $\frac{x^2+2}{4} > 1$ non converge. Noto che quando $\frac{x^2+2}{4} = 1$, ossia $x^2 = 2$, il termine generale della serie non tende a 0, e quindi la serie non converge. In conclusione la serie converge in $] -\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Vediamo ora in quali insiemi la convergenza è uniforme. Dalla teoria generale delle serie di potenze potremmo dedurre che la convergenza è uniforme in tutti gli insiemi della forma $[c, d]$ con $-\sqrt{2} < c < d < \sqrt{2}$, e quindi anche in tutti i sottoinsiemi di tali insiemi. Però, dato che questa non è una serie di potenze in x bisognerebbe fare qualche passaggio. Invece facciamo vedere questo direttamente. Se esistono c, d con $-\sqrt{2} < c < d < \sqrt{2}$ tali che $A \subseteq [c, d]$, allora $\sup_{x \in A} |x| := M < \sqrt{2}$, quindi

$$\sup_{x \in A} \left| \frac{(x^2 + 2)^n}{4^n + 1} \right| \leq \frac{(M^2 + 2)^n}{4^n + 1} := d_n.$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ converge (per vedere questo basta sostituire M al posto di x nel ragionamento sulla convergenza puntuale), la nostra serie converge totalmente, e quindi uniformemente, in A . Proviamo che viceversa, se A è un insieme ove la serie converge uniformemente, allora esistono c, d con $-\sqrt{2} < c < d < \sqrt{2}$ tali che $A \subseteq [c, d]$. Infatti $A \subseteq]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ poiché questo è l'insieme di convergenza puntuale. Siano $c = \inf A$, $d = \sup A$. Poiché chiaramente $A \subseteq [c, d]$, basta provare $c > -\sqrt{2}$, $d < \sqrt{2}$. Se per assurdo fosse per esempio $d = \sqrt{2}$, allora si avrebbe che $\sqrt{2}$ apparterrebbe alla chiusura di A ; allora per un risultato visto, dato che le funzioni di cui facciamo la serie sono continue, la serie convergerebbe anche in $\sqrt{2}$, ma abbiamo visto che questo non è vero, quindi $d < \sqrt{2}$. Analogamente si prova $c > -\sqrt{2}$.

b) Proviamo che effettivamente si può derivare termine a termine. Lo facciamo in due modi.

Primo modo: facciamo vedere che la serie delle derivate converge uniformemente in ogni intervallo $]c, d[$ con $-\sqrt{2} < c < d < \sqrt{2}$: questo basta a concludere ragionando come nell'esercizio precedente. Sia dunque $x \in]c, d[$. La serie delle derivate è data da

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2xn(x^2 + 2)^{n-1}}{4^n + 1}. \text{ Posto } A := \max\{|c|, |d|\}, \text{ per ogni } x \in]c, d[, \text{ si ha}$$

$$\left| \frac{2xn(x^2 + 2)^{n-1}}{4^n + 1} \right| \leq \frac{2An(A^2 + 2)^{n-1}}{4^n + 1}$$

e, dato che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2An(A^2+2)^{n-1}}{4^n+1}$ converge, per esempio per il criterio della radice, la nostra serie delle derivate converge totalmente, e quindi uniformemente in $]c, d[$

Secondo modo: Sia $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2 + 2)^n}{4^n + 1}$ e sia $g(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{4^n + 1}$. Si vede subito che il raggio di convergenza della serie di potenze che esprime g è 4. Quindi, dalla teoria generale delle serie di potenze, possiamo derivarla termine a termine in $] -4, 4[$, ottenendo

per ogni $y \in]-4, 4[$, $g'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ny^{n-1}}{4^n + 1}$. Ora, la funzione $x \mapsto x^2 + 2$ mappa $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$ in $] - 4, 4[$. Quindi, dato che $f(x) = g(x^2 + 2)$, possiamo applicare la regola di derivazione delle funzioni composte, ottenendo,

$$f'(x) = 2xg'(x^2 + 2) = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(x^2 + 2)^{n-1}}{4^n + 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2x(x^2 + 2)^{n-1}}{4^n + 1}$$

che è proprio la serie delle derivate.

6) Trovare la serie di Taylor, centrata in 0 delle funzioni f_1 e f_2 definite da $f_1(x) = x^7 \ln(1 + 3x^2)$, $f_2(x) = \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4}$ per $x \neq 0$ e prolungata in 0 per continuità.

Soluzione: Per f_1 ricordiamo che $\ln(1 + y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{y^n}{n}$. Si avrà allora

$$f_1(x) = x^7 \ln(1 + 3x^2) = x^7 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(3x^2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n x^{2n+7}}{n}.$$

Tale serie (ossia $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n x^{2n+7}}{n}$) è una serie di potenze uguale a f_1 , e quindi è la sua serie di Taylor. Infatti sappiamo dalla teoria che se una funzione f si esprime in serie di potenze, tale serie di potenze è la serie di Taylor di f .

Vediamo f_2 . Intanto notiamo che $f_2(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$, per esempio usando la formula di Taylor, e quindi, effettivamente, si può prolungare f_2 in 0 per continuità, ponendo $f_2(0) = \frac{1}{2}$. Dato

che come noto, $e^y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}$, per ogni $x \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \frac{e^{x^2} - 1 - x^2}{x^4} = \frac{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} \right) - 1 - x^2}{x^4} = \frac{1}{x^4} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2(n-2)}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Notiamo anche che la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n+2)!}$ coincide con $f_2(x)$ anche per $x = 0$. Per lo stesso motivo visto per f_1 , la serie di potenze ottenuta è la serie di Taylor di f_2 .

7) Calcolare la somma delle seguenti serie di funzioni: $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(x^2 + 1)^n}$, $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+5}}{n!}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Vediamo una per una.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(x^2 + 1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{x^2 + 1}} = x^2 + 1.$$

Per $\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, notiamo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ "assomiglia" alla serie di $\ln(1+x)$, ossia $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, e precisamente viene $-\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-x)^n}{n}$, ossia $-\ln(1-x)$. Alla fine si avrà

$$\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right).$$

Vediamo la terza. Si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+5}}{n!} = x^5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = x^5 e^{x^2}.$$

Vediamo la quarta. Si ha, per $x \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Vediamo la quinta. Si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

che, possiamo notare, vale $\cosh(x)$. La formula data si potrebbe trovare conoscendo lo sviluppo di Taylor di $\cosh$.

8) Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ precisando in quali insiemi tale serie converge uniformemente.

Soluzione: si vede facilmente che la serie converge totalmente e quindi uniformemente su $\mathbf{R}$ e quindi su tutti i sottoinsiemi di $\mathbf{R}$. Per calcolare la somma, facciamo così:

$$\frac{\sin(nx)}{2^n} = \Im \left(\left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^n \right)$$

quindi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n} = \Im \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{e^{ix}}{2} \right)^n \right) = \Im \frac{\frac{e^{ix}}{2}}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} = \Im \frac{e^{ix}}{2 - e^{ix}} = \quad (A)$$

$$\Im \frac{(\cos(x) + i \sin(x))(2 - \cos(x) + i \sin(x))}{(2 - \cos(x) - i \sin(x))(2 - \cos(x) + i \sin(x))} = \frac{2 \sin(x)}{(2 - \cos(x))^2 + \sin^2(x)}.$$

Occorre dare qualche spiegazione. Prima ho usato la formula di De Moivre e la formula della somma della serie geometrica. Bisogna precisare che in (A) ho dato per scontato due fatti. Il primo è che se z_n sono numeri complessi tali che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ converge, allora

$$\Im \left(\sum_{n=1}^{+\infty} z_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \Im(z_n). \quad (B)$$

Ho usato (B) nella prima uguaglianza in (A). Inoltre bisogna provare che la formula della serie geometrica vale anche in campo complesso (cosa che ho usato nella seconda uguaglianza in (A)). Prima di tutto dobbiamo dare una definizione di $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$.

Procediamo così: definiamo il limite di successioni in campo complesso come in campo reale, ossia se z_n e z sono numeri complessi diciamo che $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice N tale che $|z_n - z| < \varepsilon$ per ogni $n > N$, ove questa volta ovviamente il modulo è inteso nel senso dei numeri complessi. Inoltre definiamo la somma di una serie di numeri complessi come il limite delle somme parziali. Proviamo anche in campo complesso che

- 1) $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$ se e solo se $\Re(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Re(z)$ e $\Im(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Im(z)$
- 2) se $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z$, $z'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z'$, allora $z_n + z'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z + z'$ e $z_n z'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} z z'$.
- 3) Se $|z| < 1$, allora $z^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

ove 2) e 3) si provano come per le successioni reali. Ora da 1) segue facilmente (B). Inoltre, mettendo insieme tutte queste cose, dimostriamo come in campo reale la formula

sulla somma della serie geometrica; nel nostro caso partiamo da 1 e abbiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{z}{1-z}$

per ogni numero complesso z tale che $|z| < 1$. Con questi ragionamenti, applicati a $z = \frac{e^{ix}}{2}$ che ha modulo uguale a $\frac{1}{2}$, possiamo giustificare tutti i passaggi fatti prima.

9) a) Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. Calcolare $f'''(x)$.

b) Trovare il valore di $f(x)$, ossia calcolare la somma della serie definente f .

Soluzione: dato che la serie di potenze ha raggio di convergenza infinito, come si verifica facilmente, si può derivare termine a termine in tutto $\mathbf{R}$, e più volte. Si ha

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n(3n-1)(3n-2)x^{3n-3}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3(n-1)}}{(3(n-1))!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = f(x). \end{aligned}$$

Per trovare il valore di f osserviamo che, dato che abbiamo appena visto che f soddisfa l'equazione differenziale

$$y''' = y \tag{E}$$

usiamo la teoria delle equazioni differenziali. Sappiamo che le soluzioni di (E) si trovano in base alle radici del polinomio caratteristico P , in questo caso $P(\lambda) = \lambda^3 - 1$, che ha come radici $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi le soluzioni di (E) sono date da

$$c_1 e^t + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \tag{F}.$$

Per trovare c_1, c_2 e c_3 basta tenere conto che f è della forma (F) e inoltre grazie al fatto che $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0$, si determinano facilmente le costanti c_1, c_2, c_3 .